УДК 336.781.5

О НЕПРЕРЫВНЫХ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКАХ ПОГАШЕНИЯ КРЕДИТА, ВЫДАННОГО ПОД СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

Пронин Лев Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доц.

Санкт-Петербургский государственный экономический университет, ул. Садовая, 21, Санкт-Петербург, Россия, 191023; e-mail: lepronin@yandex.ru; jsrozkov@yandex.ru

Цель: условная оптимизация погашения кредита при условии сложного непрерывного начисления процентов по ставке р на непрерывный финансовый поток заданной показательной плотности вида: $a(t) = \alpha + \beta(e^{\gamma t} - 1)$, $\alpha \geq 0, \beta, \gamma \in R$. *Обсуждение*: особенностью работы является одновременный учет временной и безвременной стоимости денег. Введено понятие эквивалентности процентных ставок погашения кредита. Она является продолжением аналогичных исследований для простого начисления процентов. Сохранены все авторские определения и термины из этой работы. *Результаты*: предлагается широкий выбор возможных планов погашения кредита, выданного под сложный (непрерывный) процент. На практике большей частью применяется равномерное погашение кредита и иногда – по прогрессиям. Планы погашения по показательным кривым плотности позволяют учитывать более тонкие финансовые возможности или интересы как заемщика, так и кредитора.

Ключевые слова: финансовые потоки, экстремаль, процентная ставка, погашение кредита.

DOI: 10.17308/meps.2017.8/1744

Введение

Данным исследованиям предшествовала следующая постановка задачи: минимизировать номинальную суммарную величину *S* непрерывных платежей, погашающих кредит K_0, выданный на срок погашения *T* по простой или непрерывной (сложной) ставке *p*, относящейся к принятой единице времени. При этом подразумевается непрерывное начисление процентов с коэффициентами наращения *r(p;t) = 1 + pt* или *r(p;t) = ept.*

Для однородного дискретного потока и для непрерывного степенного потока с непрерывным простым начислением процентов эта задача была рассмотрена в работах [9] и [6].

В настоящей статье рассматривается погашение кредита при сложном непрерывном начислении процентов. Результаты легко перенести на общепринятое погашение кредитов дискретными платежами.

Общая теория финансовых расчетов представлена в работе [12].

Пусть *a(t)* – непрерывная плотность финансового потока на промежутке от *0* до *T*. Тогда математическая формулировка задачи имеет вид: минимизировать функционал

$$S = F\left[a(t)\right] = \int_0^T a(t)\,dt$$

при условии (точного погашения кредита):

$$\int_0^T a(t)\,r(p;T-t)\,dt = K_0 r(p;T) = K_T.$$

Если не налагать на искомую функцию *a(t)* никаких ограничений, то решением, очевидно, является обобщенная функция $2K_0\delta(t), t>0$, где $\delta(t)$ – функция Дирака. В реальности это означает, что кредит погашается в момент его выдачи, т.е. фактически *T = 0*.

Если потребовать от функции a(t) только условие непрерывности, то задача имеет решение в виде обобщенного предела последовательности непрерывных на *[0;T]* функций, стремящихся к $2K_0\delta(t)$.

Ситуация меняется, если сузить область искомых функций до определенного вида. Как показывают дальнейшие выкладки, тогда задача может иметь определенное решение. Естественно решать задачу на множестве плотностей:

$$a(t) = \alpha + \beta(e^{\gamma t} - 1);\ \alpha \ge 0; \beta, \gamma \in R; a(t) \ge 0; t \in [0;T].$$

Такой выбор обуславливается простотой интегрирования и тем, что параметр α приобретает смысл начальной (стартовой) плотности платежей.

Потоки платежей с плотностями *a(t)* указанного вида будем называть допустимыми, если они удовлетворяют условию точного погашения кредита.

Допустимые плотности являются либо возрастающими, либо убывающими, либо постоянными на *[0;T]* функциями. Их графики назовем траекториями погашения кредита

Задача формально имеет следующую математическую формулировку:

$$\begin{cases} S = \int_0^T \left(\propto + \beta\left(e^{\gamma t} - 1\right)\right) dt \to min \\ \int_0^T (\propto + \beta\left(e^{\gamma t} - 1\right) e^{p(T-t)} dt = K_0 e^{pT} = K_T \\ a(t) \ge 0 \end{cases}.$$

После интегрирования она превращается при каждом фиксированном значении параметра *γ ≠ p* в обычную задачу математического анализа на условный экстремум функции двух переменных:

$$\begin{cases} S(\propto;\beta) = (\alpha - \beta)T + \frac{\beta}{\gamma}\left(e^{\gamma T} - 1\right) \to min \\ \frac{\alpha}{p}\left(1 - e^{-pT}\right) - \frac{\beta}{p}\left(1 - e^{-pT}\right) + \frac{\beta}{\gamma - p}\left(e^{(\gamma - p)T} - 1\right) = K_0 \\ a(t) \ge 0, \gamma \ne p \end{cases}.$$

Рассмотрим частные случаи.

Постоянная плотность платежей: $a(t)=\alpha,\ \beta=0$.

