УДК 336.717

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ПРОЕКТОВ

Артеменко Ольга Андреевна, асп.

Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, ул. Зацепа, 43, Москва, Россия, 115054; e-mail: o.a.artemenko@gmail.com

В статье рассматриваются модели формирования оптимального портфеля проектов в условиях неопределенности и ограниченных финансовых ресурсов. Предложен подход для определения оптимального размера займа, привлекаемого для инвестирования проектов и определения максимальной процентной ставки, при которой кредитование выгодно. Рассмотрена модель формирования портфеля проектов в условиях неопределенности: для случая, когда возможно выделить несколько сценариев развития, каждый из которых характеризуется определенной вероятностью и значением NPV отдельного проекта. В задаче нахождения оптимальной структуры проектов портфеля доказано существование области устойчивости полученного решения при определенных изменениях начальных параметров и приведен алгоритм вычисления данной области.

Представленные оптимизационные модели позволяют принимать обоснованные инвестиционные решения при формировании портфеля проектов, учитывая специфику исходных данных.

Ключевые слова: портфель проектов, заемные средства, анализ устойчивости, неопределенность.

Основные особенности формирования моделей управления портфелем проектов

Проектная деятельность играет все более важную роль в функционировании современных компаний. Классифицируются и уточняются базовые концепции и методы системного управления проектами, интегрируются новые идеи и подходы в имеющуюся методологию портфельного управления.

Под управлением проектом подразумевается управленческая деятельность, направленная на достижение целей проекта с требуемым качеством, в рамках бюджета, в установленные сроки, при существующих ограничениях и неопределенности [3, с. 27]. Формирование портфеля проектов можно представить как динамический процесс по оценке, отбору и приоритезации проектов, в ходе которого может быть принято решение об эскалации проекта, выхода из проекта или снижении его приоритета. Вместе с этим управление проектами связано с распределением и перераспределением ресурсов между активными проектами. Формирование портфеля проектов происходит в условиях неполной и меняющейся информации, а также характеризуется многокритериальностью и взаимозависимостью проектов, входящих в портфель [7].

Приведенные определения отражают тот существенный факт, что финансовые ограничения и наличие неопределенности играют существенную роль в деятельности по управлению проектами, поэтому им уделено основное внимание в данной работе.

В статье рассматриваются модели формирования оптимального портфеля проектов с учетом бюджетных ограничений. На практике при планировании инвестиций одновременно в несколько проектов их часто анализируют по отдельности, а затем ранжируют, используя такие широко известные показатели, как чистый дисконтированный доход (NPV), период окупаемости, внутренняя норма доходности и т.д. Однако исследования [4] и [5] указывают, что такого рода списки приоритетных проектов, построенные на достаточно простом механизме ранжирования, уступают в эффективности распределения финансовых ресурсов оптимизационным моделям. Сравнительный анализ двух данных подходов к формированию портфеля проектов приведен в работе [6]. В предложенных в данной статье моделях критерием оптимизации является максимизация суммарного NPV портфеля. Показатель NPV выбран как самый широко используемый при принятии бизнес-решений и ясно отражающий стоимость финансовых ресурсов во времени. Как отмечают экономисты [Klammer, 1991], NPV – самый часто используемый показатель (в 80% случаев использовался при принятии решений по новым операциям и в 60% случаев – при пересмотре решений) в бюджетировании и принятии решений в финансовой сфере. Зачастую формирование портфеля проектов связано с существенным вложением средств, что невозможно без привлечения кредитов, аппарат оптимизационных моделей, как будет показано далее, позволяет учесть использование заемного капитала и вычислить основные кредитные параметры. Также в следующих разделах приведен подход к формированию оптимального портфеля проектов для случая, когда точные прогнозные значения NPV проектов, ввиду недостаточной информации, неизвестны исследователям.

