УДК 330. 43

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПАРАДОКС И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ

Добрина Мария Валерьевна, асп.

Воронежский государственный университет, Университетская пл., 1, Воронеж, Россия, 394006; e-mail: nice.smirnova@yandex.ru

Цель: оценка возможностей применения санкт-петербургского парадокса в задачах моделирования процессов ценообразования финансовых активов на фрактальном рынке. *Обсуждение*: санкт-петербургский парадокс – это задача из сферы теории вероятностей, имеющая важную роль для эволюции нескольких научных областей, особенно математики, финансовой математики и экономики в целом. Математик К. Менгер впервые предложил использовать санкт-петербургский парадокс в экономической сфере, сместив акцент с определения «честной цены» определенной азартной игры на поиск адекватной дескриптивной модели поведения в условиях неопределенности. Описываются возможные варианты применения этой модели в задачах, связанных с исследованием убывающей предельной полезности, ожидаемой полезности, используемой в качестве критерия принятия решений в условиях неопределенности, основами страхования и управления рисками. Кроме того показано, что санкт-петербургский парадокс можно использовать в современных подходах к финансовому моделированию. *Результаты*: выявлено, что с помощью санкт-петербургского парадокса воспроизводится фрактальное распределение, которое целесообразно применять в имитационном моделировании финансовых рынков.

Ключевые слова: санкт-петербургский парадокс, нормальное распределение, фрактальное распределение, функция плотности вероятности, акции роста.

DOI: 10.17308/meps.2017.11/1806

Введение

Актуальность данной темы обоснована тем, что санкт-петербургский парадокс играет важную роль в эволюции нескольких научных областей: математики, финансовой математики и экономики в целом.

Санкт-петербургскому парадоксу уже столетия, но сегодня его уроки актуальны как никогда. Одна из основных его задач в инвестировании – как поймать (или избежать) значимое событие с низкой вероятностью.

1. Изложение сути парадокса

Перейдем непосредственно к изложению сути самого парадокса. Даны следующие условия игры: игрок вносит определенную сумму денег и подкидывает монету до тех пор, пока не появится орёл (при этом вероятность любого результата составляет 50%). Как только появляется орел, игра завершается, и игрок имеет прибыль, определяемую следующим образом: если орёл появился при первом подбрасывании, то игроку достается 20, при втором – 2^1, …, при n-ном – 2^{n-1}. Иначе говоря, от броска к броску прибыль удваивается.

Отметим, что математическое ожидание прибыли при первом подбрасывании равно $p_1x_1 = 0{,}5x2^0 = 0{,}5x1 = 0{,}5$ у.е., при втором $p_2x_2 = (0{,}5x0{,}5)x2^1 = 0{,}25x2 = 0{,}5$ у.е. Итоговое потенциально возможное значение – это сумма ожиданий на любом этапе игры, равная *0,5 у.е. + 0,5 у.е. +…* . Сумма данной бесконечной последовательности – это бесконечно огромная величина.

Требуется найти оптимальный размер первоначального вклада игры, т.е. математическое ожидание прибыли игрока. Суть парадокса состоит в том, что рассчитанное значение справедливого вклада равно бесконечности, а значит, превышает каждый потенциально ожидаемый результат игры. Перефразируем вышесказанное для упрощения сути парадокса: люди могут внести только достаточно малую сумму денег в игру, в которой математическое ожидание прибыли бесконечно огромно.

Пытаясь разобраться с этимологией такого поведения игроков, Д. Бернулли выдвинул гипотезу о том, что люди в этой ситуации нацелены на максимизацию не потенциально ожидаемой денежной прибыли, а морального ожидания прибыли. Именно моральное ожидание прибыли получило название ожидаемая полезность игры.

Впоследствии идеи Д. Бернулли были продолжены американскими экономистами Джон фон Нейманом и Оскаром Моргенштерном, стоявшими у истоков теории ожидаемой полезности [2]. Ученые объяснили, что при неполной информации рациональный выбор – это выбор с максимальной потенциальной полезностью. При этом потенциальная полезность любой альтернативы определяется по формуле:

$$U = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \text{ при } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

где U –потенциальная полезность, p_i – вероятность результата, а x_i – полезность результата.