Этот частный случай имеет важное значение, т.к. в банковской практике широко применяется погашение кредита равными аннуитетами. Он важен также и для дальнейших исследований.

Величина a, сумма платежей S и коэффициент k платежей определяются из условия погашения однозначно:

$$\propto=\propto^{*}=\frac{pK_0e^{pT}}{e^{pT}-1};\quad S=S^{*}=\alpha T=\frac{pTK_0e^{pT}}{e^{pT}-1}\ ;\ k=\frac{S}{K_0}=\frac{pTe^{pT}}{e^{pT}-1}.$$

График постоянной плотности изображен на рис. 1 жирной горизонтальной линией.

Величину $\hat{P}$ = k – 1 мы назовем итоговой ставкой по сумме платежей, а величину $\bar{p}=\dfrac{k-1}{T}$ – средней процентной ставкой платежей за единицу времени.

На практике, в случае досрочного погашения долга, необходимо также знать его остаток, современная стоимость которого находится по формуле:

$$R_0(t)=K_0-e^{-pT}\int_0^t a(\tau)e^{p(T-\tau)}d\tau=K_0\,\frac{e^{p(T-t)}-1}{e^{pT}-1}.$$

Сумма платежа, погашающая остаток долга, составит тогда:

$$R(t)=R_0(t)e^{pt}.$$

Сравним эти результаты с аналогичными результатами для непрерывного начисления простого процента, полученными в работе [7]:

$$\alpha=\frac{K_0}{T}\times\frac{1+pT}{1+{pT}/{2}};\quad S=\propto T=K_0\times\frac{1+pT}{1+{pT}/{2}};\ k=\frac{1+pT}{1+{pT}/{2}}\ ;$$

$$R_0(t)=K_0-\frac{\propto}{1+pT}\int_0^t\big(1+p(T-\tau)\big)d\tau=K_0\,\frac{(t-T)(pt-pT-2)}{T(2+pT)}\ ;$$

$$R(t)=R_0(t)(1+pt).$$

Легко видеть их принципиальное различие. Если при простом начислении коэффициент выплат является величиной ограниченной *(k < 2)* независимо от срока погашения и процентной ставки, то при сложном начислении этот коэффициент неограниченно возрастает с их ростом. Средняя процентная ставка $\bar{p}=\dfrac{k-1}{T}$ платежей при простом начислении процентов стремится, монотонно убывая, к нулю при $T\to\infty$, в то время как при сложном начислении она, монотонно возрастая, стремится к номинальной ставке p.

Проиллюстрируем сказанное примером.

Пример 1. Прежде всего заметим, что знак «%» заменяет у нас множитель 0,01. Предположим, что кредит $K_0 = 100$ тыс. рублей был выдан на срок $T= 5$ лет. Рассмотрим два случая.

а) Кредит выдан по простой ставке $p = 20\%$ в год. Подсчет показывает, что $k = 1,(3)$, т.е. итоговый процент за 5 лет составит $\hat{P}$ = 33,33%, а за год в среднем $\bar{p} = 6{,}67\%$. Сумма платежей будет равна $S = 133333$ руб. , и плотность платежей $a = 26666{,}67$ руб. в год $= 2222{,}22$ руб. в месяц. Платеж, погашающий остаток долга на конец 4-го года, будет равен $R(4) = 26400$ руб.

б) Кредит выдан по сложной (непрерывной) ставке $p = 20\%$ в год.

Используя формулы, получаем: $k = 1{,}58$; $\hat{p} = 58\%$; $\bar{p} = 11{,}6\%$ в год; $S = 158197{,}65$ руб.: $a = 31639{,}53$ руб. в год $= 2636{,}63$ руб. в месяц; $R(4) = 28676{,}37$ руб.

Обозначим через p_1 и p_2 процентные ставки соответственно при простом непрерывном и сложном непрерывном начислениях процентов на непрерывные потоки платежей. Назовем эти ставки эквивалентными ставками погашения кредита, если при этих ставках кредит K_0 погашается одним и тем потоком наличных платежей плотности $a(t)$.

Очевидно, при равномерном погашении $(a(t) = a)$ эти ставки связаны соотношением:

$$\frac{1}{T} \times \frac{1 + p_1 T}{1 + p_1 T / 2} = \frac{p_2 e^{p_2 T}}{e^{p_2 T} - 1} = \frac{\propto}{K_0} = \lambda.$$

Заметим, что при равномерном погашении эквивалентные ставки не зависят от величины кредита, но зависят от его срока.

В общем случае, при произвольном потоке платежей, условие эквивалентности ставок погашения кредита выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{(1 + p_1 T)} \int_0^T a(t)\left(1 + p_1 (T - t)\right) dt = \frac{1}{e^{p_2 T}} \int_0^T a(t) e^{p_2 (T - t)} dt.$$

Пример 2. а) Пусть при начальных условиях примера 1 сложная ставка равна $p_2 = 0{,}2 = 20\%$; тогда $a = 31639{,}53$ руб. в год, $\lambda = 0{,}31639$. Найдем эквивалентную ей простую ставку p_1:

$$p_1 = \frac{1 - T\lambda}{T\left(\frac{T\lambda}{2} - 1\right)} = 0{,}5568 = 55{,}68\%.$$

Это означает, что при всех ставках меньших, чем полученная величина, простое погашение будет более выгодным для заемщика.