Модели портфельных инвестиций

Детерминированная модель портфельных инвестиций

Рассмотрим задачу оптимизации портфеля проектов для ситуации, когда известны объемы капиталовложений в периоды времени $t=1,2,\ldots,T$ для каждого проекта i $(i=1,2,\ldots,n)$ Z_i^t и объемы имеющихся инвестиционных ресурсов для каждого периода времени t. Обозначим эти объемы через S_t. Известны также значения NPV для каждого проекта i $(i=1,2,\ldots,n)$. Необходимо выбрать объем финансирования x_i $(0 \le x_i \le 1)$ по каждому проекту таким образом, чтобы максимизировать суммарное значение NPV по всем проектам в условиях того, что нельзя повысить объемы инвестиций S_t на каждом временном периоде t $(t=1,2,...,T)$. Иными словами, необходимо максимизировать следующую функцию:

$$\sum_{i=1}^{n} NPV_i x_i \to \max. \tag{1}$$

При ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^t x_i \le S_t;\ t=1,2,...,T, \tag{2}$$

$$0 \le x_i \le 1;\ i=1,2,...,n. \tag{3}$$

Если дробление проектов невозможно, т.е. проект обязательно должен финансироваться полностью, последнее ограничение в задаче меняется на следующее:

$$x_i \in \{0,1\},\ i=1,2,...,n.$$

Детерминированная модель портфельных инвестиций с учетом привлечения заемного капитала

Предположим, что в условиях вышеизложенной задачи оптимизации портфеля проектов инвестор может привлечь заемный капитал, максимальный размер которого, доступный для предприятия равен K. Рассмотрим привлечение кредита как дополнительный проект, для которого также известно значение NPV.

$$\sum_{i=1}^{n} NPV_i x_i + NPV_k x_k \to \max. \tag{4}$$

При ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^t x_i \le S_t + Kx_k;\ t=1,2,...,T, \tag{5}$$

$$0 \le x_i \le 1;\ i=1,2,...,n,\ k. \tag{6}$$

При решении данной задачи мы можем столкнуться со следующей ситуацией: NPV проекта «кредит» является отрицательной величиной, но тем не менее привлекать заемные средства выгодно, и данный проект включается в портфель. Рассмотрим, при каких условиях привлечение кредита является эффективным. Очевидно, что дополнительный доход от привлечения заемных средств должен быть больше или равен дополнительных затрат, связанных с привлечением заемных средств. Согласно теореме двойственности при увеличении на Δ количество i-го ресурса, целевая функция увеличивается на Δu_i, где u_i – двойственная оценка ресурса и $u_i = \frac{\partial f(x)}{\partial S_i}$, где $f(x)$ – целевая функция модели оптимизации портфеля проектов, а S_i – количественная оценка ресурса, в нашем случае – доступные для инвестирования материальные средства предприятия. Обобщая вышесказанное, сделаем вывод, что привлечение кредита целесообразно, если выполнется условие $\Delta \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial S_i} \le B$, где B – сумма процентных выплат по кредиту и комиссия за его привлечение.

Немаловажным также является соотношение процентной ставки по кредиту и нормы дисконтирования для расчета NPV, выбранной на предприятии. Привлечение кредита является выгодным в случае, если годовая норма доходности по кредиту превышает ставку процента по кредиту. Приведем доказательство. Пусть K – сумма кредита, K_t – задолженность на конец года t, причем $K_T = 0$. Проценты по кредиту уплачиваются в начале каждого года, начиная с первого в размере dK_{t-1}, а также ежегодно погашается основной долг в размере $K_{t-1} - K_t$. Тогда NPV проекта «кредит» равен

$$K - \sum_{t=1}^{T} \frac{K_{t-1} - K_t + dK_{t-1}}{(1+d)^t} = K - \sum_{t=1}^{T} \frac{K_{t-1}}{(1+d)^{t-1}} + \sum_{t=1}^{T} \frac{K_t}{(1+d)^t} = K - \frac{K}{(1+d)^0} + \frac{K_T}{(1+d)^T} = 0.$$

Т.е. при равенстве реальной ставки процента и нормы дисконта, NPV проекта не изменится от дополнительного включения финансовых потоков в операционную деятельность. Напротив, если реальная ставка процента меньше нормы дисконта – привлечение кредита выгодно.

Рассмотрим задачу нахождения максимальной процентной ставки по кредиту r, при которой его привлечение является эффективным. Для этого необходимо сначала получить решение задачи (1)-(3) без учета кредита, а далее решить следующую оптимизационную задачу:

$$Max\ r, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} NPV_i x_i + NPV_k x_k \to \max. \tag{8}$$

При ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^t x_i \le S_t + Kx_k;\ t=1,2,\dots,T, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} NPV_i x^*_i \le \sum_{i=1}^{n} NPV_i x_i + (K - \sum_{t=1}^{T} \frac{K_{t-1} - K_t + dK_{t-1}}{(1+d)^t}) x_k, \tag{10}$$

$$0 \le x_i \le 1;\ i=1,2,\dots,n,\ k. \tag{11}$$

Здесь x^*_i, – это решение задачи оптимизации портфеля проектов в условиях, когда кредит для их финансирования не привлекается; r – процентная ставка по кредиту. Решая представленную выше оптимизационную задачу (7)-(11) относительно величины r, определим максимальное значение процентной ставки по кредиту, при которой кредитование проектов обоснованно (r^*). Таким образом, если ставка кредитования $r \in [0, r^*]$, то кредит для реализации портфеля проектов привлекать целесообразно.

