УДК 51-77:336.767.017.2

МОДЕЛЬ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ОЖИДАНИЙ И ОДНО ИЗ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЙ В ПОРТФЕЛЬНОМ АНАЛИЗЕ

Давнис Валерий Владимирович, д-р экон. наук, проф.
Коротких Вячеслав Владимирович, асп.

Воронежский государственный университет, Университетская пл., 1, Воронеж, Россия, 394006; e-mail: vdavnis@mail.ru; v.v.korotkikh@gmail.com

Цель: Повышение статистической надежности и развитие аппарата математического моделирования рыночных процессов, используемого в обосновании инвестиционных решений. *Обсуждение*: Авторы предлагают уточнение природы и механизма формирования доходности рынка в условиях гипотезы альтернативных ожиданий. Данное уточнение обусловлено необходимостью получения статистически надежных результатов. Большое внимание уделяется разработке техники декомпозиции группового специфического риска на систематическую составляющую, реализующуюся под влиянием несистематического внешнего фактора различной интенсивности, и остаточную случайную составляющую. Рассматриваются способы моделирования несистематического внешнего фактора с использованием инструментальных переменных. *Результаты*: На основе эконометрического подхода авторами предложена система уравнений, описывающая динамику доходности фондового актива. Данная система позволяет учитывать в расчетах как систематические линейные факторы (динамику рынка, динамику группы активов), так несистематические нелинейные. Приводится краткий вывод необходимых для этого формул и их содержательная интерпретация. В эмпирической части исследования продемонстрирована техника формирования эффективного портфеля по диагональной модели в условиях недостаточной статистической надежности ее параметров.

Ключевые слова: гипотеза альтернативных ожиданий, статистическая надежность, инструментальная переменная.

1. Введение

Концептуальный базис настоящего исследования формирует механизм принятия упреждающих решений экономическими агентами в условиях неопределенности будущего.

Согласно гипотезе адаптивных ожиданий, при прогнозировании динамики хозяйственных процессов в условиях неопределенности будущего экономические агенты основываются на опыте прошлых прогнозов. Систематические ошибки прогноза в прошлом оказывают влияние на последующий прогноз, играя роль корректирующих поправок. Если фактические значения образуют сходящуюся последовательность значений либо колеблются вокруг некоторой константы, прогнозы экономических агентов не будут абсолютно точными, но их отличия от фактических значений будут столь незначительны, что они будут восприниматься как вполне удовлетворительные. В свою очередь, в случае выраженного тренда анализируемого показателя адаптивные ожидания отстают от фактического значения и в последующие периоды оказываются ошибочными. Равновесие в условиях данной гипотезы достигается лишь асимптотически. Впервые подобные идеи были использованы И. Фишером в работе [10], позднее развиты Ф. Каганом [9] и М. Фридманом [12].

Согласно гипотезе рациональных ожиданий, разработанной в альтернативу гипотезе адаптивных ожиданий, экономические агенты располагают всей доступной для них информацией, используют ее при прогнозировании хозяйственных процессов и действуют при этом рационально. По мнению Дж. Мута [13], именно рациональность экономических агентов позволяет в среднем избегать систематических ошибок прогноза. Все ошибки носят случайный характер. Т. Сарджент [14] отмечает, что одним из ключевых следствий данной гипотезы является стремление экономических агентов оптимизировать стратегии своего поведения.

Рациональность экономических агентов и стремление к оптимальному поведению сыграли важную роль при разработке гипотез эффективного рынка. Они стали залогом корректного и внутренне непротиворечивого моделирования процессов фондового рынка.

В то же время гипотеза рациональных ожиданий также открыто критикуется. В частности, М. Ловелл [11] показал, что экономические агенты не обладают полнотой информации, и поэтому в рамках гипотезы рациональных ожиданий нельзя решить проблему построения реальных прогнозов. Кроме того, математические модели, построенные на основе данной гипотезы, ориентированы на крайнюю степень абстрагирования от реальности описываемых экономических процессов. Возникает проблема компромисса корректности и адекватности моделей.

В исследовании [7] нами была представлена гипотеза альтернативных ожиданий и рассмотрен ряд ее следствий. В ней мы постарались развить сильные стороны упомянутых выше гипотез. Во-первых, она предполагает рациональность в смысле стремления к отсутствию систематических ошибок. Во-вторых, она позволяет моделировать процессы, в реализации которых наблюдаются различные типы динамики. Мы полагаем, что гипотеза альтернативных ожиданий позволяет получать статистически надежные прогнозы, используя ровно столько информации, сколько необходимо для обеспечения требуемой надежности. Модели, реализующие данные принципы, будем называть моделями альтернативных ожиданий.

В настоящем исследовании на примере диагональной модели Шарпа [8, 15] мы предприняли попытку продемонстрировать особенности моделирования в условиях гипотезы альтернативных ожиданий. Целью настоящего исследования является повышение статистической надежности и развитие аппарата математического моделирования рыночных процессов, используемого в обосновании инвестиционных решений. В качестве рабочей гипотезы исследования примем предположение о зависимости доходности портфеля фондовых активов от поведения каждого отдельного актива, их группового поведения на рынке, а также от несистематического влияния внешнего фактора различной интенсивности.