б) Пусть теперь задана простая ставка $p_1 = 0{,}2$. Согласно примеру 1, $a = 26666{,}67$ руб. в год и $\lambda = 0{,}26667$. Для нахождения эквивалентной сложной ставки используем уравнение

$$\lambda\left(1 - e^{-p_2 T}\right) = p_2,$$

которое можно решить методом итераций, т.к. производная левой части меньше единицы. В результате получаем $p_2 = 0{,}1214 = 12{,}14\%$.

О допустимых потоках погашения кредита

Обозначим через a^* плотность постоянного потока погашения кредита по сложной ставке. Это значение позволяет уточнить область допустимых плотностей.

Сначала исключим из рассмотрения недопустимые финансовые потоки. Таковыми являются: а) все убывающие потоки, стартовые плотности которых меньше a^*; б) все возрастающие потоки, стартовые плотности которых больше a^*. Значения их параметров: 1) $0 < a < a^*, \beta > 0, \gamma < 0$; 2) $0 < a < a^*, \beta < 0, \gamma > 0$; 3) $a > a^*, \beta > 0, \gamma > 0$; 4) $a > a^*, \beta < 0, \gamma < 0$. Они определяются знаками первой и второй производных функции плотности.

Таким образом, плотности допустимых потоков, кроме постоянного, можно подразделить на четыре подсемейства:

1) возрастающие выпуклые с параметрами $0 \le a < a^*, \beta < 0, \gamma < 0$;

2) возрастающие вогнутые с параметрами $0 \le a < a^*, \beta > 0, \gamma > 0$;

3) убывающие выпуклые с параметрами $a > a^*, \beta < 0, \gamma > 0$;

4) убывающие вогнутые с параметрами $a > a^*, \beta > 0, \gamma < 0$.

Понятно, что концы их траекторий должны лежать на прямых $t = 0$ и $t = T$ (см. рис. 1). Траектории любых двух допустимых потоков должны пересекаться, т.к. в противном случае один из этих потоков либо не погашает кредит, либо погашает его избыточно, т. е. не является допустимым. При различных значениях параметра γ траектории могут пересекаться дважды.

Каждая траектория определяет не только план погашения кредита, но и номинальную сумму платежей. Она, в силу геометрического смысла определенного интеграла, численно равна площади фигуры, заключенной под траекторией.

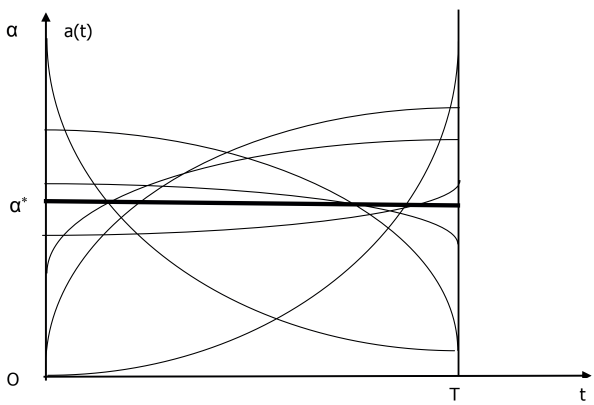

Рис. 1. Примеры траекторий

Замечание. В дальнейшем будет показано, что плотность равномерного погашения является граничной для каждого из подсемейств при $a \to a^*$.

Пример 3. Покажем, как определить траекторию при заданных значениях параметров a и γ. Условия остаются прежними: $K_0 = 100000$ руб., $p = 0{,}2$, $T = 5$ лет. В примере 1 было вычислено значение $a^* = 31639{,}53$ руб./год. Пусть $a = 20000$ руб./год, $\gamma = 1$ (возрастающая вогнутая траектория). Интегрируем условие погашения

$$\int_0^T \left(\alpha + \beta(e^{\gamma t} - 1)\right)e^{-pt)}dt = K_0.$$

Получаем:

$$\frac{\alpha}{p} - \frac{\alpha}{p}e^{-pT} + \frac{\beta}{p}e^{-pT} + \frac{\beta}{\gamma - p}e^{(\gamma - p)T} - \frac{\beta}{p} - \frac{\beta}{\gamma - p} = K_0.$$

После подстановки заданных значений получаем уравнение: *63212,06 +63,84β = 100000*, из которого определяем параметр *β = 576,25*.

Таким образом, плотность данного потока равна

$$a(t) = 20000 + 576,25\left(e^{t} - 1\right).$$

Сумма платежей: $S = \int_0^5 a(t)\,dt = 182065,58$ руб.; $\hat{p} = 82,07\%$; $\overline{p} = 16,41\%$.

Особые траектории и экстремали *(γ = p)*

Далее мы будем решать задачу (поиск экстремалей) для каждого фиксированного значения параметра *γ*. Тем самым выделяются два подсемейства траекторий из четырех основных семейств: с *β > 0* и с *β < 0*.

