УДК 330. 43

ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МОДЕЛИРОВАНИИ ПОРТФЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Добрина Мария Валерьевна, асп.

Воронежский государственный университет, Университетская пл., 1, Воронеж, Россия, 394018; e-mail: nice.smirnova@yandex.ru

Цель: анализ функций полезности, которые можно использовать для построения инвестиционного портфеля. *Обсуждение*: в теории ожидаемой полезности затрагиваются вопросы рациональности действий экономических агентов. В эту теорию входят несколько аксиом, рассмотренных в исследованиях Джона фон Неймана и Моргенштерна. Эти аксиомы предъявляют определенные требования к свойствам функций полезности. Чтобы понять возможные варианты конфигурации кривых безразличия функций полезности необходимо исследовать возможные свойства этих кривых. Удобным инструментом такого исследования является графическое представление функций полезности. Результаты графического анализа обозначили проблемы, которые могут иметь место при аналитическом задании функций полезности. При этом для осуществления выбора оптимального портфеля вкладчику необходимо объединить свои линии безразличия с эффективным множеством. *Результаты*: проведен анализ функций полезности, которые можно использовать для построения инвестиционного портфеля: рассмотрены основные аксиомы теории ожидаемой полезности, изучены основные типы функций полезности и рассмотрена процедура формирования инвестиционного портфеля с учетом функций полезности.

Ключевые слова: функции полезности, инвестиционный портфель, рациональное поведение экономических субъектов, аксиомы теории ожидаемой полезности, линии безразличия.

DOI: 10.17308/meps.2017.8/1748

Введение

Актуальность данной темы обоснована тем, что идеи теории портфельного инвестирования в настоящее время стали использоваться при обосновании решений по рациональному управлению финансами на современных предприятиях. Портфельные инвестиции дают возможность решать некоторые экономические задачи, совершенствовать структуру активов и наращивать собственный капитал организаций путем эмиссии ценных бумаг с по-следующим их размещением среди российских и западных инвесторов [7].

Отметим, что инвестиционный портфель – это совокупность ценных бумаг, купленных с целью обретения заработка и гарантирования ликвидности. Значительным моментом, оказывающим влияние на процесс формирования инвестиционного портфеля, является то, каким будет поведение экономических агентов на рынке ценных бумаг в определенный момент времени [5].

Рациональность поведения экономических субъектов является квинтэссенцией большинства экономических моделей. Вопросы рациональности действий экономических агентов затрагиваются в теории ожидаемой полезности, в которую входит несколько аксиом, рассмотренных в исследованиях Джона фон Неймана и Моргенштерна [9]. Стоит отметить, что эти аксиомы посвящены вероятностной совокупности предметов торговли. Покупатели при принятии решения стремятся максимизировать ожидаемую полезность, т.е. ожидаемое значение функции полезности, аргументами которой служат потенциальные варианты в условиях неопределенности и вероятность наличия данных вариантов.

Ключевым объектом теории полезности служит лотерея. Лотерея – ряд вариантов торговой сделки, выбор каждого из которых покупателем осуществляется с некоторой вероятностью. Следовательно, если считать, что вариант x^1 выбирается с вероятностью p_1, вариант x^2 – с вероятностью p_2 и, наконец, вариант x^r – с вероятностью p_r, то лотерею можно записать следующим образом: $(p_1, x^1; p_2, x^2; ...; p_r x^r)$, где $p_r \geq 0, r = 1,2,...,r$ при условии $\sum_{r=1}^{r} p_r = 1$. В случае, когда покупатель однозначно выбирает, например, вариант x^1, то лотерея записывается в виде $(1, x^1)$. А в случае, когда лотерея имеет вид $(p, x^1; (1-p), x^2)$, то это значит вариант торговой сделки x^1 выбирается с вероятностью p, а вариант x^2 – с вероятностью $(1 - p)$.

Проанализируем основные аксиомы теории ожидаемой полезности Джона фон Неймана и Моргенштерна.