2. Постановка задачи

Введенные в [6] обозначения позволяют представить диагональную модель формирования оптимального портфеля в виде:

$$\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}_d\mathbf{w} \to \min$$
$$\begin{cases} \mathbf{w}'\boldsymbol{\alpha} = \mu, \\ \mathbf{w}'\mathbf{i} = 1, \\ \mathbf{w}'\boldsymbol{\beta} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Выбрав определенную величину ожидаемой доходности портфеля μ, можно решить полученную систему уравнений по методу множителей Лагранжа относительно весов фондовых активов в портфеле $\mathbf{w} = \{w_i\}_{1\times n}$.

В рассматриваемом случае функция Лагранжа имеет вид:

$$L(\mathbf{w},\lambda,\delta,\gamma) = \mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}_d\mathbf{w} + 2\lambda(\mathbf{w}'\boldsymbol{\alpha} - \mu) + 2\delta(\mathbf{w}'\mathbf{i} - 1) + 2\gamma\mathbf{w}'\boldsymbol{\beta} \to \min. \tag{2}$$

Необходимым условием экстремума данной функции является равенство нулю градиента $\nabla L(\mathbf{w},\lambda,\delta,\gamma) = 0$. Продифференцировав функцию Лагранжа по $\mathbf{w}$ и множителям Лагранжа и приравняв частные производные нулю, имеем систему:

$$\begin{cases} 2\mathbf{\Sigma}_d\mathbf{w} + 2\lambda\boldsymbol{\alpha} + 2\delta\mathbf{i} + 2\gamma\boldsymbol{\beta} = 0, \\ \mathbf{w}'\boldsymbol{\alpha} - \mu = 0, \\ \mathbf{w}'\mathbf{i} - 1 = 0, \\ \mathbf{w}'\boldsymbol{\beta} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

откуда нетрудно получить:

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Sigma}^{-1}(\lambda\boldsymbol{\alpha} + \delta\mathbf{i} + \gamma\boldsymbol{\beta}). \tag{4}$$

Подставив данное выражение в систему, получим систему трех уравнений относительно λ, δ, γ:

$$\begin{cases} \lambda\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{\Sigma}_d^{-1}\boldsymbol{\alpha} + \delta\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}_d^{-1}\boldsymbol{\alpha} + \gamma\boldsymbol{\beta}'\mathbf{\Sigma}_d^{-1}\boldsymbol{\alpha} = \mu, \\ \lambda\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}_d^{-1}\boldsymbol{\alpha} + \delta\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}_d^{-1}\mathbf{i} + \gamma\boldsymbol{\beta}'\mathbf{\Sigma}_d^{-1}\mathbf{i} = 1, \\ \lambda\boldsymbol{\beta}'\mathbf{\Sigma}_d^{-1}\boldsymbol{\alpha} + \delta\boldsymbol{\beta}'\mathbf{\Sigma}_d^{-1}\mathbf{i} + \gamma\boldsymbol{\beta}'\mathbf{\Sigma}_d^{-1}\boldsymbol{\beta} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Введем обозначения $A = \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{\Sigma}_d^{-1}\boldsymbol{\alpha}$, $B = \mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}_d^{-1}\mathbf{i}$, $C = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{\Sigma}_d^{-1}\boldsymbol{\beta}$, $D = \mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}_d^{-1}\boldsymbol{\alpha}$, $E = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{\Sigma}_d^{-1}\boldsymbol{\alpha}$, $F = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{\Sigma}_d^{-1}\mathbf{i}$ и запишем систему в виде:

$$\begin{cases} \lambda A + \delta D + \gamma E = \mu, \\ \lambda D + \delta B + \gamma F = 1, \\ \lambda E + \delta F + \gamma C = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Обычно она решается по методу Крамера. Полагая, что λ, δ, γ определены, нетрудно получить уравнение для расчета структуры оптимального портфеля с заданной доходностью μ. С учетом того, что

$$\mathbf{\Sigma}_d = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^2_{\varepsilon,n} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

обращается в

$$\mathbf{\Sigma}_d^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^{-2}_{\varepsilon,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^{-2}_{\varepsilon,n} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

запишем это уравнение в скалярном представлении как систему

$$\begin{cases} w_1 = \dfrac{\lambda\alpha_1 + \delta + \gamma\beta_1}{\sigma^2_{\varepsilon,1}}, \\ \ldots \\ w_n = \dfrac{\lambda\alpha_n + \delta + \gamma\beta_n}{\sigma^2_{\varepsilon,n}}, \\ w_{n+1} = \dfrac{\lambda \mathrm{E}\, r_I + \delta - \gamma}{\sigma^2_I}. \end{cases} \tag{9}$$

Возникает вполне очевидный вопрос, касающийся надежности получаемых решений, когда часть оцениваемых параметров не будет статистически значимой. Складывается впечатление, что неявно предполагается равная статистическая значимость параметров всех моделей, используемых для построения портфеля. Теоретически такая ситуация возможна, но на практике подобные случаи не встречаются. В рамках описания диагональной модели нет рекомендаций для этих нестандартных случаев. По сути, нет стопроцентной уверенности в корректном построении диагональной модели.

Целью настоящего исследования является разработка модификации диагональной модели формирования эффективного портфеля фондовых активов для описанного случая, нестандартного для теории, но обычного для практики.