При интегрировании условия погашения кредита, как мы видели ранее, в знаменателях некоторых дробей появляется величина *γ – p.*

Рассмотрим отдельно особый случай, когда *γ = p*, т.е. $a(t) = \alpha + \beta(e^{pt} - 1)$. Назовем соответствующие траектории и экстремали, если они существуют, особыми.

При подстановке в общую математическую формулировку задачи *γ = p* и последующем интегрировании получаем задачу:

$$S(\propto;\beta) = (\alpha - \beta)T + \frac{\beta}{p}\left(e^{pT} - 1\right) \to min$$

при условии

$$\frac{\propto - \beta}{p}\{1 - e^{-pT}) + \beta T = K_0.$$

Заметим, что условие погашения кредита в этом случае можно также получить с помощью предельного перехода при *γ → p*. При этом функция *S* имеет в точке *γ = p* устранимый разрыв.

Очевидно, что при *α → α** особые траектории стремятся к горизонтальной траектории равномерного погашения.

Решение задачи можно значительно упростить по сравнению с традиционными методами (применение функции Лагранжа), если использовать следующее утверждение и его следствие:

При *γ = p* сумма *S* платежей, затраченных на погашение кредита, убывает с ростом начальной плотности *α*.

Следствие. Если при *γ = p* траектория является экстремалью задачи на минимум, то она проходит через точку *(T; 0)*, т.е. *a(T) = 0*. В задаче на максимум экстремаль проходит через начало координат, т.е. *a(0) = 0*.

Для доказательства утверждения используем тот факт, что полная производная функции *S* по параметру *α*

$$\frac{dS}{d\propto} = \frac{\partial S}{\partial \propto} + \frac{\partial S}{\partial \beta} \times \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$$

при условии погашения есть величина постоянная. Следовательно, функция *S* линейно зависит от *α*.

Таким образом, вместо установления знака производной (что весьма затруднительно) достаточно установить знак разности погашающих сумм на двух различных траекториях.

Рассмотрим сначала траекторию, для которой *a(T) = 0*. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\beta-\alpha}{p}(e^{-pT}-1)+\beta T=K_0 \\ \alpha+\beta\left(e^{pT}-1\right)=0 \end{cases}.$$

В результате получаем:

$$\propto=\propto^{**}=\frac{K_0p\left(e^{pT}-1\right)}{e^{pT}-1-pT};\beta=-\frac{K_0p}{e^{pT}-1-Tp};$$

$$S=S^{**}=\left(\propto-\beta\right)T-\frac{\alpha}{p}=\frac{K_0\left(pTe^{pT}-e^{pT}+1\right)}{e^{pT}-pT-1}.$$

В качестве второй траектории выберем ту, для которой *a = a**, т.е. траекторию равномерного погашения. Для нее было установлено, что

$$S=S^{*}=\frac{pTK_0e^{pT}}{e^{pT}-1}.$$

Определим знак разности $S^{**}-S^{*}=K_0\dfrac{e^{pT}\left(p^2T^2-e^{pT}+2\right)-1}{\left(e^{pT}-pT-1\right)\left(e^{pT}-1\right)}$.

Знаменатель этой дроби, очевидно, положителен. Установим знак числителя. Покажем, что $e^{pT}\left(p^2T^2-e^{pT}+2\right)<1$. Действительно, это неравенство равносильно неравенству $p^2T^2-e^{pT}+2<e^{-pT}$. Разложим обе части неравенства в ряд Тейлора:

$$p^2T^2+2-1-pT-\frac{p^2T^2}{2}-\frac{p^3T^3}{6}-\ldots<1-pT+\frac{p^2T^2}{2}-\frac{p^3T^3}{6}+\ldots$$

Получили неравенство

$$-\frac{p^2T^2}{2}-\frac{p^4T^4}{24}-\ldots<\frac{p^2T^2}{2}+\frac{p^4T^4}{24}+\ldots,$$

которое выполняется для всех значений *pT*. Утверждение доказано.

В силу следствия особая траектория, у которой *a(T) = 0*, является экстремалью задачи на минимум, а траектория, у которой a(0) = 0, является экстремалью задачи на максимум. Параметры последней – следующие:

$$\propto=0;\beta=\frac{K_0p}{e^{-pT}+pT-1};S_{max}=K_0\frac{e^{pT}-pT-1}{e^{-pT}+pT-1}.$$

Обозначим начальную плотность особой экстремали задачи на минимум через *a***. Очевидно, *a** > a**, т.е. сумма платежей на этой экстремали меньше, чем сумма равномерных платежей.

Особые экстремали изображены на рис. 2 жирными линиями, а остальные – тонкими. Жирной штриховой линией изображена особая экстремаль задачи на максимум. Левые концы выпуклых траекторий (*β < 0*) заключены между *a** и *a***, а вогнутых (*β > 0*) – между 0 и *a**.

Таким образом, все суммы платежей при γ = p ограничены в пределах:

$$S_{min}\le S\le S_{max},\ \text{или}\ K_0\frac{pTe^{pT}-e^{pT}+1}{e^{pT}-pT-1}\le S\le K_0\frac{e^{pT}-pT-1}{e^{-pT}+pT-1}.$$

Кроме того, сумма платежей равномерного погашения является точной верхней гранью для сумм платежей на подсемействе особых выпуклых траекторий и точной нижней гранью для сумм платежей на подсемействе особых вогнутых траекторий.