1. Основные аксиомы теории ожидаемой полезности

Первая аксиома: вводится в рассмотрение гипотеза о наличии отношения предпочтения. Предпочтение представляет собой совершенную полуупорядоченность всех лотерей, т.е. оно совершенно, транзитивно и рефлексивно. Имеют место следующие утверждения:

– совершенная (полная) полуупорядоченность – слабое отношение предпочтения;

– транзитивность (согласованность) предпочтений – закон, который гласит: если вариант торговой сделки y предпочтительнее варианта x, а вариант z – предпочтительнее y, то z – предпочтительнее x;

– рефлексивность предпочтений: если имеется в наличии два варианта торговой сделки, но при этом не один из вариантов не хуже другого, то покупатель расценивает их как один и тот же вариант возможной торговой сделки.

В дальнейшем будем использовать следующие специальные обозначения: $\succ$ – предпочтение, а $\cong$ – безразличие [1].

Вторая аксиома – это аксиома монотонности, суть которой в следующем. Пусть имеются два варианта торговой сделки x^1 и x^2, для которых $x^1 \succ x^2$; в этом случае $(p', x^1; (1-p'), x^2) \succ (p, x^1; (1-p), x^2)$ при $p' > p$. Суть вышеописанного заключается в том, что покупатель предпочтет лотерею с большей вероятностью выбора предпочитаемого варианта торговой сделки. Выбранный вариант торговой сделки $x^1 \succ (p, x^1; (1-p), x^2)$ для всех $0 < p < 1$ предпочтительнее всякой лотереи, включающей в себя даже менее предпочтительный вариант.

Третья аксиома – это аксиома непрерывности. Пусть имеются три варианта торговых сделок x^1, x^2, x^3, для которых $x^1 \succ x^2 \succ x^3$; в этом случае имеется вероятность p, для которой $(p, x^1; (1-p), x^3) \cong x^2$, при $0 < p < 1$. Таким образом, происходит интерполяция выбранных лотерей по предпочтениям таким образом, что покупатель проявляет безразличие в выборе лотереей, находящихся на промежуточном уровне [2].

Четвертая аксиома – это аксиома о независимости некоррелированных между собой альтернатив. Пусть имеются два варианта торговых сделок x^1 и x^2, для которых $x_1 \cong x_2$ в этом случае каждому третьему варианту x^3 соответствует $(p, x^1; (1-p), x^3) \cong (p, x^2; (1-p), x^3)$ при всех $0 < p < 1$. Т.е. наличие третьего варианта торговой сделки не разрушает предпочтения [2].

Пятая аксиома – это аксиома о получении сложных лотерей. Пусть имеется m лотерей: $L = p_1', x^1; p_2', x^2; \dots; p_m', x^m$. Сложная лотерея – это лотерея, исходами которой также являются лотереи L_i, вероятность выбора которых q_i. Формально сложная лотерея записывается в виде $L = (q_1, L_1; q_2, L_2; \dots; q_m, L_m)$. В соответствии с пятой аксиомой сложную лотерею можно привести к лотерее $L \cong L' = (r_1, x^1; r_2, x^2; \dots, r_m, x^m)$, вероятности которой определяются следующим образом

$$
\begin{aligned}
r_1 &= (q_1 p_1^1 + q_2 p_1^2 + \dots + q_m p_1^m),\\
r_2 &= (q_1 p_2^1 + q_2 p_2^2 + \dots + q_m p_2^m),\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\
r_m &= (q_1 p_m^1 + q_2 p_m^2 + \dots + q_m p_m^m).
\end{aligned}
$$

Симбиозом всех рассмотренных выше аксиом является главная теорема теории полезности фон Неймана – Моргенштерна. Она утверждает, что при выполнении всех описанных выше аксиом имеется функция полезности, вычисленная для всех лотерей, и однозначная с точностью до монотонного строгого возрастающего линейного преобразования. Напомним, что варианты торговой сделки являются одним из специфических видов лотереи $(1, x) = x$, которая по сути является функцией полезности $U(x)$, которую можно вычислять для всех вариантов торговых сделок. При этом $U(x) > U(y)$, для $x \succ y$. В общем виде получаем $U(p_1, x^1; p_2, x^2; \dots; p_m, x^m) = \sum_{r=1}^{r} p_r U(x')$. Это равенство показывает, что полезность лотереи – это математическое ожидание полезности, равное взвешенной сумме полезностей вариантов торговых сделок, где весами являются вероятности.