3. Описание метода

А. Модель альтернативных ожиданий на фондовом рынке

Мы полагаем, что в основе моделирования в условиях альтернативных ожиданий лежит понятие риск-эффекта, e.g. [4]. Рассмотрим содержательную сторону риск-эффекта. В работах [5, 7] было показано, что гипотеза альтернативных ожиданий в ряде случаев позволяет повысить аппроксимационные и прогностические свойства эконометрических моделей. Используя эту гипотезу, исследователь получает возможность выделить в динамике процесса неслучайную составляющую, которая характеризует величину ожидаемого отклонения траектории процесса от детерминированного тренда. Такие отклонения обусловлены влиянием внешних факторов. Ввести их модель представляется затруднительным, т.к. они не носят систематического характера.

Для идентификации риск-эффекта в уравнение динамики моделируемого процесса

$$r_{Pt} = \alpha + \beta r_{It} + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1,T}, \tag{10}$$

вводится кусочно-непрерывная функция

$$x_{It} = x_I(\varepsilon_t) = \begin{cases} -1, \text{ когда } \varepsilon_t < 0, \\ +1, \text{ иначе,} \end{cases} \tag{11}$$

которая выступает в качестве индикатора альтернативных ожиданий.

Пусть дискретная случайная величина x_I принимает значение –1 с некоторой вероятностью p, а значение +1 – с вероятностью $q \equiv 1 - p$. В целом данные вероятности носят условный ситуативный характер и вычисляются для каждого момента времени t.

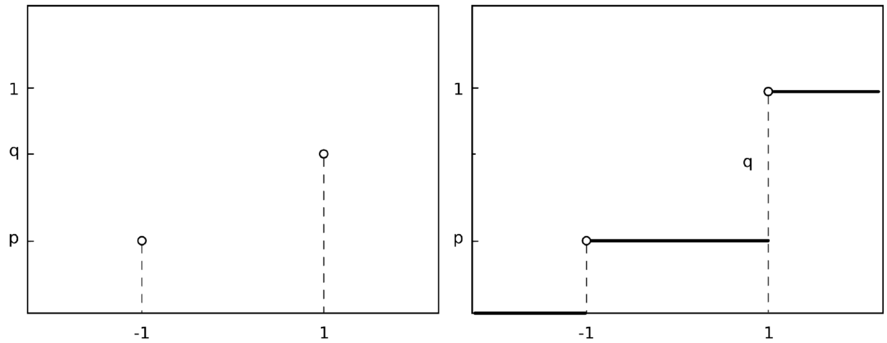

Рис. Функция вероятности (слева) и функция распределения (справа) величины x_I

Тогда первые два момента и дисперсия определены для нее в виде

$$\mathrm{E}x_I = 1 \times q - 1 \times p = 1 - 2p, \tag{12}$$

$$\mathrm{E}x_I^2 = 1^2 \times q + (-1)^2 \times p = 1, \tag{13}$$

$$\mathrm{D}x_I = \sigma_{x_I}^2 = 1 - (1 - 2p)^2 = 4pq. \tag{14}$$

С учетом сказанного доходность группового индекса некоторого конечного множества $n << N$ фондовых активов, будет описываться случайной величиной, значения которой определяются в соответствии с функцией $r_{Pt} = r_P(r_{It})$. В дальнейших рассуждениях будем полагать, что данная функция имеет вид:

$$r_{Pt} = \alpha + \beta r_{It} + dx_{It} + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1,T}, \tag{15}$$

где $\varepsilon \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Исходя из эмпирических результатов исследования [6], мы считаем, что формирование ряда доходностей группового индекса целесообразно осуществлять двумя способами: простым усреднением доходностей по группе рассматриваемых фондовых активов и вычислением первой главной компоненты [2-3].

Тогда случайная величина r_{ti}, описывающая доходность актива i, установившуюся на фондовом рынке к моменту времени t, определяется согласно функции от r_P, т.е. $r_{ti} = r_i\left(r_{Pt}\right)$

$$r_{ti} = \alpha_i + \beta_i r_{Pt} + \varepsilon_{ti}, \quad i = \overline{1,n}, \quad t = \overline{1,T} \qquad (16)$$

при условии $\varepsilon_i \sim iid\left(0, \sigma^2_{\varepsilon,i}\right)$.

Совместив (15) и (16), имеем выражение:

$$r_i = \alpha_i + \beta_i\left(\alpha + \beta r_I + dx_I + \varepsilon\right) + \varepsilon_i, \qquad (17)$$

описывающее механизм формирования доходности фондового актива с тремя случайными величинами x_I, ε и ε_i такими, что

$$\mathrm{E}\left(x_I\varepsilon\right) = 0,\ \mathrm{E}\left(x_I\varepsilon_i\right) = 0,\ \mathrm{E}\left(\varepsilon\varepsilon_i\right) = 0,\ i = \overline{1,n}. \qquad (18)$$

Они отражают групповой и индивидуальный специфические риски, подробнее в [6]. Величина x_I позволяет осуществить декомпозицию группового специфического риска на систематическую составляющую, реализующуюся под влиянием несистематического внешнего фактора различной интенсивности, и остаточную случайную составляющую, т.е. фактически детерминированную и случайную составляющие в структуре группового специфического риска.