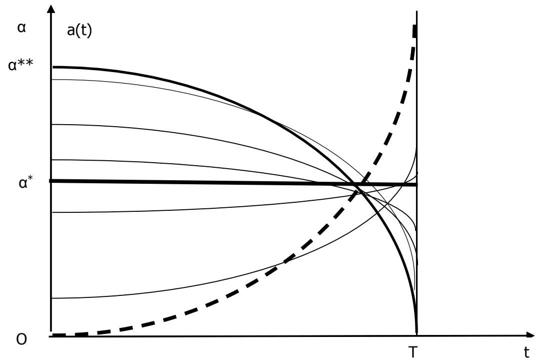

Рис. 2. Особая экстремаль и особые траектории

Пример 4. Приведем результаты расчетов, пропуская выкладки, для особой экстремали при исходных условиях предыдущих примеров: $\propto^{**} = 47844,22$ руб./год; $\beta = -27844,22$; $S_{min} = 139221,10$ руб; k = 1,3922; $\hat{P}$ =39,22%; $\bar{p}$ = 7,84%. Уравнение особой экстремали:

$$a(t) = 47844,22 - 27844,22\left(e^{0,2t} - 1\right).$$

Очевидно, эта экстремаль выпукла вверх.

Сравнение с результатами, полученными в примере 1, показывает определенные преимущества и недостатки особой экстремали. К преимуществам относится значительно меньшая сумма платежей погашения, а к недостаткам – большая стартовая плотность потока платежей. Кстати, последнее характерно для ипотеки.

В банковской практике применяются дискретные платежи. Если они достаточно часты, то их значения можно приближенно взять равными $a_i = a(t_i)\Delta t_i$ и составить план погашения. Накопившуюся погрешность можно ликвидировать, например, при последнем платеже.

Для примера составим прикидочный, довольно грубый, дискретный план погашения кредита из последнего примера, приняв за интервал деления срока 1 год. Промежуточные значения t_i будем брать как середины каждого года, они же будут и моментами платежей.

Таблица 1

Примерный план погашения кредита по особой экстремали

Кредит: 100000 руб. Срок: 5 лет. Ставка: 20%. Конечная стоимость: 271828,18 руб.					
№	Дата платежа	Платеж *ai=a(i-0,5)*	Современная стоимость платежа	Остаток долга *t = 0*	Конечная стоимость платежа
1	Середина 1-го года	44915,82	40641,51	59358,49	110475,09
2	Середина 2-го года	38102,67	28227,15	31131,34	76729,35
3	Середина 3-го года	29781,08	18063,14	13068,20	49100,70
4	Середина 4-го года	19617,07	9741,55	3326,65	26480,27
5	Середина 5-го года	7202,71	2928,40	398,25	7960,23
Итого		139619,35	99601,75	-	270745,64

Расчеты велись с коэффициентом наращения $r = e^{pt}$. Как видим, даже с таким крупным интервалом между платежами получен довольно приемлемый результат. Для устранения дисбаланса заемщику достаточно в конце 5-го года доплатить остаток a_T = 271828,18 – 270745,64 = 1082,54 руб.

Если банк ведет расчеты по сложным ставкам с капитализациями, то он должен перейти на ставку, эквивалентную непрерывной ставке *p* [9]. Это только усложняет расчеты. Мы давно рекомендуем применение непрерывной сложной ставки вместо сложных ставок с капитализациями.

Классификация траекторий по параметрам *a* **и** *γ*

Приведем без доказательства обобщение утверждения из предыдущего раздела.

При каждом фиксированном значении параметра *γ* сумма *S* платежей, затраченных на погашение кредита, убывает с ростом начальной плотности *a*.

Следствие. Если при фиксированном *γ* траектория является экстремалью задачи на минимум, то она проходит через точку *(T; 0)*, т. е. *a(T) = 0.* В задаче на максимум экстремаль проходит через начало координат, т.е. *a(0) = 0*.

Кстати, вместо строгих математических выкладок для доказательства можно опираться на то, что при увеличении платежей и более раннем их внесении увеличивается и их конечная стоимость с учетом временного фактора.

Таким образом, при каждом фиксированном значении *γ > 0* конфигурация экстремалей и траекторий, показанная на рис. 2, сохраняется.

Для уточнения зависимости экстремалей от параметров *a* и *γ* рассмотрим случай линейной плотности платежей:

При решении системы

$$\begin{cases} \propto + \beta T = 0 \\ \int_0^T \left(\propto + \beta t \right) e^{-pt} dt = K_0 \end{cases}$$

получаем параметры линейной экстремали задачи на минимум:

$$\propto = \propto^{***} = \frac{K_0 p^2 T}{pT + e^{-pT} - 1};\ \beta = \frac{K_0 p^2}{1 - e^{-pT} - pT};\ S^{***} = \frac{\propto T}{2} = \frac{0,5 K_0 p^2 T^2}{pT + e^{-pT} - 1}.$$

Аналогично, полагая *a = 0*, получаем параметры линейной экстремали задачи на максимум:

$$\beta = \frac{K_0 p^2}{1 - pTe^{-pT} - e^{-pT}}; a\left(T\right) = \beta T; S = \frac{\beta T^2}{2}.$$

Наличие особой и линейной экстремалей позволяет уточнить границы параметров экстремалей и траекторий при различных значениях параметров *a* и *γ*. Расположение экстремалей из различных семейств траекторий проиллюстрировано на рис. 3. Сплошными жирными линиями изображены экстремали задачи на минимум при фиксированных значениях параметра *γ*, а штриховыми – экстремали задачи на максимум.