Значительным следствием теоремы о математическом ожидании полезности считается правило рационального поведения при принятии решения на фоне риска. Пусть имеется некий менеджер, который должен принять решение, предпочитая одну из m стратегий $(S_1, S_2, \ldots, S_m)$, исходами которых будет лотерея L_i.

$$L_i = (p_1', x_i^1; p_2', x_i^2; \ldots; p_m', x_i^m, i=1, 2, \ldots, m),$$

где p_r' – вероятность выигрыша x_i^r при указанной стратегии S_i.

При этом полезность лотереи L_i определяется следующим образом: $U(L_i) = \sum_{r=1}^{m} p_r' U(x_i^r)$.

Менеджер при принятии решения предпочтет стратегию с максимальным значением ожидаемой полезности $\max_{S_i} U(L_i) = \max_{S_i} \sum_{r=1}^{r} p_r^2 U(x_i^2)$.

Пусть есть три потенциальные стратегии, для каждой из которых имеются вероятности выигрыша одной из двух альтернатив *(m=3, S=2)*, тогда оптимальная стратегия представляет собой наибольший элемент главной диагонали рассмотренной ниже матрицы:

$$\begin{pmatrix} U(x_1^1) & U(x_1^2) \\ U(x_2^1) & U(x_2^2) \\ U(x_3^1) & U(x_3^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 & p_1^2 & p_1^3 \\ p_2^1 & p_2^2 & p_2^3 \end{pmatrix},$$

где матрицей полезностей служит платежная матрица, а вторая матрица включает в себя вероятности.

При всем при этом поведение и конечный выбор менеджера иногда бывают нерациональными. В этих случаях применение правила рационального поведения не уместно. В своих исследованиях Каннеман и Тверски рассматривают эмпирический пример таких случаев [12].

2. Типы функций полезности

Неотъемлемой составляющей теории ожидаемой полезности является функция полезности. Она необходима для того, чтобы оценить удовлетворенность менеджера численно, так как это удобно для количественного воспроизведения качественного отношения предпочтения.

Функция полезности – это потребность, рассчитанная в количестве $x_1, x_2, \ldots, x_N$, которую менеджер желает удовлетворить. Обозначим ее $U=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$.

Заметим, что важным вопросом является определение функции полезности. Проанализируем схему определения функции полезности в общем виде. Пусть X – множество точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ пространства E_N.

Конечный выбор осуществляется следующим образом:

1. Формулируется цель, например: зарабатывание прибыли, уменьшение расходов и т.п.

2. Выбираются способы достижения цели (альтернативы), например:

внести наличные в размере x_0 в банк под процент или вложить в проект, по итогам которого сумма удвоится до $2x_0$ при вероятности 0,5.

3. Осуществляется анализ потенциальных исходов (последствий) предложенной альтернативы [4].

Введем обозначения. Пусть *a* – допустимая альтернатива, а *A* – множество всех допустимых альтернатив. Любому *a* из *A* соответствует *n* числовых признаков $x_1(a), \ldots, x_N(a)$, значит признаки $x_1, x_2, \ldots, x_N$ отображают каждое *a* из *A* в точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ исходов (последствий) *N*-мерного пространства E_N. Выбор делается в пользу той альтернативы, последствия которой более приемлемы для менеджера [9].

Проанализируем функции полезности, применяемые при рассмотрении единственной цели производственного менеджмента – получение выручки от продаж.

Начнем с линейной функции полезности. Она используется при определении приращения полезности, соразмерной приращению первоначального взноса. При этом объем первоначального взноса не имеет значения. В данной ситуации вводится в рассмотрение коэффициент пропорциональности *a*.

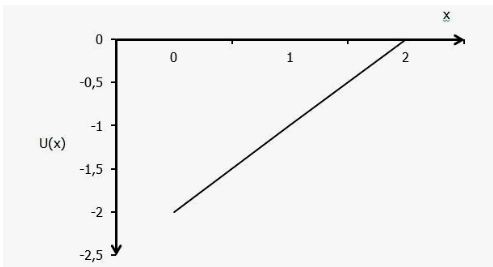

Рис. 1. Линейная функция полезности

Действия же нерискового вкладчика (менеджера) характеризует функция, представленная на рис. 2. Это означает, что вкладчику (менеджеру) свойственна следующая линия поведения: чем больше есть материальных ценностей, тем слабее стимул к их наращиванию.