Рассмотрим техническую сторону оценки величины риск-эффекта. В регрессионном анализе отклонения фактических значений показателя от предсказанных считаются случайными и не содержат информацию о моделируемом показателе. Практически всегда отклонению доходности актива или их группы от тренда можно найти причины, лежащие вне фондового рынка. С течением времени одни причины непременно сменяются другими. Для оценки величины риск-эффекта нам важно знать не природу этих причин, а интенсивность, с которой они воздействуют на доходность актива или их группы. В этом смысле причина теряет реальность своего содержания, превращаясь в абстрактный фактор, который может воздействовать на доходность актива с различной интенсивностью.

Для технической реализации вышесказанного мы будем полагать, что отклонения ε_t дискретно-непрерывной модели содержат информацию об интенсивности несистематического внешнего фактора.

Используя отображение $f : \varepsilon \to \delta$, мы предлагаем формировать инструментальную переменную для оценки интенсивности несистематического внешнего фактора

$$z_t = \delta_t + \zeta_t. \qquad (19)$$

Рассмотрим детали процедуры формирования инструментальной переменной. Преобразование $f:\varepsilon \to \delta$ обеспечивает отображение множества отклонений ε на множество случайных чисел, заключенных между 0 и 1. Равномерно распределенная случайная величина с небольшим диапазоном возможных значений ζ используется для частичной рандомизации, которая превращает функциональную связь между остатками ε и сформированным внешним фактором z в корреляционную.

Полученные значения переменной z мы будем использовать для оценки влияния внешнего фактора при объяснении скачкообразных изменений, идентифицируемых посредством индикатора альтернативных ожиданий x_I.

Формализацию связи внешнего фактора со скачкообразными изменениями в динамике доходности $g:z \to x_I$ удобно осуществлять, используя регрессионные модели с дискретной зависимой переменной. Мы рекомендуем применять логит-модель, с помощью которой рассчитываются вероятности того, что индикатор альтернативных ожиданий x_I примет одно из своих значений:

$$p = \mathrm{P}\left(x_I = -1 \mid z\right) = \left[1 + \exp\left(\mathbf{z}'\mathbf{b}\right)\right]^{-1}. \qquad (20)$$

Таким образом, доходность финансового актива, включаемого в портфель, описывается не одним уравнением, а системой:

$$\begin{cases} r_{ti} = \alpha_i + \beta_i r_{Pt} + \varepsilon_{ti}, \\ r_{Pt} = \alpha + \beta r_{It} + d x_{It} + \varepsilon, \\ p = \mathrm{P}\left(x_I = -1 \mid z\right) = \left[1 + \exp\left(\mathbf{z}'\mathbf{b}\right)\right]^{-1}. \end{cases} \qquad (21)$$

Б. Характеристики фондовых активов

Вычислим числовые характеристики величины r_i, необходимые для построения портфеля по диагональной модели. Математическое ожидание выражения (17) определяет ожидаемую доходность актива через ожидаемую доходность группы активов в составе портфеля:

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\, r_i = \alpha_i + \beta_i \,\mathrm{E}\, r_P = \\ &\alpha_i + \beta_i \left(\alpha + \beta \,\mathrm{E}\, r_I + d \,\mathrm{E}\, x_I\right) = \\ &\alpha_i + \beta_i \alpha + \beta_i \beta \,\mathrm{E}\, r_I + \beta_i d \,\mathrm{E}\, x_I. \end{aligned} \qquad (22)$$

Это уравнение можно представить в виде привычной зависимости

$$\mathrm{E}\, r_i = \underline{\alpha}_i + \underline{\beta}_i \,\mathrm{E}\, r_I, \qquad (23)$$

однако параметры $\underline{\alpha}_i = \alpha_i + \beta_i \alpha + \beta_i d \,\mathrm{E}\, x_I$ и $\underline{\beta}_i = \beta_i \beta$ будут наполнены новым содержательным смыслом. Доходность актива в среднем определяется ожидаемой доходностью рынка не напрямую, а опосредованно через ожидаемую доходность группы активов в составе портфеля, учитывающую групповой риск-эффект. Использование представления (23) в практических расчетах снимает проблему низкой надежности оценок параметра. Легко увидеть, что структура модели (23) не претерпит существенных изменений, если модель (16) оценивать без константы.

Используя свойства (12)-(14) и (18), легко видеть, что дисперсии и ковариация доходностей представимы соответственно в виде:

$$\sigma_i^2 = \mathrm{E}\left(r_i - \mathrm{E}\, r_i\right)^2 = \beta_i^2 \beta^2 \sigma_I^2 + \beta_i^2 \left(\sigma_\varepsilon^2 + d^2 \sigma_{x_I}^2\right) + \sigma_{i\varepsilon}^2 , \tag{24}$$

$$\sigma_{ij} = \mathrm{E}\left[\left(r_i - \mathrm{E}\, r_i\right)\left(r_j - \mathrm{E}\, r_j\right)\right] = \beta_i \beta_j \beta^2 \sigma_I^2 + \beta_i \beta_j \left(\sigma_\varepsilon^2 + d^2 \sigma_{x_I}^2\right). \tag{25}$$

Продолжая логику исследования [6], где дисперсия и ковариация включают возможную вариацию группы активов в составе портфеля, не обусловленную вариацией рынка, т.е. $\beta_i^2 \sigma_\varepsilon^2$, мы выделили часть этой вариации в групповой риск-эффект $\beta_i^2 d^2 \sigma_{x_I}^2$, характеризующий величину систематического отклонения доходности группового индекса от доходности рынка.