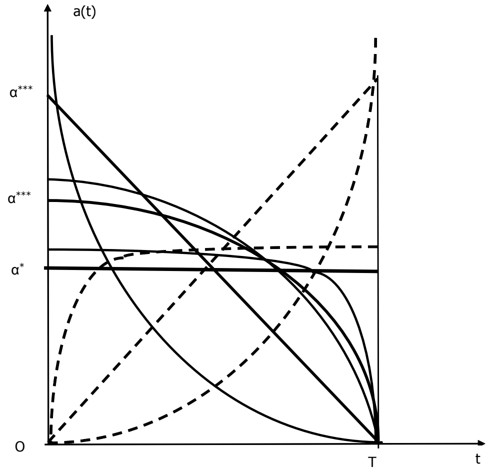

Рис. 3. Примеры экстремалей в зависимости от параметров *a* и *γ*

Теперь мы можем провести более точную классификацию семейств траекторий и их экстремалей. Прежде всего заметим, что при каждом фиксированном значении параметра *γ* семейство траекторий делится на два подсемейства, отличающихся друг от друга направлением выпуклости и возрастанием или убыванием. Напомним, что на каждой траектории выполняется условие точного погашения кредита.

1) Траектория равномерного погашения: $a = a^*$, $\beta = 0$, $\gamma \in R$. Она является граничной для всех подсемейств при любых *γ*. Условно ее можно включить во все подсемейства.

2) Семейство особых траекторий при $\gamma = p$. При $a^* < a \le a^{**}$, $\beta < 0$, $a(T) \ge 0$ они выпуклы и убывают, а при $0 \le a < a^*$– вогнуты и возрастают. Особая экстремаль задачи на минимум определяется условиями: $a = a^{**}$, $\beta < 0$, $a(T) = 0$, а особая экстремаль задачи на максимум получается при $a = 0$.

3) Две вспомогательные линейные экстремали задач на минимум и на максимум на семействе линейных траекторий $a(t) = \propto + \beta t$ $(0 \le a \le a^{***})$, которые получаются при $a(T) = 0$, $a = a^{***}$ и при $a = 0$ соответственно.

4) Множество подсемейств выпуклых убывающих траекторий, для которых $0 < \gamma < p$, $a^{**} < a < a^{***}$, $\beta < 0$. При каждом фиксированном γ экстремаль задачи на минимум и ее начальная плотность $a = a\gamma^*$ определяются условием $a(T) = 0$. При этом при $\gamma \to 0$ параметр $a_\gamma^* \to a^{***}$, а при $\gamma \to p$ параметр $a\gamma^* \to a^{**}$.

5) Множество подсемейств выпуклых убывающих траекторий, для которых $p < \gamma < +\infty$, $a^* < a < a^{**}$, $\beta < 0$. При каждом фиксированном γ экстремаль задачи на минимум и ее начальная плотность $a = a\gamma^*$ также определяются условием $a(T) = 0$. Кроме того, при $\gamma \to p$ параметр $a_\gamma \to a^{**}$, а при $\gamma \to +\infty$ параметр $\alpha_\gamma \to \alpha^*$.

6) Множество подсемейств вогнутых возрастающих траекторий с параметрами $0 \le a < a^*$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Траектории, проходящие через начало

координат, являются экстремалями задачи на максимум. Они дают верхнюю границу для суммы платежей на всевозможных траекториях при каждом фиксированном значении параметра $\gamma > 0$. Сумма платежей равномерного погашения является точной нижней гранью для сумм платежей на траекториях этого подсемейства.

Отличительная особенность этого множества подсемейств состоит в том, что на их «максимальных» экстремалях сумма платежей неограниченно возрастает при $\gamma \to +\infty$.

7) Множество подсемейств вогнутых убывающих траекторий с общими характеристиками $\alpha > \alpha^{***}$, $\beta > 0$, $\gamma < 0$. При каждом фиксированном γ экстремаль задачи на минимум определяется уравнением $a(T) = 0$ (и условием погашения кредита). На множестве экстремалей задачи на минимум этих подсемейств при $\gamma \to -\infty$ параметр $\alpha \to +\infty$ и итоговая ставка $\hat{P} \to 0$, т.е. $S \to K_0$. На этом множестве можно выделить последовательность плотностей, стремящихся (в обобщенном смысле) к $2K_0\delta(t)$, т. е. к абсолютному (безусловному) решению задачи. Очевидный недостаток – большие плотности начальных платежей.