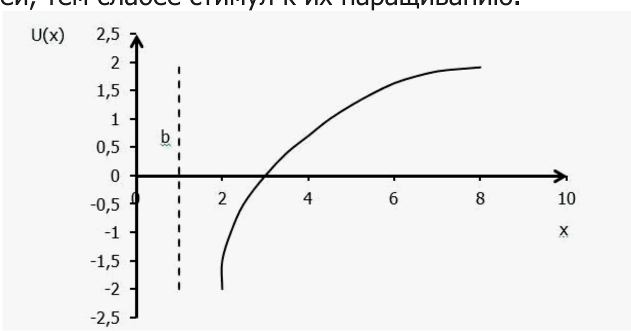

Рис. 2. Действия нерискового вкладчика (менеджера)

А действия рискового вкладчика (менеджера) характеризует функция, представленная на рис. 3. Полезность каждой комплементарной единицы выручки для него растет с увеличением дохода.

Итоговой прибыли дается необъективно высокая оценка, а убыткам – необъективно низкая.

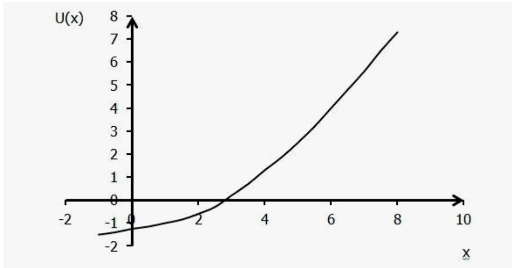

Рис. 3. Действия рискового вкладчика (менеджера)

Следующий тип поведения вкладчика (менеджера) характеризует функция, представленная на рис. 4. В этом случае наблюдается завышение предельной полезности внушительной выручки и занижение внушительного проигрыша. При $x < x_0$ комплементарная единица выручки обладает ценностью меньше предыдущей, а при $x > x_0$ – больше.

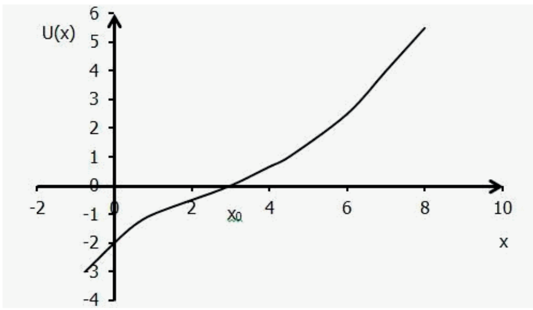

Рис. 4. Действия зависят от точки x_0

Далее рассмотрим тип поведения вкладчика (менеджера), который характеризует функция, представленная на рис. 5. В данной ситуации наблюдается занижение потерь и завышение прибылей, а значительный размер выручки и расходов воспринимается с риском [3].

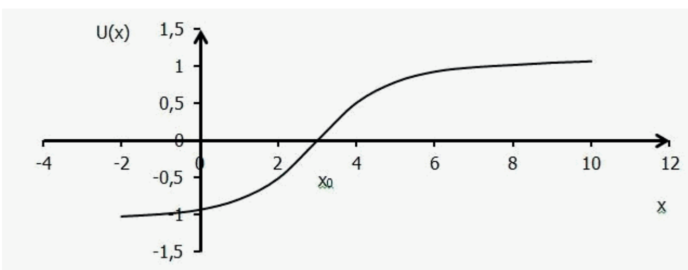

Рис. 5. Действия также зависят от точки x_0

Перейдем к рассмотрению типа поведения вкладчика (менеджера), который характеризует функция, представленная на рис. 6. В данном случае действия вкладчика (менеджера) причисляют к «нормальным»: при некоторых значительных по абсолютной величине значениях аргумента наблюдается умеренная тяга к риску, а при несущественных значениях аргумента – безразличие к расходам.

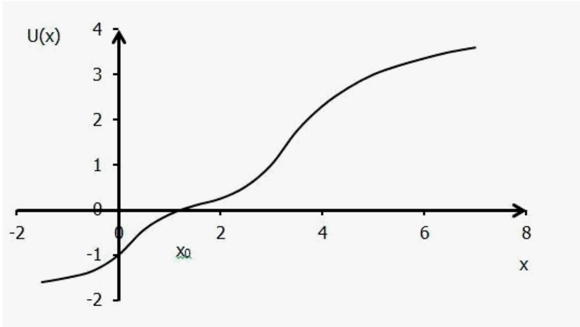

Рис. 6. Действия по-прежнему зависят от точки x_0

Теперь рассмотрим тип поведения вкладчика (менеджера), который характеризует функция, представленная на рис. 7. В этом случае вкладчик (менеджер) неизменно вводит положительную за прибыль и отрицательную за потери «премию».

