УДК 519.2

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА И СБЫТА ПРОДУКЦИИ

Бутова Лилия Владиславовна[1], канд. техн. наук
Урывская Татьяна Юрьевна[1], канд. физ.-мат. наук
Корчагина Елена Васильевна[2], канд. физ.-мат. наук, доц.
Шишкина Лариса Александровна[3], канд. экон. наук, доц.

[1] Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», ул. Старых большевиков, 54а, Воронеж, Россия, 394064; e-mail: LVButova@mail.ru

[2] Воронежский институт Федеральной службы исполнения наказаний, ул. Иркутская, 1а, Воронеж, Россия, 394072; e-mail: tvs-helen@yandex.ru

[3] Воронежский государственный аграрный университет имени Петра I, ул. Мичурина, 1, Воронеж, Россия, 394087; e-mail: kz2009kzaf@gmail.com

Цель: получение условия оптимальности взвешенного критерия для многокритериальной задачи о выпуске и сбыте продукции предприятия при перераспределении дохода от поставщика к посреднику. *Обсуждение*: разработка численного решения многокритериальной динамической задачи, для которой определены причины и различные траектории изменения параметра, начинающиеся в начальный момент времени в одном и том же состоянии. *Результат*: получен численный алгоритм, позволяющий находить оптимальное решение задачи о производстве и сбыте продукции предприятия при участии посреднических торговых организаций.

Ключевые слова: алгоритм, управление, условие оптимальности.

DOI: DOI 10.17308/meps.2017.1/1616

Введение

Для существующего рынка товаров и услуг характерна приверженность к значительному росту влияния торговых посредников. Это объясняется прежде всего тем, что посредники имеют доступ к особенно важной информации о состоянии и поведении рынка, что позволяет производителям своевременно реагировать на происходящие на рынке изменения и использовать перспективные возможности. Предлагаемые в настоящее время зарубежными и отечественными учеными экономико-математические модели и методы, включая прогнозы анализа и планирования рациональных решений в условиях неопределенности, играют существенную роль в экономике управления для микро- и макроэкономических систем [6]. В общем, решение ряда управленческих задач в области экономики с применением математических методов и моделей ограничивается рамками функциональных задач в сфере маркетинга, финансового менеджмента, логистики, инвестирования, стратегического управления, экономического анализа. В специальной экономической литературе не рассматривается самостоятельная задача комплексного применения математических методов и моделей для повышения эффективности управления реальными микро- и макроэкономическими системами. Поэтому задача, состоящая в разработке комплекса взаимоувязанных экономико-математических моделей и методов их реализации с учетом особенностей функционирования конкретных систем управления в условиях рыночной экономики, является особенно актуальной.

Постановка и содержательная интерпретация задачи

Рассмотрим многокритериальную динамическую задачу, которая представлена упорядоченным набором

$$\Sigma, \Psi, \Upsilon, J\{U, \Upsilon, t_0, x_0\}. \qquad (1)$$

В (1) изменение управляемой системы Σ описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \gamma(u - x) \qquad (2)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0, \qquad (3)$$

где Ψ – множество стратегий U у ЛПР; Y – множество неопределенностей Y; $J\{U, \Upsilon, t_{0,} x_0\}$ – i-я компонента векторного критерия; $J\{U, Y, t_{0,} x_0\} = J_1\{U, Y, t_{0,} x_0\} .. J_N\{U, Y, t_{0,} x_0\}$.

Применяется также множество номеров критериев $N = \{1,\dots,N\}$.