B. Характеристики портфеля фондовых активов

Вычислим математическое ожидание доходности портфеля

$$\begin{gathered}\mathrm{E}\, r_w = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i \,\mathrm{E}\, r_i = \\ \beta\, \mathrm{E}\, r_I \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i + \alpha \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i + d\, \mathrm{E}\, x_I \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i + \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i .\end{gathered} \tag{26}$$

Имеем, что ожидаемая доходность портфеля определяется в виде суммы четырех слагаемых, отражающих зависимость портфеля от (а) ожидаемой доходности рынка, (б) ожидаемой доходности группового индекса, скорректированной на (в) ожидаемый риск-эффект, и (г) ожидаемой доходности каждого актива.

С учетом (23) выражение (26) приведем к виду

$$\mathrm{E}\, r_w = \mathrm{E}\, r_I \sum_{i=1}^{n} w_i \underline{\beta}_i + \sum_{i=1}^{n} w_i \underline{\alpha}_i , \tag{27}$$

а также введя обозначения

$$w_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} w_i \underline{\beta}_i , \tag{28}$$

$$\underline{\alpha}_{n+1} = \mathrm{E}\, r_I \tag{29}$$

для сохранения структуры оригинального варианта диагональной модели, e.g. [6, 8], получим:

$$\mathrm{E}\, r_w = \sum_{i=1}^{n+1} w_i \underline{\alpha}_i . \tag{30}$$

Дисперсия портфеля, определяемая в общем виде, как

$$\begin{gathered}\sigma_w^2 = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \,\mathrm{E}\, r_i\right)^2 = \\ \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} ,\end{gathered} \tag{31}$$

с учетом преобразований (24) и (25) примет вид:

$$\sigma_w^2 = \beta^2 \sigma_I^2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i\right)^2 + \sigma_\varepsilon^2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i\right)^2 + d^2 \sigma_{x_I}^2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_{i\varepsilon}^2 . \tag{32}$$

Из записи следует, что риск портфеля включает: (а) риск рынка, (б) специфический риск группы активов, скорректированный на (в) дисперсию группового риск-эффекта, и (г) индивидуальный специфический риск активов в составе портфеля. Влияние рыночного и группового рисков на риск портфеля реализуется через механизм портфельной беты. Объединив их в

$$\left(\beta^2\sigma_I^2+\sigma_\varepsilon^2+d^2\sigma_{x_I}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}w_i\beta_i\right)^2,$$

будем интерпретировать полученное выражение как скорректированный рыночный риск с поправкой на групповой риск-эффект, учитываемый в портфельном риске. Соотношение скорректированного таким образом риска и рыночного риска определяется величиной коэффициента β.

Введя новое обозначение

$$\sigma_{n+1}^2=\beta^2\sigma_I^2+\sigma_\varepsilon^2+d\sigma_{x_I}^2, \tag{15}$$

запишем дисперсию портфеля следующим образом:

$$\sigma_w^2=\sum_{i=1}^{n+1}w_i\sigma_i^2. \tag{16}$$

Индивидуальный специфический риск имманентен конкретному активу и зависит в среднем от отклонений доходности актива от доходности группового индекса. Кроме индивидуального специфического риска в модели учитывается групповой специфический риск, характеризующий возможные отклонения ожидаемой доходности группового индекса от доходности рынка. В структуре группового специфического риска, используемого для корректировки воздействия рыночного риска на портфельный риск, мы выделили детерминированную и случайную составляющие. Детерминированная составляющая оценивается с помощью риск-эффекта. В свою очередь, оставшаяся после выделения риск-эффекта часть группового специфического риска является случайной.

Все характеристики портфеля, необходимые для его представления математической моделью, получены. Нам удалось сохранить структуру диагональной модели без изменений. Что касается содержательного смысла всех ее характеристик, то он, напротив, претерпел существенные изменения.

Г. Модификация диагональной модели

Необходимая для записи математической модели стандартизация обеспечивается следующими обозначениями:

$$\mathbf{w}=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\\ w_{n+1}\end{pmatrix},\quad \underline{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{pmatrix}\underline{\alpha}_1\\ \vdots\\ \underline{\alpha}_n\\ \underline{\alpha}_{n+1}\end{pmatrix},\quad \mathbf{i}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \underline{\boldsymbol{\beta}}=\begin{pmatrix}\underline{\beta}_1\\ \vdots\\ \underline{\beta}_n\\ -1\end{pmatrix}.$$

С учетом введенных обозначений диагональная модель формирования оптимального портфеля в условиях гипотезы альтернативных ожиданий записывается аналогично оригинальной диагональной модели:

$$\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}_d\mathbf{w} \to \min$$
$$\begin{cases} \mathbf{w}'\underline{\boldsymbol{\alpha}} = \mu, \\ \mathbf{w}'\mathbf{i} = 1, \\ \mathbf{w}'\underline{\boldsymbol{\beta}} = 0, \end{cases} \tag{17}$$

где $\mathbf{\Sigma}_d$ – диагональная матрица индивидуальных специфических рисков и скорректированного рыночного риска с поправкой на групповой риск-эффект; μ – уровень доходности, который инвестор ожидает получить от формируемого портфеля.