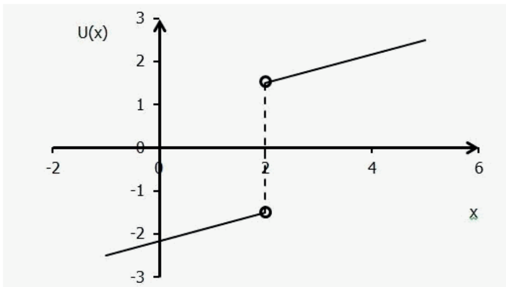

Рис. 7. Добавка премии

На последнем этапе рассмотрим тип поведения вкладчика (менеджера), который характеризует функция, представленная на рис. 8. Для данной ситуации свойственно установление минимального размера прибыли для учета, а последующее ее увеличение не имеет значения.

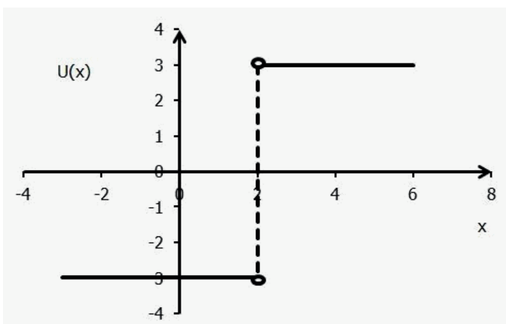

Рис. 8. Установление минимального размера прибыли для учета

Самые широко распространенные виды функций полезности логарифмического типа представлены на рис. 9-10 [9].

Графики данных кривых значительно обусловливаются параметром *b*, где *b* равен 1,5; 2; 3. Аналитическое выражение функций полезности логарифмического типа можно записать таким образом:

$$U(x) = log_b\,(x + b) - 1.$$

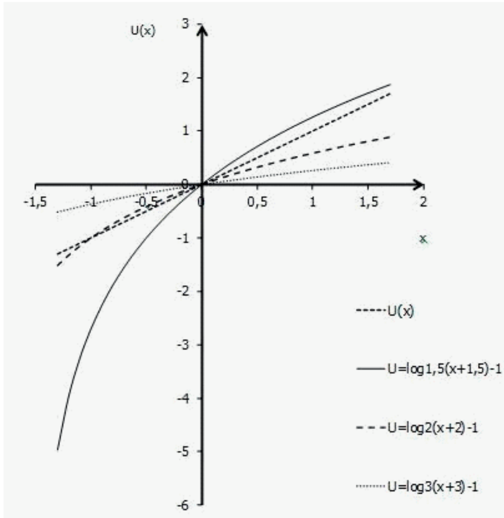

Рис. 9. Учет риска и порога разорения при выборе функции полезности

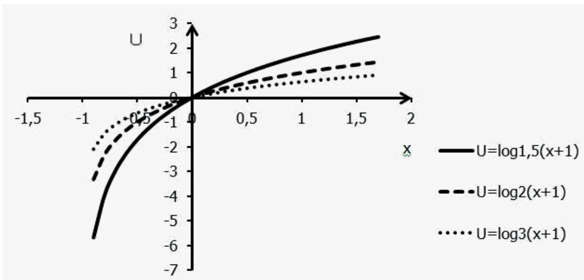

Рис. 10. Вкладчики (менеджеры) полностью согласны между собой относительно затрат (порог разорения $b = -1$), но не согласны в отношении полезности уровней прибыли

При этом основанием логарифма может быть каждое число ($b > 1$), а единица вычитается для эргономичности, чтобы полезность нулевой выручки равнялась нулю [6].

Порог разорения (чувствительности) функций полезности логарифмического типа просто учитывать, так как эти кривые выявляют внушительные отрицательные значения полезности при приближении к подходящим порогам разорения. При этом параметр *b* – это относительный показатель объема денежных средств организации. И, следовательно, огромные значения *b* подтверждают внушительные средства организации [9].