Рассмотрим многокритериальную задачу о выпуске и сбыте товара с участием посредника. Обозначим через $Y_1(t)$ – количество товара на складе у производителя; $Y_2(t)$ – количество товара на складе у посредника; $Y_3(t)$ – количество товара у потребителя. Пусть $U(t)$ – темп производства; $P_1(t)$ – количество продаж в единицу времени производителем; $P_2(t)$ – количество продаж в единицу времени посредником; k_1 – коэффициент потребления; k_2 – коэффициент затрат на хранение единицы товара производителя; k_3 – коэффициент затрат на хранение единицы товара посредника; $c_1(t)$ – цена единицы товара у производителя; $c_2(t)$ – цена единицы товара у посредника. Динамика изменений введенных величин описывается следующей системой уравнений:

$$Y_1' = U - P_1; \qquad (4)$$

$$Y_2' = P_1 - P_2; \qquad (5)$$

$$Y_3' = P_2 - kY_3; \qquad (6)$$

$$P_1 = Y_1(a_1 - b_1 c_1); \qquad (7)$$

$$P_2 = Y_2(a_2 - b_2c_2)\,, \tag{8}$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 – положительные постоянные.

Прибыль производителя и потребителя определяется функционалами:

$$J_1 = \int_0^T (c_1P_1 - k_1U - k_2Y_1)dt \to \max\,; \tag{9}$$

$$J_2 = \int_0^T (c_2P_2 - c_1P_1 - k_3Y_2)dt \to \max\,. \tag{10}$$

Взвешенный доход *J(t)* с учетом введенных обозначений определяется равенством:

$$J(\alpha) = \alpha J_1 + (1-\alpha)J_2\,; \tag{11}$$

$$J(\alpha) = \int_0^T (2\alpha c_1P_1 - c_1P_1 - k_1U - k_2Y_1 - k_3Y_2 + c_2P_2 - \alpha c_2P_2 + \alpha k_3Y_2)dt \to \max\,. \tag{12}$$

Для решения задачи (12) применим принцип максимума Л.С. Понтрягина. Составим функцию Гамильтона

$$\begin{aligned} H = \;& 2\alpha c_1P_1 - c_1P_1 - k_1U - k_2Y_1 - k_3Y_2 + c_2P_2 - \alpha c_2P_2 + \\ & + \alpha k_3Y_2 - \lambda_1(U - P_1) - \lambda_2(P_1 - P_2) - \lambda_3(P_2 - kY_3)\,, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ – вспомогательные функции.

В силу линейности гамильтониана по *U* его минимум по этой переменной в зависимости от знака λ_1+k_1 достигается либо при $U\equiv 0$ либо при $U\equiv U_0$, т.е.:

$$U^* = \begin{cases} 0,\ \lambda_1 + k_1 \le 0, \\ U_0,\ \lambda_1 + k_1 > 0. \end{cases} \tag{14}$$

Сопряженные переменные удовлетворяют уравнениям (15) – (14):

$$\dot\lambda_3 = 0\,, \tag{15}$$

$$\dot\lambda_2 = c_2(1-\alpha) - \frac{k_3(1-\alpha)}{a_2 - b_2c_2}\,, \tag{16}$$

$$\dot\lambda_1 = c_2(1-\alpha) - \frac{k_3(1-\alpha)}{a_2 - b_2c_2} + c_1(1-2\alpha) + \frac{\alpha k_2}{a_1 - b_1c_1} \tag{17}$$

с начальными условиями

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = 0\,.$$

Из условия максимума функции (13) по c_1 и c_2 получаем:

$$c_1^* = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2(2\alpha - 1)} + \frac{a_1}{2b_1}\,; \tag{18}$$

$$c_2^* = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{2(1-\alpha)} + \frac{a_2}{2b_2}\,. \tag{19}$$

При *α=0,5* получим следующее частное решение данной задачи (4) – (8):

$$J_1 = \int_0^T (c_1p_1 - k_1u - k_2y_1)dt \to \max; \tag{20}$$

$$J_2 = \int_0^T (c_2p_2 - c_1p_1 - k_3y_2)dt \to \max\,. \tag{21}$$

Взвешенный доход *J(t)* определяется равенством

$$J = J_2 + J_1 = \int_0^T (c_2 p_2 - k_1 u - k_2 y_1 - k_3 y_2) dt \to \max . \quad (22)$$