Детерминированная модель портфельных инвестиций с учетом привлечения заемного капитала и элементами финансового планирования.

Целью финансового планирования на предприятии является определение необходимой величины займа для финансовой реализуемости проекта [1, с. 797]. При этом необходимо учитывать следующие требования:

- Размер привлекаемого кредита минимален.
- Кредит привлекается и возвращается в таких объемах, при которых сумма денежных оттоков в каждом периоде неотрицательна до полного погашения займа.
- Погашение суммы основного долга осуществляется максимально большими частями.
- Необходимые денежные резервы включены в потоки от операционной деятельности.

Рассмотрим следующую оптимизационную модель портфельных инвестиций. За горизонт планирования примем условное время $[0,T]$, которое разбито на периоды. Здесь привлечение кредита не выделяется в отдельный проект, а учитывается в системе ограничений. Кредит привлекается в нулевом периоде. Проценты по займу в некотором периоде равны долгу на начало этого периода, умноженному на процентную ставку. Обозначим C_i^t – поток денежных средств по проекту i в момент t. В качестве ограничений модели будем рассматривать следующее соотношение по каждому периоду: отток денежных средств по проекту совместно с оттоком денежных средств по кредиту не должен превышать имеющиеся у предприятия средства в данном периоде. Поэтому в случае если величина C_i^t в каком-либо периоде положительна, в систему ограничений она входит со знаком минус. Введем также переменные d_t (t=1,2,…,T), с помощью которых определим, в каких объемах будут возвращаться суммы основного долга в каждом периоде. Также известны значения S_t (t=0,1,…,T) – суммы имеющихся у предприятия собственных средств в каждом периоде планирования. Чтобы ввести в модель возможность реинвестирования свободных средств (неистраченную часть капитала), в каждом периоде обозначим через F_t (t=0,..,T-1) – суммы, переходящие из момента t в $t+1$, которые можно инвестировать под процент d.

$$\sum_{i}^{N} NPV_i x_i \to \max . \tag{12}$$

При ограничениях:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} Z_i^t x_i \le \sum_{t=1}^{T} S_t + \mathrm{V}. \tag{13}$$

Здесь в левой части неравенства – суммарные затраты, связанные с реализацией набора проектов, а $\sum_{t=1}^{T} S_t$ – суммарный объем имеющихся собственных средств предприятия.

Распишем соотношения для финансовых потоков в каждом моменте периода планирования.

$$\sum_{i=1}^{N} C^t{}_i x_i + F_0 = S_0 + V \text{, } t=0, \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{N} C^t{}_i x_i + d_1 V + rV + F_1 = S_1 + (1+d)F_0 \text{, t=1.} \tag{15}$$

Здесь d_1V – сумма основного долга к погашению, rV – сумма процентов, начисленных на остаток долга на начало периода.

$$\sum_{i=1}^{N} C^t{}_i x_i + d_2V + r(V - d_1V) + F_2 = S_2 + (1+d)F_1,\ t=2, \tag{16}$$

....

$$\sum_{i=1}^{N} C^t{}_i x_i + d_TV + r(V - V\sum_{t=1}^{T-1} d_t)S_T \ + F_T = S_T,\ t=T, \tag{17}$$

$$\sum_{t=1}^{T} d_t = 1, \tag{18}$$

$$0 \le x_i \le 1;\ i=1,2,...,n. \tag{19}$$

Модель портфельных инвестиций с учетом неопределенности и риска.

Рассмотрим ситуацию, когда чистый интегральный доход проекта i есть величина случайная, т.е. имеет вероятностное распределение, задаваемое либо на основе экспертных оценок, либо на основе накопленной статистики. Таким образом, NPV_i может принимать значения $NPV_i^1, NPV_i^2, ..., NPV_i^m$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_m$. Во многих случаях NPV проекта может быть задано как случайная величина с известным законом распределения.