Наиболее часто функции полезности выбираются, исходя из рациональности действий вкладчиков (менеджеров) с учетом риска и порога разорения. При этом функцию полезности можно найти из равносильного соотношения:

$$B^{U+1} - b = x\ .$$

В этом случае параметр *b* – денежные средства организации, значимость которых определяется вкладчиками (менеджерами).

3. Формирование инвестиционного портфеля с учетом функций полезности

Получение оптимального портфеля ценных бумаг – это сложно решаемый злободневный вопрос. Для его решения разработано несколько вариантов оптимизационных моделей, но мы рассмотрим подход, основанный на функции полезности и использовании кривых безразличия [10], представляющих собой монотонно возрастающие функции. Известно, что функция полезности портфеля зависит от двух аргументов: от ожидаемой портфельной доходности r_p и от среднеквадратического (стандартного) отклонения δ_p (риска) [8]:

$$U = U(r_p, \delta_p).$$

Портфели считаются равнозначными, если они расположены на одной линии безразличия или линии уровня функции, т.е.

$$U = U(r_p, \delta_p) = C.$$

Заметим, что линии безразличия показывают, как вкладчик относится к доходности и риску портфеля. Это кривые в координатах (δ_p, r_p).

Каждый портфель, расположенный на линии безразличия выше и левее, вкладчик расценивает как более предпочтительный в сравнении с портфелем, расположенным на линии безразличия ниже и правее [11].

При этом ожидаемая доходность портфеля, включающая в себя n ценных бумаг, определяется следующим образом [10]:

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_i,$$

где x_i – часть первоначальной стоимости портфеля, инвестированная в i-й вид ценных бумаг; r_i – ожидаемая доходность i-го вида ценных бумаг; n – количество видов ценных бумаг в портфеле.

Соответственно, дисперсия доходности портфеля определяется обычным образом через дисперсии и ковариации активов

$$D(r_p) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot r_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot x_j \cdot \operatorname{cov}(r_i, r_j).$$

Один из параметров функции полезности инвестор определяет сам, руководствуясь правилом, в соответствии с которым чем больше ожидаемая доходность, тем больше риск. Рассмотрим на графике принципы выбора стратегии, которой должен руководствоваться инвестор при выборе оптимального портфеля.

Стоит отметить, что оптимальный портфель Q^* существенно зависит от формы линий безразличия. Выделяются два основных семейства данных линий: семейство линий Q и семейство линий W (рис. 12). Семейство линий Q отличает меньшая выпуклость вниз, означающая, что вкладчик нацелен на меньший риск с более низкой ожидаемой доходностью. А семейство линий W, напротив, характеризуется увеличением выпуклости вниз, т.е. вкладчик выбирает больший риск, но с более высоким уровнем ожидаемой доходности (полезность Неймана – Моргенштерна) [13].

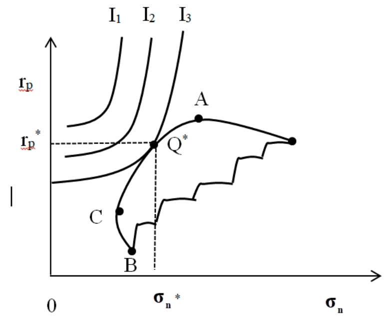

Рис. 11. Множество всех созданных портфелей

Будем рассматривать достижимое множество, состоящее из всех портфелей, которые можно получить из *n* видов ценных бумаг. Это множество представлено на рис. 11. Из рисунка становится очевидным, что множество портфелей, дающих минимальный риск при изменяющемся уровне ожидаемой доходности, расположено на левой части границы достижимого множества между точками *A* и *B* [10]. В результате приемлемыми для вкладчика будут портфели, лежащие на верхней и левой границе достижимого множества.

Множество портфелей, которые следует рассматривать инвестору – участок границы *AC*. Это множество называется эффективным множеством портфелей или множеством Парето, на котором вкладчик должен подбирать для себя оптимальный портфель.

При подборе оптимального портфеля вкладчику необходимо объединить свои линии безразличия с эффективным множеством. Оптимальный портфель – точка, в которой кривая безразличия касается эффективного множества (портфель *Q** на кривой безразличия I_3).