Гамильтониан будет иметь вид

$$H = c_2 p_2 - k_1 u - k_2 y_1 - k_3 y_2 - \lambda_1 (u - p_1) - \lambda_2 (p_1 - p_2) - \lambda_3 (p_2 - k y_3). \quad (23)$$

Решение системы выпишется в виде:

$$\dot{\lambda}_3 = 0; \quad (24)$$

$$\dot{\lambda}_2 = c_2 - \frac{k_3}{a_2 - b_2 c_2}; \quad (25)$$

$$\dot{\lambda}_1 = c_2 - \frac{k_3}{a_2 - b_2 c_2} + \frac{k_2}{a_1 - b_1 c_1}; \quad (26)$$

$$U^* = \begin{cases} 0, \ \lambda_1 + k_1 \ge 0; \\ U_0, \ \lambda_1 + k_1 < 0; \end{cases} \quad (27)$$

$$c_1^* = \begin{cases} 0, \ \lambda_1 - \lambda_2 < 0; \\ c_{1\max}^*, \ \lambda_1 - \lambda_2 \ge 0; \end{cases} \quad (28)$$

$$c_2^* = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{2} + \frac{a_2}{2 b_2}. \quad (29)$$

На рис. 1-8 показано численное решение систем (4)-(8), (15)-(21).

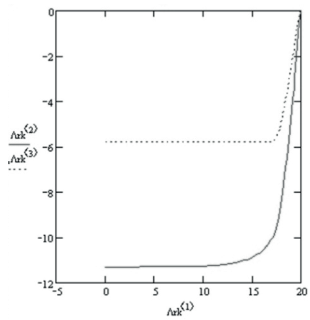

Рис. 1. Зависимость λ_1, λ_2, λ_3 от t при $a=0,25$

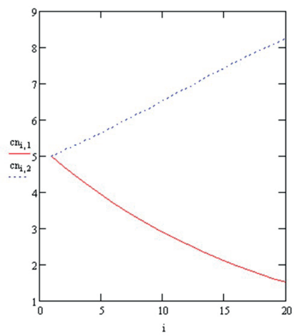

Рис. 2. Оптимальная цена на промежутке от 0 до t при $a=0,25$

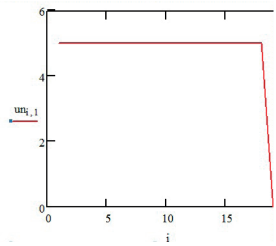

Рис. 3. Оптимальный темп производства на промежутке *(0; t)* при *a=0,25*

Анализируя данные, полученные на рис. 1-3, можно сделать вывод, что при достижении некоторого порогового значения (в нашем примере при *t=18*) производство «выключается» и на оставшемся до *T=20* промежутке происходит реализация уже произведенного товара.

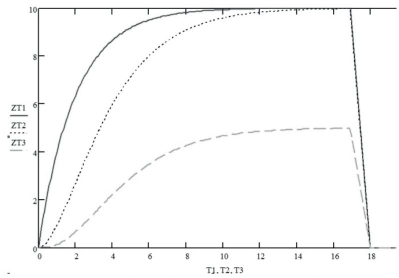

Рис. 4. Зависимость y_1, y_2, y_3 от *t* при *a=0,25*

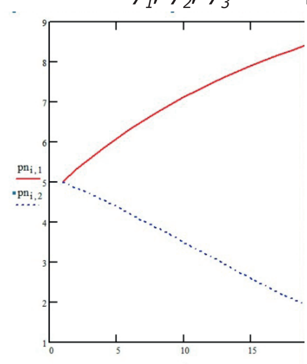

Рис. 5. Количество продаж в единицу времени производителем
и посредником при *a=0,25*