В этом случае может быть определено математическое ожидание NPV_i по следующей формуле:

$$\overline{NPV_i} = \sum_{j=1}^{m} NPV_i^j p_j \ .$$

Риск портфеля проектов, согласно теории Марковица, определим как дисперсию портфеля по следующей формуле:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} \mathrm{cov}_j \ x_i x_j, \tag{20}$$

где x_i – доля инвестиций, выделяемых на проект с номером i.

Таким образом, эффективность портфеля проектов может быть оценена математическим ожиданием NPV портфеля, рассчитываемым по формуле:

$$\overline{NPV} = \sum_{i=1}^{n} \overline{NPV_i} \cdot x_i, \tag{21}$$

и риском портфеля, определяемым по формуле (20).

Если в качестве главного критерия выбрать риск проекта, то оптимизационная задача на минимум риска с учетом ограничений на доходность формулируется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} \mathrm{cov}_j \ x_i x_j \to \min, \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{NPV_i}\tilde{x}_i \ge NPV_{2p}\ . \tag{23}$$

Здесь $\tilde{x}_i$ – доля проекта i, для которого выделено финансирование. В том случае, если инвестиции осуществляются только в момент времени t=1 и доля финансирования i-го проекта $\widetilde{x}_i$, ограничение по ресурсам выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^1 \widetilde{x}_i \le C_1 . \tag{24}$$

Разделим обе части неравенства (24) на C_1 и обозначим:

$$X_i = \frac{Z_i^1 \widetilde{x}_i}{C_1} . \tag{25}$$

В этом случае неравенство (24) выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \le 1 ; \; X_i \ge 0. \tag{26}$$

В ситуации, если инвестиции для реализации проекта необходимы на каждом временном интервале реализации проекта t=1,2,…,T, вместо неравенства (24) используется следующая система неравенств, ограничивающая объем финансирования:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^t \cdot \widetilde{x}_i \le C_t , \; t=1,2,\ldots,T. \tag{27}$$

Суммируя левую и правую части неравенства (27) по индексу t, получим:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} Z_i^t \widetilde{x}_i \le \sum_{t=1}^{T} C_t . \tag{28}$$

Поделив обе части неравенства (28) на $\sum_{t=1}^{T} C_t$ и обозначив:

$$X_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} Z_i^t \widetilde{x}_i}{\sum_{t=1}^{T} C_t} , \tag{29}$$

получим с учетом (28) следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \le 1 ; \; X_i \ge 0. \tag{30}$$

Таким образом, если необходимо определить портфель проектов, минимизирующих риск при ограничениях на его доходность, необходимо решить оптимизационную задачу (22), (23), (27), (30), (29).

Аналогично может быть сформулирована задача на максимум математического ожидания $\overline{NPV}$ портфеля проектов с ограничениями на риск.

Анализ устойчивости оптимального портфеля проектов.

При использовании полученного решения задачи лицо, принимающее решение (ЛПР), должно учесть неточность исходных данных модели, которая приводит к необходимости дополнительного исследования влияния изменений в исходных параметрах на полученное решение. Исследование связано с вычислением максимально возможного уменьшения (увеличения) значения одного или группы входных параметров задачи (1) – (3), при котором либо остаются неизменными значения x_i (назовем их вектором X, задающим решение задачи (1) – (3)), либо несущественно меняется значение (1) целевой функции оптимального варианта портфеля проектов [3, с. 15-18].

Рассмотрим влияние на решение задачи (1) – (3) изменение NPV проектов. Для анализа введем следующие определения.

Определение 1. Задача (1) – (3) устойчива по функционалу при изменении NPV проектов, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при увеличении NPV проектов не более чем на ε значение функционала (1) изменится не более чем на заданное δ.

Определение 2. Задача (1) – (3) устойчива по решению при изменении цены изделий, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при увеличении NPV проектов не более чем на ε решение задачи сохраняется.

Из данных определений вытекает, что устойчивость исходной задачи по функционалу отражает незначительные изменения в функции при малых изменениях в значении отдельных NPV . При этом состав портфеля в оптимальном варианте может значительно измениться по сравнению с первоначальным.

Устойчивость по решению характеризует стабильность состава портфеля проектов при локальном увеличении их значений NPV.

Сформулируем достаточное условие устойчивости задачи (1) – (3) по решению.

Утверждение 1.

Достаточным условием устойчивости задачи (1) – (3) по решению является единственность решения этой задачи.