Обычно оптимальное решение этой задачи получают с помощью множителей Лагранжа.

4. Обсуждение результатов эмпирического части исследования

Рабочая гипотеза исследования может быть отвергнута в случае несостоятельности предложенных в третьем разделе механизмов формирования доходности и риска портфеля. Однако результаты эмпирической части исследования, представленные ниже, их не опровергли.

Таблица 1

Составы портфелей для формирования группового индекса

Тикер	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
GAZP									x	x
VTBR	x	x	x	x			x	x	x	x
SIBN									x	
GMKN	x	x	x	x	x					
LKOH										
MTLR	x	x	x	x	x	x		x	x	x
MAGN	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
NLMK	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ROSN		x	x	x	x	x	x			
RTKM			x	x	x	x	x	x	x	
RTKMP									x	x
SBER	x		x		x	x	x	x		x
SBERP	x	x								
SNGS	x	x				x	x	x		x
SNGSP				x	x	x	x	x		x

В роли входных данных использовались временные ряды дневных доходностей высоколиквидных акций некоторых отечественных компаний: Газпром (GAZP), ВТБ (VTBR), Газпромнефть (SIBN), ГМК Норникель (GMKN), Лукойл (LKOH), Мечел (MTLR), ММК (MAGN), НЛМК (NLMK), Роснефть (ROSN), Ростелеком (RTKM и RTKMP), Сбербанк (SBER и SBERP), Сургутнефтегаз (SNGS и SNGSP), а также индекса РТС за период с 04.01.2012 г. по 27.12.2013 г. Из представленной выборки, включающей 15 акций, мы формировали 10 различных по составу групп акций (см. табл. 1).

Рассмотрим результаты моделирования портфельных решений по диагональной модели в условиях (а) рациональных ожиданий, т.е. по оригинальной диагональной модели, (б) альтернативных ожиданий. В табл. 2 приведены характеристики 30 сформированных портфелей. В большинстве портфелей присутствуют короткие позиции, доля отводимого под них заемного капитала незначительна. В связи с этим можно говорить о том, что показатель средней доходности портфелей на поступреждающем периоде не является завышенным. Из приведенной таблицы легко увидеть, что портфели, полученные для условий альтернативных ожиданий, в среднем более доходны, нежели портфели, определенные по оригинальной диагональной модели.

Таблица 2

Характеристики портфелей на поступреждающем периоде

Группа	Рациональные ожидания		Альтернативные ожидания (компонентный метод)		Альтернативные ожидания (метод усреднения)	
	оценка риска	средняя доходность	оценка риска	средняя доходность	оценка риска	средняя доходность
I	1,235	0,128	1,066	0,250	1,078	0,345
II	1,226	0,183	0,965	0,243	0,974	0,330
III	1,272	0,293	0,974	0,370	0,969	0,476
IV	1,031	0,333	0,947	0,352	0,964	0,460
V	1,053	0,090	0,949	0,273	0,966	0,437
VI	1,164	0,365	1,213	0,483	1,318	0,678
VII	1,174	0,596	1,318	0,850	1,369	1,088
VIII	1,315	0,569	1,603	0,281	1,677	0,699
IX	1,020	0,445	1,129	-0,061	1,272	-0,089
X	1,158	0,410	1,306	-0,060	1,290	0,258

Имеет смысл детально рассмотреть построение портфеля для акций группы I. В табл. 3 и табл. 4 приведены результаты эконометрического оценивания индивидуальных и групповых параметров, используемых при работе с диагональной моделью. В обоих случаях оценки свободных членов (α_i и α) оказались статистически незначимыми. Эта ситуация является весьма показательной и не выбиралась специальным образом. С учетом идей, изложенных в предыдущем разделе, и статистической значимости оценок остальных параметров она не является критичной.

Таблица 3

Индивидуальные оценки параметров диагональных моделей (группа I)

Рациональные ожидания		Альтернативные ожидания (компонентный метод)		Альтернативные ожидания (метод усреднения)	
α_i	β_i	α_i	β_i	α_i	β_i
-0,152	1,026***	-0,119	1,026***	-0,123	1,122***
-0,085	0,416***	-0,072	0,430***	-0,076	0,493***
-0,108	1,241***	-0,081	1,410***	-0,082	1,474***
-0,092	0,797***	-0,071	0,864***	-0,074	0,940***
0,020	1,094***	0,052	1,138***	0,048	1,231***
0,084	0,903***	0,118	0,831***	0,114	0,920***
0,102	0,917***	0,129	0,946***	0,125	1,047***
0,046	0,725***	0,071	0,707***	0,068	0,773***

Таблица 4

Групповые оценки параметров диагональных моделей (группа I)

Метод вычисления доходности группового индекса	α	β	d
Компонентный метод	-0,027	0,958***	-
	-0,022	0,983***	0,602***
Метод усреднения	-0,023	0,890***	-
	0,040	0,924***	0,537***

Опыт эконометрического моделирования подсказывает, что использование недостаточно статистически надежных оценок параметров в практических расчетах, как правило, приводит к получению смещенных оценок моделируемого показателя. В соответствии с разрабатываемым в настоящем исследовании подходом модели следует переоценить, исключив статистически незначимые константы. В связи с тем, что оценка величины группового риск-эффекта d, участвующая в роли корректирующего слагаемого при вычислении значений α_i, как правило, оказывается статистически значимой, диагональная модель не потеряет своих свойств и сохранит оригинальную структуру.