8) Множество подсемейств выпуклых возрастающих траекторий с общими характеристиками $0 \le \alpha < \alpha^*$, $\beta < 0$, $\gamma < 0$. $\beta > 0$, $\gamma < 0$. При каждом фиксированном γ экстремаль задачи на максимум определяется условием $\alpha = 0$ (и условием погашения кредита). На этих экстремалях получаем верхние границы сумм платежей. При этом, если $\gamma \to -\infty$, то $S \to S^*$, а если $\gamma \to -0$, то S стремится к максимальной сумме платежей линейных траекторий (см. №8 табл. 2).

В подтверждение вышеизложенной классификации приведем таблицу примеров траекторий и экстремалей при различных значениях параметров. В таблице исходные величины выделены жирным шрифтом. Расчеты велись по выведенным выше формулам и уравнениям.

Таблица 2

Примеры траекторий и экстремалей

Кредит: 100000 руб. Срок: 5 лет. Непрерывная ставка: 20%.					
№	α	β	γ	a(T)	S
1	31639,53*	0	любое	31639,53	158197,65*
2	47844,22**	– 27844,22	0,2	0	139221,10**
3	40000	−14365,64	0,2	15315,78	148407,11
4	50000	−31548,45	0,2	−4209,14	Не существует
5	20000	20000	0,2	54365,64	171828,18
6	0	54365,64	0,2	93415,49	195249,24
7	54365,54***	−10873,19	Линейная экстремаль (min)	0	135914,84***
8	0	15137,69	Линейная экстремаль (max)	75688,45	189221,12
9	50829,88	−78353,96	0,1	0	137620,40
10	40000	−34135,69	0,1	17855,45	149232,97
11	20000	47524,08	0,1	98353,96	170678,42

Окончание табл. 2

Кредит: 100000 руб. Срок: 5 лет. Непрерывная ставка: 20%.					
№	α	β	γ	a(T)	S
12	0	129183,84	0,1	83805,60	192123,85
13	52525,51	−184932,44	0,05	0	136779,48
14	53985,75	−1052947,01	0,01	0	136089,04
15	36663,13	−248,71	1	0	147896,06
16	31639,53*	0	1	31639,53	158197,65
17	20000	576,16	1	104933,23	182052,76
18	0	1566,50	1	230922,32	223040,21
19	58502,92	148684,82	−0,1	0	134119,66
20	80000	267667,97	−0,1	−25319,14	Не существует
21	0	−175120,10	−0,1	68904,39	186556,60
22	20000	−64423,09	−0,1	45348,51	168630,34
23	122629,22	123461,10	−1	0	118469,75
24	220063,16	220073,15	−2	0	109981,61
25	0	−36954,03	−2	36952,35	147819,79

Заключение

В работе предлагается широкий выбор возможных планов погашения кредита, выданного под сложный (непрерывный) процент. На практике большей частью применяется равномерное погашение кредита и иногда – по прогрессиям. Планы погашения по показательным кривым плотности позволяют учитывать более тонкие финансовые возможности или интересы как заемщика, так и кредитора. Причем выбор именно экстремалей не обязателен.

Так как в банковской практике приняты дискретные, например, помесячные платежи, то для применения результатов данной работы необходимо преобразовать непрерывный поток платежей в дискретный, как это представлено, например, в табл. 1 настоящей работы.

При достаточной частоте платежей погрешностью, возникающей в связи с временной стоимостью непрерывных платежей внутри промежутков, можно пренебречь (или компенсировать ее в конце срока).

Кроме того, в этой работе мы имели возможность сравнить между собой два способа погашения кредита – по непрерывной простой ставке и по непрерывной сложной ставке на постоянной траектории. С помощью понятия эквивалентности ставок погашения в принципе это возможно для любой траектории. По нашему мнению, применение простых непрерывных ставок предпочтительнее, чем применение сложных, так как они более прозрачны, в то время как сложные ставки «маскируются» под их значительно меньшую величину (см. пример 2) .

В своих предыдущих работах мы неоднократно указывали не только на полезность непрерывных методов исследования финансовых операций, но и на достаточное простое переведение их результатов в практическую плоскость.

Список источников

1. Алексеев А.С., Зеленина Л.И. Моделирование задач управления финансовыми потоками // *Гуманитарные научные исследования*, 2015, no. 8 (48), с. 172-176.

2. Анцупов Г.Н. О применении метода непрерывного начисления процентов // *Молодой ученый*, 2016, no. 16 (120), с. 125-127.

3. Башарин Г.П. *Начала финансовой математики*. Москва, ИНФРА-М. 1998.

4. Кабанов Ю.М., Ширяев А.Н. Современные проблемы финансовой математики // *Теория вероятностей и ее применения*, 2016, т. 61, no. 1, с. 3-4.

5. Кочович Е. *Финансовая математика. Теория и практика финансово-банковских расчетов*. Москва, Финансы и статистика, 1994.

6. Пронин Л.Н., Рожков Ю.С. О непрерывных финансовых потоках погашения кредита, выданного под простой процент // *Научный журнал «EDUCATIO»*. Новосибирск, no. 3(10), вып. 2, 2015, с. 21-25.

7. Пронин Л., Рожков Ю. *Непрерывный процент. Анализ финансовых вычислений*. Saarbrucken, Germany, LAP LAMBERT, 2012.