Доказательство. Пусть решение задачи (1) – (3) единственно. Обозначим через $\overline{X}^1$ отличное от оптимального допустимое решение задачи, на котором реализуется минимум выражения $F(\overline{X}_{opt}) - F(\overline{X}^1)$, где $F(\overline{X}_{opt})$ – значение функционала (1) для оптимального портфеля; $F(\overline{X}^1)$ – значение функционала (1) для допустимого решения $\overline{X}^1$.

Обозначим $\Delta = F(\overline{X}_{opt}) - F(\overline{X}^1)$.

Рассмотрим K вариантов формирования портфеля, таких, что в варианте с номером k планируется запустить только проект k и «объем участия» в этом проекте максимален при заданных ограничениях задачи (1) – (3).

Обозначим соответствующие допустимые решения $X_{i1},...,X_{iK}$, где $\overline{X_i} = X_{i1},...,X_{iK} \quad (i = 1,...,K)$.

Выберем $X^* = \max\limits_{i=\overline{1,K},\, j=\overline{1,K}} X_{ij}$.

Если в качестве ε в определении устойчивости задачи по решению принять значение Δ / KX^*, то приращение функционала $\Delta = F(\overline{X})$ для любого решения $\overline{X}$ при изменении исходных данных не более чем на Δ / KX^* может быть определено следующим образом:

$$\Delta F(\overline{X}) \le \frac{\Delta}{KX^*} \sum_{k=1}^{K} X_k \le \frac{\Delta}{KX^*} \cdot KX^* = \Delta .$$

Это, в частности, означает, что значение функционала (1) для любого решения $\overline{X}$ увеличится не более чем на Δ при увеличении цен изделий на Δ / KX^*, откуда следует устойчивость задачи (1) – (3) по решению.

Необходимое и достаточное условие устойчивости задачи (1) – (3) по решению формулируется следующим образом.

Утверждение 2.

Для того чтобы задача (1) – (3) была устойчивой по решению, необходимо и достаточно чтобы выполнялись следующие условия:

существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $0 \le \varepsilon' \le \varepsilon$ справедливо:

$$F(\overline{X}_{\varepsilon'}) = F(\overline{X}\ ) + \varepsilon' \sum_{k=1}^{K} X_k \,, \tag{31}$$

где $F(\overline{X}_{\varepsilon'})$ – значение функционала (1) для оптимального решения при значениях NPV, задаваемых вектором $\overline{NPV_{\varepsilon'}} = (NPV_1 + \varepsilon', \ldots, NPV_k + \varepsilon')$, $F(\overline{X}\ )$– значение функционала (1) для оптимального решения при изначальных значениях NPV.

Доказательство.

Необходимость. Если исходная задача (1) – (3) устойчива по решению и существует такое ε, что при увеличении значений NPV не более чем на ε, оптимальное решение задачи сохраняется. Отсюда для любого $\varepsilon' \le \varepsilon$ выполняется:

$$F(\overline{X_{\varepsilon'}}) - F(\overline{X}) = \sum_{k=1}^{K} (NPV_k + \varepsilon')x_k - \sum_{k=1}^{K} NPV_k x_k = \varepsilon' \sum_{k=1}^{K} x_k \ .$$

Отсюда:

$$F(\overline{X}_{\varepsilon'}) = F(\overline{X}\ ) + \varepsilon' \sum_{k=1}^{K} X_k \ .$$

Достаточность. Условие (31) обеспечивает оптимальность решения $\overline{X}$ исходной задачи (1) – (3) при увеличении значений NPV на любое $0 \le \varepsilon' \le \varepsilon$, что по определению означает устойчивость решения задачи.

Утверждение 3.

Пусть увеличение значений NPV проектов происходит в интервале $[0, \infty)$. Тогда существует такое разбиение интервала $[0, \infty)$ на конечное число отрезков $[0, \varepsilon_1), \ldots, [\varepsilon_L, \infty)$, что для каждого отрезка $[\varepsilon_l, \varepsilon_{l+1})$ существует допустимое решение задачи (1) – (3), которое является оптимальным при изменении значений NPV в интервале $[NPV_k + \varepsilon_l, \ldots, NPV_k + \varepsilon_{l+1}]$ ($k=1, \ldots, K$; $\ell = 0, \ldots, L$), где C_k – минимальная прогнозируемая значение NPV к-го проекта. Последнее утверждение позволяет получить верхнюю и нижнюю оценку интервала изменения значений NPV проектов и среди допустимых вариантов структуры портфеля выбрать такой, который является оптимальным при наиболее вероятном изменении NPV.

