УДК 519.237 (075.8)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАНЖИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЧЕТКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Алейникова Наталья Александровна[1], канд. физ.-мат. наук, доц.
Сумина Рита Семеновна[1], канд. тех. наук, доц.
Шишкина Лариса Александровна[2], канд. экон. наук, доц.

[1]Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», ул. Старых большевиков, 54, Воронеж, Россия, 394064; e-mail: balbashovan@mail.ru, rsumina@mail.ru

[2]Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I, ул. Мичурина, 1, Воронеж, Россия, 394087; e-mail: kz2009kzaf@gmail.com

Цель: разработать методику решения задачи ранжирования на основе нечеткого экспертного оценивания. *Обсуждение*: при решении задач экспертного оценивания под множеством значений лингвистической переменной принято понимать такое множество значений, которое обеспечивает эксперту минимальную степень трудности при выставлении оценки в процессе оценивания. Однако использование нечеткой шкалы подразумевает решение двух задач: во-первых, как выразить в виде нечеткой переменной обобщенное мнение экспертов об объекте, т.е. найти обобщенную нечеткую оценку объекта по выделенному критерию, во-вторых, как проверить степень согласованности мнений экспертов. *Результаты*: в статье было предложено решение вышеуказанных задач для случая, когда оценивание объектов производится в непрерывной нечеткой шкале, с помощью лингвистических переменных, в частности, значения которых являются трапециевидными числами. Представленная методика позволяет вычислять нечеткие и четкие обобщенные оценки объектов, ранжировать объекты по степени предпочтительности, а также вычислять степень согласованности экспертных оценок.

Ключевые слова: эксперты, ранжирование, нечеткие множества, нечеткие оценки.

1. Введение

Методы экспертных оценок – это методы получения информации об объекте с помощью специалистов-экспертов в определенной области. Экспертные оценки широко используются в прогнозировании, при определении целей развития или принятии плановых решений, помогают оценить значимость показателей и проверить качество методик, применяемых для сбора данных, повысить обоснованность практических рекомендаций и т.д.

Очевидно, что рациональное использование информации, полученной от экспертов, возможно при условии преобразования ее в форму, удобную для дальнейшего анализа, подготовки и принятия решений. Характер информации зависит от свойств измеряемых объектов, поэтому правила формализации определяются уровнем измерения. Одним из способов упорядочения информации является ранжирование. Ранжирование – процедура установления относительной значимости (предпочтительности) исследуемых объектов на основе их упорядочения. Ранг – это показатель, характеризующий порядковое место оцениваемого объекта в группе других объектов, обладающих существенными для оценки свойствами [3, 5].

2. Цели исследования

Рассмотрим следующую задачу, называемую задачей ранжирования. Имеется набор из n объектов, которые необходимо упорядочить по степени их предпочтительности. При этом каждый объект характеризуется несколькими критериями как количественными, так и качественными.

Часто стараются ввести какие-либо интегральные (комплексные) коэффициенты, вычисляемые по данным, характеризующим сравниваемые объекты. Это приводит к проблеме несовместимости значений критериев, измеряемых в разнотипных шкалах и неадекватности применения к ним различных операций. Обработку данных надо проводить с осторожностью, учитывая их смысл. Например, при ранжировании объектов задают набор критериев, оценивают объекты в соответствии с критериями по балльной шкале, а затем по сумме баллов принимают решение: наилучшим считают тот объект, который набрал наибольшую сумму баллов. При этом нередко используют разные шкалы: по одним критериям оценивают объекты в двухбалльной шкале, другие по пятибалльной и т.д. В результате допускаются сразу две ошибки: с баллами производят арифметические действия и совместно используют несопоставимые по смыслу данные. В итоге сравнение получаемых сумм баллов может привести к неверному принятию решения. С другой стороны, при использовании балльной или порядковой шкалы измерения, особенно по качественным критериям, у экспертов часто возникают затруднения в том, какой точно балл или на какое конкретное место поставить объект. Возможно, что объект в какой-то мере заслуживает несколько баллов, с разными степенями уверенности.

В работе [2] рассматривалась следующая задача: проводится предварительная экспертиза научных работ, представленных на конкурс и отбор лучших из них для выдвижения на второй этап. Была предложена методика решения данной задачи, основанная на использовании метода парных сравнений и метода анализа иерархий.

Ключевой задачей настоящей работы является рассмотрение вопросов совершенствования шкалы оценки. Предполагаем, что степень предпочтительности объектов по каждому критерию определяется группой экспертов.