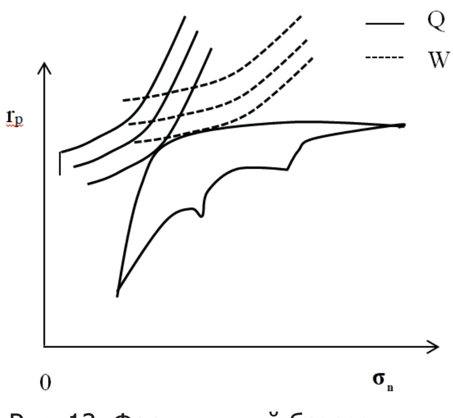

Рис. 12. Формы линий безразличия

Заключение

В теории ожидаемой полезности находят объяснения вопросы рациональности действий экономических агентов. Предполагается, что именно в соответствии с этой теорией на фондовом рынке осуществляют свою деятельность рациональные инвесторы. Из этого следует, что в моделях оптимизации портфельных решений должны использоваться принципы ожидаемой полезности. В классических моделях портфельного инвестирования без труда обнаруживаются эти принципы. В то же время рассмотренные в статье различные варианты функций полезности позволяют сделать вывод, что потенциал теории ожидаемой полезности использован недостаточно. Прежде всего, это касается вероятностного описания рыночных ситуаций, в которых вынужден действовать инвестор. Предположение о нормальности, доминирующее в теории эффективного рынка, значительно упрощает представление о природе финансового рынка. Требуются модели, которые свободны от этих предположений, но которые не противоречат принципам ожидаемой полезности.

Список источников

1. Agarwal A., Hazan E. *New algorithms for repeated play and universal portfolio management.* Princeton University Technical Report, 2005, TR-740-05.

2. Bera A.K., Ivliev S., Lillo F. *Financial econometrics and empirical market microstructure.* Switzerland, Springer international Publ., 2015.

3. Johan Christian Hilsted. *Active portfolio management and portfolio construction – implementing an investment strategy*, 2012.

4. Давнис В.В., Добрина М.В. Модели доходности активов и их применение в моделях портфельного инвестирования // *Материалы XII международной научно-практической конференции «Экономическое прогнозирование: модели и методы»*, Воронеж, 2016, с. 197-200.

5. Давнис В.В., Зироян М.А., Комарова Е.В., Тинякова В.И. *Прогнозное обоснование инвестиционных решений на финансовых рынках*. Москва, 2015.

6. Добрина М.В. Оптимизация инвестиционного портфеля с применением MICROSOFT Excel // *Научный вестник Воронежского государственного технического университета. Серия: Информационные технологии в строительных, социальных и экономических системах*, 2017, no. 1(15), с. 65-72.

7. Добрина М.В. Формирование оптимального инвестиционного портфеля Марковица // *Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Экономика и предпринимательство*, 2017, no. 1(14), с. 158-163.

8. Дубровин В.И., Юськив О.И. *Модели и методы оптимизации выбора инвестиционного портфеля.* Запорожский национальный технический университет, 2008.

9. Крушвиц С.К. *Финансирование и инвестиции.* Сборник задач и решений. Санкт-Петербург, Питер, 2001.

10. Наталуха И.Г. Моделирование спекулятивного бума на финансовом рынке с учетом психологии инвесторов // *Материалы VI Всеросс. симпозиума «Математическое моделирование и компьютерные технологии»*, Кисловодск, 2004, т. 2, с. 7-8.

11. Христановский В.В., Щербина В.П. *Функция полезности: теория и анализ*. ИД «ИНЖЕК», 2006.

12. Шапкин А.С., Шапкин В.А. *Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций*. Москва, Издательско-торговая корпорация «Дашков и К^0», 2012.

13. Шарп В., Александер Г., Бейли Д. *Инвестиционный менеджмент*. Москва, ИНФРА-М, 2003.

14. Эддоус М., Стэнсфилд Р. *Методы принятия решений*. Москва, Мир, 2003.

UTILITY FUNCTIONS AS THE BASIS FOR INVESTMENT PORTFOLIO CREATION

Dobrina Mariya Valeryevna, graduate student

Voronezh State University, University sq., 1, Voronezh, Russia, 394018; e-mail: nice.smirnova@yandex.ru

Purpose: the author analyzes the utility functions as the basis for optimal investment portfolio creation. *Discussion*: the theory of expected utility addresses the issues of the rationality of economic agents actions. This theory includes several axioms. John von Neumann and Morgenstern considered these axioms in research. These axioms impose certain requirements on the properties of the utility functions. The author explores the possible properties of indifference curves to understand the possible types its configurations. A graphical representation of utility functions is the convenient instrument for this research. The results of the graphical analysis outlined the problems at utility functions analytical building. The investor needs to compare indifference curves with the efficient set for the optimal portfolio selection. *Results*: the author analyzed the utility functions as the basis for investment portfolio creation. The writer considered the basic axioms of expected utility theory, examined the basic types of utility functions and explored the procedure of the investment portfolio formation in view of utility functions.