Задача вычисления области устойчивости по функционалу формулируется следующим образом:

$$\max \varepsilon \tag{32}$$

при ограничениях:

$$F(\widetilde{X}_\varepsilon) - F(\overline{X}) \le \delta\,,\ F(\tilde{X}_\varepsilon) - F(\bar{X}) \le \delta\,, \tag{33}$$

$$\varepsilon \ge 0\,, \tag{34}$$

где $F(\widetilde{X}_\varepsilon)$– значение функционала (1) в оптимальном решении задачи (1) – (3) при изменении NPV на ε; $F(\overline{X})$ – значение функционала (1) в решении задачи (1) – (3) при исходных значениях NPV. Отметим, что решение задачи (1) – (3) при значениях интегральных эффектов проектов $\overline{NPV} = (NPV_1,...,NPV_k)$ и решение задачи (1) – (3) при значениях интегральных эффектов проектов $\overline{NPV} = (NPV_1,...,NPV_k)$ $\overline{NPV_\varepsilon} = (NPV_1+\varepsilon,...,NPV_k+\varepsilon)$, вообще говоря, есть разные векторы $\widetilde{X}$ и $\overline{X}$. Тогда $F(\overline{X_\varepsilon}) - F(\overline{X}) = \sum_{k=1}^{K}(NPV_k+\varepsilon)x_k - \sum_{k=1}^{K}NPV_k x_k = \varepsilon\sum_{k=1}^{K}x_k$.

Следовательно, для того чтобы выполнялось неравенство (33), необходимо выполнение соотношения:

$$\varepsilon\sum_{k=1}^{K}X_k \le \delta .$$

Значение ε находится по формуле

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\sum_{k=1}^{K}X_k} .$$

Рассмотрим решение задачи (1) – (3) при значениях NPV:

$$\overline{NPV} = (NPV_1 + \frac{\delta}{\sum_{k=1}^{K}x_k},...,NPV_k + \frac{\delta}{\sum_{k=1}^{K}x_k}) .$$

Если решением задачи является тот же вектор $\overline{X} = (X_1,...,X_k)$ что и при исходных значениях NPV, то решением задачи (32) – (34) будет $\varepsilon = \frac{\delta}{\sum_{k=1}^{K}X_k}$.

Пусть решение задачи (1) – (3) при $\overline{NPV} = (NPV_1 + \frac{\delta}{\sum_{k=1}^{K}x_k},...,NPV_k + \frac{\delta}{\sum_{k=1}^{K}x_k})$ задается вектором $\overline{X}^1$ таким, что существует j такое, что $X_j^1 \ne X_j$.

Вычислим максимальное ε_1 ($\varepsilon_1 \le \varepsilon$):

$$\sum_{k=1}^{K}NPV_k x_k^1 + \varepsilon_1\sum_{k=1}^{K}NPV_k x_k^1 \le \sum_{k=1}^{K}NPV_k x_k + \varepsilon_1\sum_{k=1}^{K}x_k + \delta .$$

Откуда

$$\varepsilon_1 = \frac{\sum_{k=1}^{K}NPV_k(x_k + x_k^1) + \delta}{\sum_{k=1}^{K}(x_k^1 - x_k)} . \quad (35)$$

Если для значений NPV, заданных вектором $NPV = (NPV_1+\varepsilon_1,...,NPV_k+\varepsilon_1)$, вектор $\overline{X}$ есть решение задачи (1) – (3), то задача (32) – (34) решена и решением будет ε_1, вычисленное по формуле (35). Если же решением задачи (1) – (3) является вектор X^2, такой, что существует j такое, что $X_j^2 = X_j$, то проводим вычисление ε_2 аналогично тому, как было вычислено ε_1.

Учитывая конечность всех допустимых решений задачи (1) – (3) через ограниченное число итераций, получим, что решение задачи для $\overline{NPV} = (NPV_1,...,NPV_k)$ совпадает с решением для $\overline{NPV_l} = (NPV_1+\varepsilon_1,...,NPV_k+\varepsilon_1)$, а ε_l является решением задачи (32) – (34).

Задача вычисления области устойчивости по решению состоит в следующем:

$$\max \varepsilon, \tag{36}$$

$$X_{\varepsilon K} - X_{\varepsilon} = 0,\ k = 1,...,K, \tag{37}$$

$$\varepsilon \ge 0, \tag{38}$$

где $X_{\varepsilon} = (X_{\varepsilon 1},..., X_{\varepsilon K})$ –решение задачи(1)–(3)при $NPV_{\varepsilon} = (NPV_1 + \varepsilon,..., NPV_k + \varepsilon)$; $X = (X_1,..., X_K)$ – решение задачи (1) – (3) при $NPV = (NPV_1,..., NPV_k)$.