Одним из способов построения шкалы оценивания в данном классе задач является использование лингвистических переменных, применение которых не только позволяет экспертам выразить степень предпочтительности объекта вербально, но и дать при этом численную оценку.

3. Результаты исследования

Рассмотрим методику построения нечеткой шкалы оценивания и также определения согласованности мнения членов экспертной комиссии.

Введем следующие множества: $O=\{O_1,O_2,...,O_n\}$ – множество объектов, $K=\{K_1,K_2,...,K_m\}$ – множество критериев, $E=\{E_1,E_2,...,E_p\}$ – множество экспертов.

В работе [1] введено понятие нечеткой оценки, данной i-му объекту по k-му критерию j-м экспертом $\widetilde{A}_{ij}^k=\left(x\in X/\mu_{ij}^k(x)\right)$, где X – универсальное множество значений нечеткой переменной, x – значения нечеткой переменой из X, $\mu_{ij}^k(x)$ – функция принадлежности x множеству X. Область значений функции $\mu_{ij}^k(x)$ – отрезок [0, 1]. Универсальное множество X может быть непрерывным или дискретным в зависимости от того, в какой шкале производится оценивание объектов.

Рассмотрим случай непрерывного множества X. Ограничим множество X интервалом от $x_{\min}$ до $x_{\max}$. В этом случае эксперт может дать оценку $\widetilde{A}_{ij}^k$ объекту с помощью трапециевидного нечеткого числа. Трапециевидное число имеет функцию принадлежности, задаваемую формулой:

$$\mu_{ij}^k(x)=\begin{cases}0, & x_{\min}\le x<a_{ij}^k \quad \text{или} \quad d_{ij}^k<x\le x_{\max},\\ \dfrac{x-a_{ij}^k}{b_{ij}^k-a_{ij}^k}, & a_{ij}^k\le x<b_{ij}^k,\\ 1, & b_{ij}^k\le x\le c_{ij}^k,\\ \dfrac{d_{ij}^k-x}{d_{ij}^k-c_{ij}^k}, & c_{ij}^k<x\le d_{ij}^k,\end{cases} \tag{1}$$

где $x_{\min}\le a_{ij}^k\le b_{ij}^k\le c_{ij}^k\le d_{ij}^k\le x_{\max}$.

Трапециевидное число обозначается как $\widetilde{A}_{ij}^k=\left(a_{ij}^k,b_{ij}^k,c_{ij}^k,d_{ij}^k\right)$. В случае $b_{ij}^k=c_{ij}^k$, получаем треугольное число. Для треугольных чисел используется обозначение $\widetilde{A}_{ij}^k=\left(a_{ij}^k,b_{ij}^k,d_{ij}^k\right)$.

Возникает два вопроса: первый – как выразить в виде нечеткой переменной обобщенное мнение экспертов об объекте O_i (обобщенную нечеткую оценку объекта O_i) по k-му критерию, второй – как проверить степень согласованности мнений экспертов.

Разобьём множество X на r интервалов с шагом:

$$h=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{r};\quad x_s=x_{\min}+sh,\, s=0,\ldots,r. \tag{2}$$

Для нахождения обобщенной нечеткой оценки объекта O_i по k-му критерию предлагается для каждого значения $x_s,\, s=\overline{0,r}$ составить таблицу (см. табл. 1), с помощью которой определить расстояния между значениями функций принадлежности экспертов. В качестве обобщенной нечеткой оценки для каждого носителя x_s множества X предлагается выбрать значение функции принадлежности того эксперта, чье мнение было ближе к остальным. При этом обобщённая нечеткая оценка объекта вычисляется по формуле:

$$\mu_i^k(x)=\min_j\left\{\sum_{t=1}^{p}\left|\mu_j^k(x)-\mu_t^k(x)\right|\right\},\quad \forall x\in X,\quad j=\overline{1,p}. \tag{3}$$

Табл. 1

Определение значений функции принадлежности (выбор оценки, самой близкой к оценкам остальных экспертов)

$x=x_s$	$\mu_{i1}^k(x)$	$\ldots$	$\mu_{ip}^k(x)$	Сумма	min
$\mu_{i1}^k(x)$	$\left\|\mu_{i1}^k(x)-\mu_{i1}^k(x)\right\|$	$\ldots$	$\left\|\mu_{i1}^k(x)-\mu_p^k(x)\right\|$	$\sum_{t=1}^{p}\left\|\mu_{i1}^k(x)-\mu_{it}^k(x)\right\|$	$\mu_i^k(x)=$ $=\min_j\left\{\sum_{t=1}^{p}\left\|\mu_j^k(x)-\mu_t^k(x)\right\|\right\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
$\mu_{ip}^k(x)$	$\left\|\mu_{ip}^k(x)-\mu_{i1}^k(x)\right\|$		$\left\|\mu_{ip}^k(x)-\mu_{ip}^k(x)\right\|$	$\sum_{t=1}^{p}\left\|\mu_{ip}^k(x)-\mu_{it}^k(x)\right\|$	