8. Пронин Л.Н., Рожков Ю.С. О некоторых особенностях роста капитала // *Вестник ИНЖЭКОНа*. Серия: Экономика, 2011, no. 2 (45), с. 180-185.

9. Пронин Л.Н., Рожков Ю.С. Об оптимизации равномерных финансовых потоков накопления капитала и погашения кредитов // *Вестник СПбГЭУ*. Серия: Экономика, 2014, no. 2 (69), с. 84-88.

10. Сычева Г.И., Трофимова А.С. Оценка финансового состояния предприятия на основе денежных потоков // *Вестник Южно-Российского государственного технического университета (Новочеркасского политехнического института). Серия: Социально-экономические науки*, 2017, no. 2, с. 64-69.

11. Хохлова О.В. Система факторов, влияющих на финансовый поток предприятий // *Логистические системы в глобальной экономике*, 2016, no. 6, с. 351-354.

12. Четыркин Е.М. *Методы финансовых и коммерческих расчетов*. Москва, «Дело ЛТД», 1995.

ON CONTINUOUS FINANCIAL FLOWS REPAYMENT OF THE LOAN UNDER A COMPLEX PERCENTAGE

Pronin Lev Nikolaevich, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

Saint-Petersburg State University of Economics, Sadovaya st., 21, Saint Petersburg, Russia, 191023; e-mail: lepronin@yandex.ru

Purpose: the conditional optimization repayment using a simple continuous interest at the rate of p on a continuous cash flow of a given power density: $a(t) = \alpha + \beta(e^{\gamma t} - 1)$, $\alpha \geq 0, \beta, \gamma \in R$. *Discussion*: the peculiarity of this work is the simultaneous consideration of the temporal and the timeless value of money. Introduced the concept of equivalence interest rate of the loan. This is a continuation of similar studies for simple interest calculation. Saved all author's definitions and terms of this work. *Results*: we offered a wide range of possible repayment plans for a loan granted for a complex (uninterrupted) interest. In practice, for the most part, uniform repayment of the loan is applied and sometimes on progressions. Repayment plans based on exponential density curves allow taking into account more subtle financial opportunities or interests, both of the borrower and the lender.

Keywords: financial flows, interest rate, extremal, repayment of the loan.

References

1. Alekseev A.S., Zelenina L.I. Modelirovanie zadach upravleniia fi-nansovymi potokami. *Gumanitarnye nauchnye issledovaniia*, 2015, no. 8 (48), pp. 172-176. (In Russ.)

2. Antsupov G.N. O primenenii metoda nepreryvnogo nachisleniia protsentov. *Molodoi uchenyi*, 2016, no. 16 (120), pp. 125-127. (In Russ.)

3. Basharin G.P. *Nachala finansovoi matematiki.* Moscow, INFRA-M. 1998. (In Russ.)

4. Kabanov Iu.M., Shiriaev A.N. Sovremennye problemy finansovoi matematiki. *Teoriia veroiatnostei i ee primeneniia*, 2016, vol. 61, no. 1, pp. 3-4. (In Russ.)

5. Kochovich E. *Finansovaia matematika. Teoriia i praktika finansovo-bankovskikh raschetov.* Moscow, Finansy i statistika, 1994. (In Russ.)

6. Pronin L.N., Rozhkov Iu.S O nepreryvnykh finansovykh potokakh pogasheniia kredita, vydannogo pod prostoi protsent. *Nauchnyi zhurnal «EDUCATIO»*. Novosibirsk. no. 3(10), vol. 2, 2015, pp. 21-25. (In Russ.)

7. Pronin L., Rozhkov Iu. *Nepreryvnyi protsent. Analiz finansovykh vychislenii*. Saarbrucken, Germany, LAP LAMBERT, 2012. (In Russ.)

8. Pronin L.N., Rozhkov Iu.S. O nekotorykh osobennostiakh rosta kapitala. *Vestnik INZhEKONa.* Seriia: Ekonomika, 2011, no. 2 (45), pp. 180-185. (In Russ.)

9. Pronin L.N., Rozhkov Iu.S. Ob optimizatsii ravnomernykh finansovykh potokov nakopleniia kapitala i pogasheniia kreditov. *Vestnik SPbGEU*. Seriia: Ekonomika, 2014, no. 2 (69), pp. 84-88. (In Russ.)

10. Sycheva G.I., Trofimova A.S. Otsenka finansovogo sostoianiia predpriiatiia na osnove denezhnykh potokov. *Vestnik Iuzhno-Rossiiskogo gosu-darstvennogo tekhnicheskogo universiteta (Novocherkasskogo politekhnicheskogo instituta). Seriia: Sotsial'no-ekonomicheskie nauki*, 2017, no. 2, pp. 64-69. (In Russ.)

11. Khokhlova O.V. Sistema faktorov, vliiaiushchikh na finansovyi potok predpriiatii. *Logisticheskie sistemy v global'noi ekonomike*, 2016, no. 6, pp. 351-354. (In Russ.)

12. Chetyrkin E. M. *Metody finansovykh i kommercheskikh raschetov.* Moscow, «Delo LTD», 1995. (In Russ.)