Keywords: utility functions, investment portfolio, rational behaviour of economic agents, the axioms of expected utility theory, indifference curves.

References

1. Agarwal A., Hazan E. *New algorithms for repeated play and universal portfolio management.* Princeton University Technical Report TR-740-05, 2005.

2. Bera A.K., Ivliev S., Lillo F. *Financial econometrics and empirical market microstructure.* Switzerland, Springer international Publ., 2015.

3. Johan Christian Hilsted. *Active portfolio management and portfolio construction – implementing an investment strategy*, 2012.

4. Davnis V.V., Dobrina M.V. [Models of asset returns and their application in models of portfolio investment]. *Materialy 12 mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Ekonomicheskoe prognozirovanie: modeli i metody»* [Proc. 12th Int. sci.-pract. conf. «Economic forecasting: Models and methods»]. Voronezh, 2016, pp. 197-200. (In Russ.)

5. Davnis V.V., Ziroyan M.A., Komarova E.V., Tinyakova V.I. *Prognoznoe obosnovanie investitcionnyh reshenii na finansovyh rynkah* [The Forecast substantiation of investment decisions in financial markets]. Moscow, 2015. (In Russ.)

6. Dobrina M.V. Optimizatciya investitcionnogo portfelya s primeneniem Microsoft Excel [Optimization of the investment portfolio with the use of Microsoft Excel]. *Statiya v nauchnom vestnike Voronezhskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta. Seriya: Informatcionnye tehnologii v stroitelinh, sotcialnyh I ekonomicheskih sistemah*, 2017, no. 1(15), pp. 65-72. (In Russ.)

7. Dobrina M.V. Formirovanie optimalynogo investitcionnogo portfelya Mar-

kovitca [Formation of optimal Markowitz investment portfolio]. *Statiya v nauchnom vestnike Voronezhskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitelynogo universiteta. Seriya: Ekonomika I predprinimatelystvo*, 2017, no.1(14), pp. 158-163. (In Russ.)

8. Dubrovin V.I., Usykov O.I. *Modeli I metody optimizatcii vybora investitcionnogo portfelya* [Models and methods of choice optimization for investment portfolio]. Zaporozhskii natcionalyny tehnicheskii universitet, 2008. (In Russ.)

9. The Krushwitc S.K. *Finansirovaniye I investitcii* [Financing and investment]. Sbornik zadach I reshenii. Saint Petersburg, Piter, 2001, p. 320. (In Russ.)

10. Nataluha I.G. Modelirovanie spekulyativnogo buma na finansovov rynke c uchetom psihologii investorov [Modeling of the speculative boom in the financial market in view of investor psychology] *Materialy 6 vserossiiskogo simpoziuma «Matematicheskoe modelirovanie I kompyuternye tehnologii»* [Proc. 6th All-russ.workshop «Mathematical modeling and computer technologies»]. Kislovodsk, 2004, vol. 2, pp. 7-8. (In Russ.)

11. Hristanovski V.V., Shcherbina V.P. *Funhtciya poleznosti: teoriya I analiz* [Utility Function: theory and analysis]. ID «INZHEK» Publ., 2006. (In Russ.)

12. Shapkin A.S., Shapkin V.A. *Ekonomicheskie I finansovye riski. Otcenka, upravlenie, portfely investitcii* [Economic and financial risks. Assessment, management, investment portfolio]. Moscow, «Dashkov and K0» Publ., 2012. (In Russ.)

13. Sharpe V., Alexander G., Bailey D. *Investitcionnyy menedzhment* [Investment management]. Moscow, «INFRA-M» Publ., 2003. (In Russ.)

14. Eddowes M., Stansfield R. *Metody prinyatiya reshenii* [Decision-making Methods]. Moscow, «Mir» Publ., 2003. (In Russ.)