Для определения обобщённой нечеткой оценки объекта можно использовать также формулу:

$$\mu_i^k(x)=\min_j\left\{\frac{\sum_{t=1}^{p}\left|\mu_j^k(x)-\mu_i^k(x)\right|}{\sum_{t=1}^{p}\left|\mu_j^k(x)+\mu_i^k(x)\right|}\right\}. \tag{4}$$

При построении обобщенных нечетких оценок для промежуточных значений $x\in X$ используется интерполяция, например, линейными сплайнами, так как линейный сплайн при простоте построения сохраняет монотонность переданного в него набора точек.

Для выбора однозначного (четкого) значения оценки i-го объекта по k-му критерию используем формулу:

$$A_i^k=\frac{\sum_{t=1}^{r}x_t\mu_i^k(x_t)}{\sum_{t=1}^{r}\mu_i^k(x_t)}. \tag{5}$$

Второй вопрос связан с оценкой согласованности нечетких мнений экспертов. Рассмотренный метод получения групповых оценок позволяет получить достоверные результаты в случае хорошо подобранной группы экспертов и согласованности их мнений. Если это не так, то встает задача определения количественной оценки степени согласованности экспертов. Получение количественной меры позволяет более обоснованно интерпретировать причины в расхождении мнений. Естественно считать, что мнение эксперта, как показание любого средства измерения, содержит погрешности. В [5] предложен следующий подход к оцениванию: предлагается считать, что функция принадлежности $\mu_{ij}^k(x)$ есть сумма двух слагаемых:

$$\mu_{ij}^k(x) = \eta_{ij}^k(x) + \xi_{ij}^k(x), \tag{6}$$

где $\eta_{ij}^k(x)$ – функция принадлежности «истинного» нечеткого множества $N\left(\widetilde{A}_{ij}^k\right)$, а $\xi_{ij}^k(x)$ – «погрешность» эксперта как прибора.

Мнения экспертов $\widetilde{A}_{ij}^k = \left(x \in X / \mu_{ij}^k(x)\right)$, $j = \overline{1,p}$ будем считать согласованными, если:

$$N\left(\widetilde{A}_{i1}^k\right) = N\left(\widetilde{A}_{i2}^k\right) = \ldots = N\left(\widetilde{A}_{ip}^k\right). \tag{7}$$

Проверка гипотезы сводится к проверке однородности p выборок, мощность которых совпадает с мощностью множества X. Если экспертов достаточно много, то эти гипотезы можно проверять отдельно для каждого элемента множества – общего носителя нечетких ответов.

Для оценки меры согласованности мнений группы экспертов может использоваться дисперсионный коэффициент конкордации. При этом по формуле (5) вычисляем четкие оценки, данные каждым экспертом i-му объекту по k-му критерию, и ранжируем их по степени убывания. В случае отсутствия связанных рангов в матрице ранжирования дисперсионный коэффициент конкордации рассчитывается по формуле:

$$W = \frac{12}{p^2(n^3 - n)} S, \tag{8}$$

где $S = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} A_{ij}^k - \overline{A} \right)^2$, p – количество экспертов, n – количество объектов, $\overline{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} A_{ij}^k$.

В случае наличия связанных рангов в матрице ранжировок имеем формулу для коэффициента конкордации:

$$W = \frac{12}{p^2(n^3 - n) - p\sum_{j=1}^{p} T_j} S, \tag{9}$$

где $T_j = \sum_{k=1}^{H_j} (h_k^3 - h_k)$ – показатель связанных рангов в j-ранжировке; Hj – число групп равных рангов в j-й ранжировке; h_k – число равных рангов в k-й группе связанных рангов при ранжировке j-м экспертом.

Приведем пример нечеткого оценивания. Пусть имеется три эксперта ($p=3$), пять объектов ($n=5$) и один критерий ($k=1$). Требуется ранжировать объекты, предварительно оценив каждый с помощью нечеткой переменной. В качестве универсального множества – шкалы оценки возьмем непрерывную шкалу от 0 до 10. Мнения экспертов получены в виде трапециевидных чисел $\widetilde{A}_{ij}^k = \left(a_{ij}^k, b_{ij}^k, c_{ij}^k, d_{ij}^k\right)$, где $k = 1$, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,3}$. В табл. 2 приведены значения параметров трапециевидных чисел каждого эксперта по первому объекту.