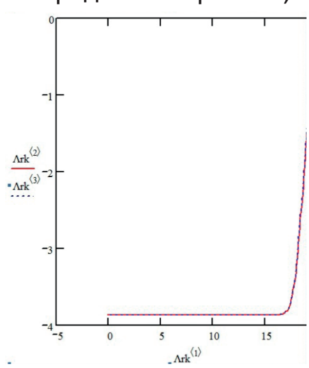

Рис. 6. Зависимость λ_1, λ_2, λ_3 от t при *a=0,5*

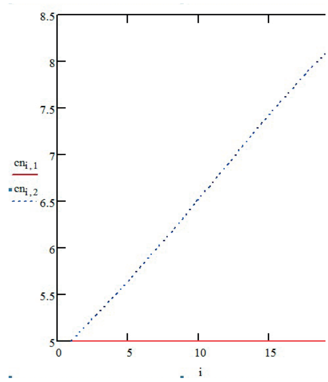

Рис. 7. Оптимальная цена на промежутке от 0 до *t* при *a=0,5*

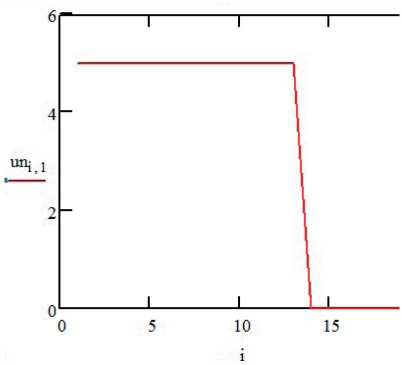

Рис. 8. Оптимальный темп производства на промежутке от 0 до *t* при *a=0,5*

Заключение

Анализируя результаты экспериментов, показанных на рисунках 4-8, можно сделать вывод, что при увеличении параметра α «выключение» производства наступает раньше, т.е. перераспределение дохода (при *0,5<a<0,75*) от производителя к поставщику негативно сказывается на процессе производства.

Список источников

1. Бутова Л.В., Салимгареев Н.И., Минаев Е.С. Определение необходимого условия оптимальности взвешенного функционала в многокритериальной задаче // *Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Сборник научных трудов по материалам Международной заочной научно-практической конференции*, 2014, no. 5, ч. 1 (10-1), с. 23-26.
2. Задаянчук А.И., Попова М.С., Стрижов В.В. Выбор оптимальной модели классификации временных рядов // *Информационные технологии*, 2016, т. 22, no. 4, с. 313-318.
3. Коляда Л.Г., Масицева А.А., Петрова В.А., Пупышева Г.И., Ужегов Н.С. Устойчивость и оптимальность управляемых систем // *Национальная ассоциация ученых*, 2015, no. 5-5, с. 24-28.
4. Монастырный Е.А., Спицын В.В. Оптимальность пропорций инновационных систем России и регионов // *Инновации*, 2015, no. 5 (199), с. 40-45.
5. Подиновский В.В. Потенциальная оптимальность в многокритериальной оптимизации // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2014, т. 54, no. 3, с. 415.
6. Розен В.В. *Цель – оптимальность – решение: математические модели принятия оптимальных решений*. Москва, Радио и связь, 1982.
7. Соболь И.М., Статников Р.Б. *Выбор*

оптимальных параметров в задачах со многими критериями. Москва, Наука, 1981.

8. Сумина Р.С., Шишкина Л.А., Алейникова Н.А. Математическая модель ранжирования объектов с использованием нечетких переменных // *Современная экономика: проблемы и решения*, 2014, no. 11, с. 7-14.

9. Федяшова Е.А. Модель оптимального управления в эксплуатационной экономике // *Экономика и управление в XXI веке: наука и практика*, 2014, no. 1, с. 216-219.

10. Цехановский В.В., Чертовской В.Д. Программная структура модели процесса оптимального планирования в многоуровневой системе // *Известия Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета ЛЭТИ*, 2016, т. 4, с. 20-24.

DEVELOPMENT OF THE NUMERICAL SOLUTION ALGORITHM FOR MULTICRITERIAL PROBLEM OF OPTIMUM PRODUCTION AND SALES

Butova Lilia Vladislavovna, Cand. Sc. (Eng.)
Uryvskaya Tatiana Yurievna, Cand. Sc. (Phys.-Math.)
Korchagina Elena Vasilevna, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.
Shishkina Larisa Aleksandrovna, Cand. Sc. (Econ.), Assoc. Prof.