Трудность в реализации представленной техники все же может возникнуть в ситуациях недостаточной надежности оценок свободных членов в моделях индивидуальной и групповой динамики и максимального уровня энтропии на рынке, т.е. когда $p = q = 0,5$. Этот случай сочетания достаточно редких событий требует дополнительных исследований.

5. Заключение

В соответствии с поставленной целью в ходе исследования был решен ряд теоретических и практических задач.

Обоснована необходимость моделирования рыночного процесса в условиях гипотезы альтернативных ожиданий. Для формального описания процесса формирования доходности фондового актива предложена система уравнений, позволяющая учесть влияние систематических и несистематических факторов. Такое уточнение стало возможным благодаря применению аппарата эконометрического моделирования. Для условий данной гипотезы получены основные числовые характеристики доходности фондовых активов.

В исследовании обосновано включение в механизм формирования доходности фондового актива трех независимых случайных величин, отражающих групповую и индивидуальную динамику. Благодаря данным величинам предложена декомпозиция группового специфического риска на систематическую составляющую, реализующуюся под влиянием несистематического внешнего фактора различной интенсивности, и остаточную случайную составляющую.

Предлагаемый механизм формирования доходности портфеля направлен на решение двух задач. Первая задача – содержательная; она состоит в повышении точности модельного представления риска портфеля с учетом сложности природы его формирования. Вторая задача скорее носит технический характер. Дело в том, что в ряде работ исследователи сталкивались с проблемой недостаточной надежности оценок некоторых параметров диагональной модели, в частности, речь идет о низкой надежности свободного члена в уравнении, описывающем зависимость динамики доходности отдельного фондового актива от динамики доходности рынка. Мы полагаем, что успешное решение двух этих задач дает возможность получать более точные оценки риска в практических расчетах, а также повысить надежность инвестиционных решений. Приведенные в четвертом разделе настоящей статьи результаты эмпирической части исследования этого не опровергли.

Таким образом, нам удалось сохранить структуру диагональной модели при наполнении новым содержательным смыслом ее параметров.

Список источников

1. Бахолдин С.В., Коротких В.В. Одношаговая адаптивная модель портфельного инвестирования У. Шарпа. *Современная экономика: проблемы и решения*, 2012, no. 1 (25), с. 136-145.
2. Давнис В.В., Касаткин С.Е., Ардаков А.А. Главные компоненты и их применение в моделях портфельного инвестирования. *Современная экономика: проблемы и решения*, 2012, no. 7 (31), с. 120-128.
3. Давнис В.В., Касаткин С.Е., Ардаков А.А. Однокомпонентная модель портфельного инвестирования. *Современная экономика: проблемы и решения*, 2012, no. 5 (29), с. 150-158.
4. Давнис В.В., Касаткин С.Е., Ратушная Е.А. Модифицированный вариант модели Шарпа, его свойства и стратегии управления инвестиционным портфелем. *Современная экономика: проблемы и решения*, 2010, no. 9 (8), с. 135-146.
5. Давнис В.В., Кирьянчук В.Е., Коротких В.В. Эконометрическое моделирование рейтинговых оценок инвестиционной привлекательности территориальных таксонов. *Современная экономика: проблемы и решения*, 2011, no. 10 (22), с. 144-158.
6. Давнис В.В., Коротких В.В. Уточнение детерминант рыночного риска в диагональной модели Шарпа. *Современная экономика: проблемы и решения*, 2014, no. 3 (51), с. 8-19.
7. Давнис В.В., Коротких В.В. Эконометрические варианты модели (B,S,I)-рынка. *Современная экономика: проблемы и решения*, 2013, no. 10 (46), с. 154-165.
8. Давнис В.В., Рахметова Р.У., Коротких В.В. *Математические основы финансовых вычислений*. Воронеж, ЦНТИ, 2013. 185 с.
9. Cagan P. T*he Monetary Dynamics of Hyperinflation*, in Friedman M. (ed.), Studies in the Quantity Theory of Money. Chicago, University of Chicago Press, 1956, pp. 25-117.
10. Fisher I. *The Purchasing Power of Money, Its Determination and Relation to Credit, Interest and Cycles*. New York, The Macmillan Co., 1912. 505 p.
11. Lovell M. Tests of the Rational Expectations Hypothesis. *American Economics Review*, 1986, vol. 76, no. 1, pp. 110-124.
12. Milton F. *Theory of the Consumption Functio*n. Oxford, Oxford & IBH Publishing Company, 1957. 259 p.
13. Muth J.F. Rational Expectations and the Theory of Price Movements. *Econometrica*, 1961, vol. 29, no. 3, pp. 315-335.
14. Sargent T.J. Rational expectations. *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, 1987, vol. 4, pp. 76-79.
15. Sharpe W.F. A Simplified Model of Portfolio Choice. *Management Science*, 1963, vol. 9, no. 2, pp. 277-293.