Таблица 2

Значения коэффициентов $\widetilde{A}_{1j}^{1}=\left(a_{1j}^{1},b_{1j}^{1},c_{1j}^{1},d_{1j}^{1}\right)$

№ эксперта, j	a_{1j}^{1}	b_{1j}^{1}	c_{1j}^{1}	d_{1j}^{1}
1	3	4	7	8
2	2,5	3	5	7
3	3	5	6	7

Перейдем к дискретному множеству. Поскольку при $x<\min\limits_{j}\{a_{j}^{1}\}$ и $x>\max\limits_{j}\{d_{j}^{1}\}$ значения функций принадлежности всех экспертов равны 0, то в качестве интервала разбиения выбираем $\left[\min\limits_{j}\{a_{j}^{1}\};\ \max\limits_{j}\{d_{j}^{1}\}\right]$. Разобьём этот интервал на $r=20$. Шаг разбиения $h=(8-2.5)/20=0.275$. Дискретная шкала $x_s=2.5+0.275s,\ s=0,\ldots,20.$

Для каждого значения x_s, $s=\overline{0,20}$ по формуле (3) определяем обобщенное значение функции принадлежности $\mu_1^1(x)$. Для этого составим вспомогательные табл. 3.

Таблица 3

Расчетная таблица для вычисления функции принадлежности

$x=x_s$	$\mu_{11}^{1}(x)$	$\mu_{12}^{1}(x)$	$\mu_{13}^{1}(x)$	Сумма	min
$\mu_{11}^{1}(x)$	0	$\left\|\mu_{11}^{1}(x)-\mu_{12}^{1}(x)\right\|$	$\left\|\mu_{11}^{1}(x)-\mu_{13}^{1}(x)\right\|$	$\sum\limits_{t=1}^{3}\left\|\mu_{11}^{1}(x)-\mu_{1t}^{1}(x)\right\|$	$\mu_1^1(x)=$ $=\min\limits_{j}\left\{\sum\limits_{t=1}^{p}\left\|\mu_{1j}^{1}(x)-\mu_{1t}^{1}(x)\right\|\right\}$
$\mu_{12}^{1}(x)$	$\left\|\mu_{12}^{1}(x)-\mu_{11}^{1}(x)\right\|$	0	$\left\|\mu_{12}^{1}(x)-\mu_{13}^{1}(x)\right\|$	$\sum\limits_{t=1}^{3}\left\|\mu_{12}^{1}(x)-\mu_{1t}^{1}(x)\right\|$	
$\mu_{13}^{1}(x)$	$\left\|\mu_{13}^{1}(x)-\mu_{11}^{1}(x)\right\|$	$\left\|\mu_{13}^{1}(x)-\mu_{12}^{1}(x)\right\|$	0	$\sum\limits_{t=1}^{3}\left\|\mu_{13}^{1}(x)-\mu_{1t}^{1}(x)\right\|$	

Следовательно, обобщенная нечеткая оценка первого объекта $\widetilde{A}_1^1$ может быть представлена в виде табл. 4.

Таблица 4

Значения обобщенных нечетких оценок

$x=x_s$	2,5	2,775	3,05	3,325	3,6	3,875	4,15	4,425	4,7	4,975	5,25
$\mu_1^1(x)$	0	0	0,05	0,6	0,6	0,875	1	1	1	1	1
$x=x_s$	5,525	5,8	6,075	6,35	6,625	6,9	7,175	7,45	7,725	8	
$\mu_1^1(x)$	1	1	0,925	0,65	0,375	0,1	0	0	0	0	

На основе значений, полученных в табл. 4, была проведена линейная интерполяция. Нечеткие оценки первого объекта, данные каждым экспертом, и обобщенная нечеткая оценка изображены на рисунке.

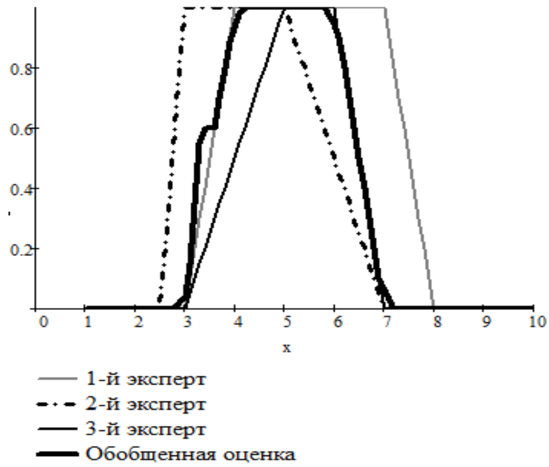

Рис. Нечеткие оценки, данные первым экспертом первому объекту

Аналогично были получены нечеткие оценки для каждого из оставшихся четырех объектов. Значения обобщенных четких оценок, вычисленные по формуле (5), приведены в табл. 5.