Можно показать, что если $\overline{X}$, являющийся решением задачи (1) – (3), таков, что $\sum_{k=1}^{K} X_k \ge \sum_{k=1}^{K} X_k^i$ для всех допустимых X^i решений задачи (1) – (3), то при сколь угодно большом увеличении значений NPV вектор $\overline{X} = (X_1,..., X_K)$ остается решением задачи (1) – (3).

Пусть существует j такое, что для допустимого решения X^j выполняется неравенство:

$$\sum_{k=1}^{K} X_k^j \ge \sum_{k=1}^{K} X_k. \tag{39}$$

Рассмотрим алгоритм решения задачи (36) – (38) в этом случае.

Если ЛПР получил в процессе исследования модели все допустимые решения X^l (l=1,…,L), для которых выполняется (39), то процедура определения решения задачи (36)-(38) эквивалентна решению следующей задачи:

$$\max \varepsilon,$$

$$\sum_{k=1}^{K} (NPV_k + \varepsilon) x_k \ge \sum_{k=1}^{K} (NPV_k + \varepsilon) x_k^l \ (l=1,...,L),$$

$$\varepsilon \ge 0.$$

Такое ε находится из соотношения $\varepsilon = \min\limits_{l=1,L} \left\{ \dfrac{\sum_{k=1}^{K} NPV_k x_k - \sum_{k=1}^{K} NPV_k x_k^l}{\sum_{k=1}^{K} x_k^l - \sum_{k=1}^{K} x_k} \right\}$.

Рассмотрим алгоритм решения задачи (1) – (3) для случая, когда у ЛПР нет информации о наличии всех допустимых решений задачи, удовлетворяющих условию (39).

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 4. Пусть $X^* = (X^*_1,..., X^*_K)$ является решением задачи (1) – (3) при $NPV_{\varepsilon 1} = (NPV_1 + \varepsilon_1,..., NPV_k + \varepsilon_1)$ и при $NPV_{\varepsilon 2} = (NPV_1 + \varepsilon_2,..., NPV_k + \varepsilon_2)$. Тогда вектор $X^* = (X^*_1,..., X^*_K)$ будет решением задачи (1) – (3) при значениях чистых интегральных доходов проектов, заданных любым вектором $NPV_{\varepsilon} = (NPV_1 + \varepsilon,..., NPV_k + \varepsilon)$, при $\varepsilon_1 \le \varepsilon \le \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.

Доказательство.

Доказательство от противного. Пусть для $\varepsilon_1 \le \varepsilon \le \varepsilon_2$ существует вектор $\overline{X'}$ такой, что $F(\overline{X'}) > F(\overline{X})$ при $NPV = (NPV_1 + \varepsilon,..., NPV_k + \varepsilon)$.

Это, в частности, означает, что:

$$\sum_{k=1}^{K} (NPV_k + \varepsilon) x'_k \ge \sum_{k=1}^{K} (NPV_k + \varepsilon) x^*_k. \tag{40}$$

Следовательно, учитывая условия утверждения:

$$\sum_{i=1}^{K} X'_i \ge \sum_{i=1}^{K} X^*_i. \tag{41}$$

Увеличим NPV проектов на величину $\varepsilon_2 - \varepsilon > 0$. Тогда с учетом (40) – (41) получим:

$$\sum_{k=1}^{K} (NPV_k + \varepsilon_2) x'_k > \sum_{k=1}^{K} (NPV_k + \varepsilon_2) x^*_k \cdot$$

В тоже время по условию утверждения:

$$\sum_{k=1}^{K} (NPV_k + \varepsilon_2) x^*_k \geq \sum_{k=1}^{K} (NPV_k + \varepsilon_2) x'_k ,$$

$$\sum_{k=1}^{K} (C_k + \varepsilon_2) X^*_k \geq \sum_{k=1}^{K} (C_k + \varepsilon_2) X^i_k ; \; \forall \overline{X}^i \in \overline{X} ,$$

где $\overline{X}$ – множество допустимых решений задачи (1) – (3).

Полученное противоречие доказывает утверждение.