ALTERNATIVE EXPECTATIONS MODEL AND ITS APPLICATION IN PORTFOLIO ANALYSIS

Davnis Valery Vladimirovich, Dr. Sc. (Econ.), Full Prof.
Korotkikh Viacheslav Vladimirovich, graduate student

Voronezh State University, University sq., 1, Voronezh, Russia, 394006; e-mail: vdavnis@mail.ru; v.v.korotkikh@gmail.com

Purpose: Statistical reliability improvement and development of the apparatus of the mathematical market simulation used in the process of investment decisions verification. *Discussion*: The authors suggest clarification of nature and mechanism of the market profitability generation under the conditions of the alternative expectations hypothesis. The emphasis is put on the development of technique of group specific risk decomposition on systematic component, occurred under the influence of non-systematic external factor, and residual random variable. The techniques of non-systematic external factor simulation using instrumental variables are considered. *Results*: The authors have suggested the system of equations describing dynamics of security profitability. This system allows to take into account both systematic linear factors (market dynamics, dynamics of assets groups) and non-systematic nonlinear. There are provided schematic derivation of necessary formulas and their conceptual interpretation. The technique of effective portfolio creation using diagonal model under the conditions of nonsufficient statistical reliability of parameters is considered in the empirical part of the study.

Keywords: alternative expectations, validity, instrumental variable.

References

1. Bakholdin S.V., Korotkikh V.V. Odnoshagovaia adaptivnaia model' portfel'nogo investirovaniia U. Sharpa [Single-stage Adaptive W. Sharpe Portfolio Model]. *Sovremennaia ekonomika: problemy i resheniia*, 2012, no. 1 (25), pp. 136-145. (In Russ.)
2. Davnis V.V., Kasatkin S.E., Ardakov A.A. Glavnye komponenty i ikh primenenie v modeliakh portfel'nogo investirovaniia [Principal Components Application in Security Portfolio Models]. *Sovremennaia ekonomika: problemy i resheniia*, 2012, no. 7 (31), pp. 120-128. (In Russ.)
3. Davnis V.V., Kasatkin S.E., Ardakov A.A. Odnokomponentnaia model' portfel'nogo investirovaniia [Single Component Model of Portfolio Investment]. *Sovremennaia ekonomika: problemy i resheniia*, 2012, no. 5 (29), pp. 150-158. (In Russ.)
4. Davnis V.V., Kasatkin S.E., Ratushnaia E.A. Modifitsirovannyi variant modeli Sharpa, ego svoistva i strategii upravleniia investitsionnym portfelem [Modified Version of Sharpe's Model, its Properties and Investment Portfolio Management Strategy]. *Sovremennaia ekonomika: problemy i resheniia*, 2010, no. 9 (8), pp. 135-146. (In Russ.)
5. Davnis V.V., Kiryanchuk V.Ye., Korotkikh V.V. Ekonometricheskoe modelirovanie reitingovykh otsenok investitsionnoi

privlekatel'nosti territorial'nykh taksonov [Econometric Model-building of Territorial Taxons Investment Attractiveness Rating]. *Sovremennaia ekonomika: problemy i resheniia*, 2011, no. 10 (22), pp. 144-158.

6. Davnis V.V., Korotkikh V.V. Utochnenie determinant rynochnogo riska v diagonal'noi modeli Sharpa [Improving Market Risk Estimation in Diagonal model of Sharpe]. *Sovremennaia ekonomika: problemy i resheniia*, 2014, no. 3 (51), pp. 8-19.

7. Davnis V.V., Korotkikh V.V. Ekonometricheskie varianty modeli (B,S,I)-rynka [Econometric Options of the (B,S,I)-market Models]. *Sovremennaia ekonomika: problemy i resheniia*, 2013, no. 10 (46), pp. 154-165.

8. Davnis V.V., Rakhmetova R.U., Korotkikh V.V. *Matematicheskie osnovy finansovykh vychislenii* [Mathematical Foundations of Financial Calculations]. Voronezh, CSTI, 2013. 185 p. (In Russ.)

9. Cagan P. *The Monetary Dynamics of Hyperinflation*, in Friedman M. (ed.), Studies in the Quantity Theory of Money. Chicago, University of Chicago Press, 1956, pp. 25-117.

10. Fisher I. *The Purchasing Power of Money, Its Determination and Relation to Credit, Interest and Cycles*. New York, The Macmillan Co., 1912. 505 p.

11. Lovell M. Tests of the Rational Expectations Hypothesis. *American Economics Review*, 1986, vol. 76, no. 1, pp. 110-124.

12. Milton F. *Theory of the Consumption Function*. Oxford, Oxford & IBH Publishing Company, 1957. 259 p.

13. Muth J.F. Rational Expectations and the Theory of Price Movements. *Econometrica*, 1961, vol. 29, no. 3, pp. 315-335.

14. Sargent T.J. Rational expectations. *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, 1987, vol. 4, pp. 76-79.

15. Sharpe W.F. A Simplified Model of Portfolio Choice. *Management Science*, 1963, vol. 9, no. 2, pp. 277-293.