Таблица 5

Значения обобщенных четких оценок

Объекты, i	1	2	3	4	5
A_i^1	4,96	3,75	2,1	8,92	5,63
Место объекта	3	4	5	1	2

4. Заключение

Таким образом, в работе предложено использовать в качестве основы для построения шкалы оценки объектов теорию нечетких множеств и приведен математический инструментарий для такого оценивания. Рассмотрен способ формирования обобщенного мнения экспертов и проверки степени их согласованности.

Список источников

1. Алейникова Н.А., Дерканосова Н.М., Шуршикова Г.В. Нечеткое оценивание потребительских свойств обогащенных хлебобулочных изделий // *Экономическое прогнозирование: модели и методы. Материалы X международной научно-практической конференции*. Воронеж, 2014, с. 232-236.
2. Алейникова Н.А., Сумина Р.С. Применение метода анализа иерархий в социальных исследованиях // *Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика: сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции*. Воронеж, 18-19 июня 2014 года, no. 4, ч. 2 (9-2), 2014, с. 163-167.
3. Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г. *Математико-статистические методы экспертных оценок*. Москва, Статистика, 1980. 263 с.
4. Коротких В.В., Израилова Э.С. Применение нечеткого прогнозного образа в обосновании инвестиционных решений // *Современная экономика: проблемы и решения*, 2012, no. 6 (30), с. 205-213.
5. Орлов А.И. *Нечисловая статистика*. Москва, МЗ-Пресс, 2004. 513 с.

RANKING MODEL BASED ON FUZZY VARIABLES

Aleinikova Natalia Aleksandrovna[1], Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.
Sumina Rita Semenovna[1], Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Prof.
Shishkina Larisa Aleksandrovna[2], Cand. Sc. (Econ.), Assoc. Prof.

[1]Russian Air Force Military Educational and Scientific Center «Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin», Starikh Bolshevikov st., 54, Voronezh, Russia, 394064; e-mail: balbashovan@mail.ru; rsumina@mail.ru

[2]Voronezh State Agricultural University, Michurin st., 1, Voronezh, Russia, 394087; e-mail: kz2009kzaf@gmail.com

Purpose: ranking technique based on fuzzy expert estimation developing. *Discussion*: the set of linguistic variables is commonly understood as a set of values that provides expert minimum degree of difficulty in estimation process. The fuzzy scale solves two problems. The fuzzy variables present generalized expert estimation on selected criteria and allow checking the degree of consensus of experts. *Results*: in this paper we proposed a solution of mentioned problems in the case when estimation is performed in a continuous fuzzy scale with linguistic variables, presented by trapezoidal numbers. This technique allows fuzzy and non-fuzzy general object estimations, ranking objects according to the degree of preference, as well as calculating the degree of agreement of expert estimates.

Keywords: expert, ranking, fuzzy set, fuzzy estimations.

Reference

1. Aleinikova N.A., Derkanosova N.M., Shurshikova G.V. Nechetkoe otsenivanie potrebitel'skikh svoistv obogashchennykh khlebobulochnykh izdelii // *Ekonomicheskoe prognozirovanie: modeli i metody. Materialy 10 mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii.* Voronezh, 2014, pp. 232-236. (In Russ.)

2. Aleinikova N.A., Sumina R.S. Primenenie metoda analiza ierarkhii v sotsial'nykh issledovaniiakh // *Aktual'nye napravleniia nauchnykh issledovanii XXI veka: teoriia i praktika* : sbornik nauchnykh trudov po materialam mezhdunarodnoi zaochnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii, (Voronezh, 18-19 iiunia 2014 goda), no. 4, chast' 2 (9-2), 2014, pp. 163-167. (In Russ.)

3. Beshelev S.D., Gurvich F.G. *Matematiko-statisticheskie metody ekspertnykh otsenok*. Moscow, Statistika, 1980. 263 p. (In Russ.)

4. Korotkikh V.V., Izrailova E.S. [Fuzzy Forecast Image Application in Investment Decision Reasoning] // *Sovremennaia ekonomika: problemy i resheniia*, 2012, no. 6 (30), pp. 205-213. (In Russ.)

5. Orlov A.I. *Nechislovaia statistika*. Moscow, MZ-Press, 2004. 513 p. (In Russ.)