[1] Russian Air Force Military Educational and Scientific Center «Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin», Starykh Bolshevikov st., 54a, Voronezh, Russia, 394064; e-mail: LVButova@mail.ru

[2] Voronezh Institute of Federal Penitentiary Service of Russia, Irkustkaya st., 1a, Voronezh, Russia, 394072; e-mail: tvs-helen@yandex.ru

[3] Voronezh State Agricultural University, Muchurina st., 1, Voronezh, Russia, 394087; e-mail: kz2009kzaf@gmail.com

Purpose: obtaining an optimality condition for a weighted criterion for the multicriteria problem of production and sales of enterprise products. *Discussion*: the solution of the multicriteria problem depends on the detection of all parameter's characteristic. The article defines the main trajectories of the parameter change at different instants of time. The Hamilton function allows to obtain particular solutions to the multicriteria problem of production and sales. *Results*: the article describes a numerical algorithm that allows finding the optimal solution to the problem of production and sales of enterprise products.

Keywords: algorithm, control, optimality condition.

References

1. Butova L.V., Salimgareev N.I., Minaev E.S. Opredelenie neobkhodimogo usloviia optimal'nosti vzveshennogo funktsionala v mnogokriterial'noi zadache. *Aktual'nye napravleniia nauchnykh issledovanii XXI veka: teoriia i praktika. Sbornik nauchnykh trudov po materialam mezhdunarodnoi zaochnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii,* 2014, no. 5, vol. 1 (10-1), pp. 23-26. (In Russ.)

2. Zadaianchuk A.I., Popova M.S., Strizhov V.V. Vybor optimal'noi modeli klassifikatsii vremennykh riadov. *Informatsionnye tekhnologii*, 2016, vol. 22, no. 4, pp. 313-318. (In Russ.)

3. Koliada L.G., Masitseva A.A., Petrova V.A., Pupysheva G.I., Uzhegov N.S. Ustoichivost' i optimal'nost' upravliaemykh sistem. *Natsional'naia Assotsiatsiia Uchenykh*, 2015, no. 5-5, pp. 24-28. (In Russ.)

4. Monastyrnyi E.A., Spitsyn V.V. Optimal'nost' proportsii innovatsionnykh sistem rossii i regionov. *Innovatsii*, 2015, no. 5 (199), pp. 40-45. (In Russ.)

5. Podinovskii V.V. Potentsial'naia optimal'nost' v mnogokriterial'noi optimizatsii. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2014, vol. 54, no. 3, pp. 415. (In Russ.)

6. Rozen V.V. *Tsel' – optimal'nost' –*

reshenie: matematicheskie modeli priniatiia optimal'nykh reshenii. Moscow, Radio i sviaz', 1982. (In Russ.)

7. Sobol' I.M., Statnikov R.B. *Vybor optimal'nykh parametrov v zadachakh so mnogimi kriteriiami*. Moscow, Nauka, 1981. (In Russ.)

8. Sumina R.S., Shishkina L.A., Aleinikova N.A. Matematicheskaia model' ranzhirovaniia ob"ektov s ispol'zovaniem nechetkikh peremennykh. *Sovremennaia ekonomika: problemy i resheniia*, 2014, no. 11, pp. 7-14. (In Russ.)

9. Fediashova E.A. Model' optimal'nogo upravleniia v ekspluatatsionnoi ekonomike. *Ekonomika i upravlenie v XXI veke: nauka i praktika*, 2014, no. 1, pp. 216-219. (In Russ.)

10. Tsekhanovskii V.V., Chertovskoi V.D. Programmnaia struktura modeli protsessa optimal'nogo planirovaniia v mnogourovnevoi sisteme. *Izvestiia Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo elektrotekhnicheskogo universiteta LETI*, 2016, vol. 4, pp. 20-24. (In Russ.)