Выводы и вектор дальнейших исследований

Обобщая вышесказанное, отметим, что рассмотренные модели формирования портфеля проектов позволяют оптимально распределить финансовые ресурсы организации, исходя из критерия максимизации суммарного NPV портфеля. При классической (линейной) постановке оптимизационной задачи представляется возможным рассчитать области устойчивости полученного решения в случае отклонения NPV отдельных проектов от прогнозных значений. Модель формирования портфеля проектов в условиях риска позволяет получить эффективные решения в ситуации, когда исходные данные не могут быть заданы детерминировано ввиду влияния на них случайных факторов. Предложена также методика формирования портфеля проекта с привлечением заемных средств, при помощи которой может быть определен оптимальный размер кредита, а также на заданном периоде планирования – оптимальный график его погашения с учетом возможности реинвестирования неиспользованных в данном периоде средств.

Перспективным представляется дальнейший анализ моделей оптимизации портфеля проектов в условиях неопределенности: предполагается привлечение аппарата стохастического программирования для получения достоверных решений в случае отсутствия полной информации о функции цели (NPV отдельных проектов) и функциях ограничений (например, неявно заданные бюджетные ограничения).

Список источников

1. Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. *Оценка эффективности инвестиционных проектов*. Теория и практика. Москва, Дело, 2002. 888 с.
2. Мищенко А.В. *Методы управления ограниченными ресурсами в логистических системах*. Москва, Инфра-М, 2011. 184 с.
3. Полковников А.В., Дубовик М.Ф. *Управление проектами. Полный курс MBA*. Москва, ЗАО «Олимп-Бизнес», 2013. 552 с.
4. Brown G.G., Carlyle M., Salmeron J. *Defending critical infrastructure*. Interfaces, 2006, no. 36, pp. 530-544.
5. Savage S., Scholtes S., Zweidler D. *Probability management*. ORMS Today, 2006, no. 33, pp. 20-28.
6. Hartman J.C. *Engineering Economy and the Decision-Making Process*. Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, NJ 2007.
7. José L. Perez-Escobedo. [Multiobjective strategies for New Product Development in the pharmaceutical industry]. Catherine Azzaro-Pantel, Luc Pibouleau. Availvable at: http://oatao.univ-toulouse.fr/10000/1/perez_10000.pdf.

OPTIMIZATION MODELS IN PROJECT PORTFOLIO MANAGEMENT PROBLEMS

Artemenko Olga Andreevna, graduate student

Russian Plekhanov University of Economics, Zatsepa st. 43, Moscow, Russia, 115054; e-mail: o.a.artemenko@gmail.com

The article discusses the models of project portfolio management under uncertainty and limited financial resources. An approach to determine the optimal size of the loan for project investment and determination of the maximum interest rate at which raising a loan is profitable has been proposed. Considered a model of the project portfolio optimization under uncertainty: if the decision maker can select multiple scenarios, each of which is characterized by a certain probability and value NPV individual project. Within the problem of finding the optimal structure of the portfolio of projects the existence of the region of stability under certain changes in the initial parameters has been proved and an algorithm for computing this region was presented.

Submitted optimization models allow to making validated investment decisions in the formation of the project portfolio, given the specificity of the original data.

Keywords: portfolio, borrowed funds, stability analysis, uncertainty.

Reference

1. Vilensky P.L., Livshits V.N., Smolyak S.A. *Evaluating the effectiveness of investment projects. Theory and practice*. Moscow, Delo Publ., 2002. 888 p. (In Russ.)
2. Mishchenko A.V. *Methods of management of limited resources in logistics systems.* Moscow, Infra-M Publ., 2011. 184 p. (In Russ.)
3. Polkovnikov A.V., Dubovik M.F. *Project Management. Full course MBA.* Moscow, ZAO «Olympus – Business», 2013. 552 p. (In Russ.)
4. Brown G.G., Carlyle M., Salmeron J. *Defending critical infrastructure*. Interfaces, 2006, no. 36, pp. 530-544.
5. Savage S., Scholtes S., Zweidler D. *Probability management.* ORMS Today, 2006, no. 33, pp. 20-28.
6. Hartman J.C. *Engineering Economy and the Decision-Making Process.* Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, NJ 2007.
7. José L. Perez-Escobedo. [Multi-objective strategies for New Product Development in the pharmaceutical industry]. Catherine Azzaro-Pantel, Luc Pibouleau. Availvable at: http://oatao.univ-toulouse.fr/10000/1/perez_10000.pdf.