Стоит заметить, что у экономических агентов может быть различный взгляд на риск. В связи с этим вычленяются следующие виды хозяйствующих субъектов: нейтральных к риску, любителей риска и противников риска (испытывающих антипатию к риску).

Иногда математическое ожидание операции с высоким уровнем риска эквивалентно его безрисковой альтернативе, но поведение экономических субъектов при этом может быть различным. К примеру, вам должны 20 у.е., но предлагают не просто вернуть деньги, а сыграть в занимательную игру с подбрасыванием монеты. Правила игры следующие: в случае выигрыша вам заплатят 40 у.е. вместо 20 обещанных у.е. (ваш чистый выигрыш равен 20 у.е.), а в случае проигрыша – не заплатят ничего (проигрыш составит 20 у.е.). Математическое ожидание E(x) в данной ситуации равно: $0{,}5х20 + 0{,}5х(–20) = 0$, т.е. неважно, играть в игру или просто получить обещанные деньги назад. При этом экономические агенты поведут себя по-разному: кто-то согласится на риск, чтобы попытаться заработать больше; а кто-то не будет осуществлять никаких рисковых операций.

2. Прикладная роль санкт-петербургского парадокса на финансовых рынках

Во второй половине XX века были обнаружены и развиты альтернативные варианты применения санкт-петербургского парадокса на финансовых рынках.

Математик К. Менгер впервые предложил использовать санкт-петербургский парадокс в экономической сфере, сместив акцент с определения «честной цены» определенной азартной игры на поиск адекватной дескриптивной модели поведения в условиях неопределенности [4].

Применение этой задачи в экономике встречается в таких идеях, как принцип убывающей предельной полезности, ожидаемая полезность как критерий принятия решения в условиях неопределенности, основы микроэкономики страхования, управление рисками и теория игр.

К тому же санкт-петербургский парадокс пытались использовать в качестве доказательства некоторых современных подходов к финансовому моделированию. Таким образом, его предлагали применять в теории портфеля как предшественника концепции «среднее-риск» и предтече эконофизики – одной из самых популярных альтернатив современной финансовой теории. Из этого можно сделать вывод, что санкт-петербургский парадокс имеет существенное практическое значение для портфельных менеджеров.

Еще один альтернативный вариант применения санкт-петербургского парадокса был предложен Д.Дюрандом. Он рассматривал вместо вероятностей p_k коэффициенты дисконтирования $v^k = (1+i)^{-k}$, а вместо выигрышей x_k – коэффициенты наращения стоимости организации $(1+g)^{k-1}$. В этом случае математическое ожидание «выигрыша» бесконечно при $g \geq i$. Понятно, что приложение санкт-петербургской игры здесь чисто формальное, потому что:

1) коэффициенты дисконтирования не являются вероятностями;

2) сумма бесконечного числа величин $(1+i)^{-k}$ не равна единице (условие нормирования «вероятностей» нарушается);

3) существование риска игнорируется (Дюранд применял соответствующее значение как один из исходов случайной величины) [16].

При всех указанных недостатках выведенная в итоге формула настоящей дисконтированной стоимости организации верна. Полученный результат пытались применять для объяснения участия в финансовых пирамидах или поведения в период финансовых пузырей: если потенциальный темп прироста стоимости активов g превосходит текущую ставку процента i, то цену на этот актив можно устанавливать бесконечно высокой.

Следующий вариант применения санкт-петербургского парадокса предполагает его представление в виде денежного потока. Данный вариант санкт-петербургской игры принадлежит д'Аламберу, а у профессиональных игроков казино и финансовых спекулянтов эта стратегия (например, при игре в рулетку постоянно ставить на один цвет, удваивая ставку при проигрыше) получила название система или мартингал д'Аламбера. Главная проблема данного подхода заключается в том, что размер ставки увеличивается экспоненциально, и выделенные на игру деньги могут закончиться очень быстро.

Существует и еще один вариант применения санкт-петербургского парадокса в экономической сфере. Он основан на схожести функции полезности Д. Бернулли и информационного критерия минимума энтропии К.Э. Шеннона. В 1956 г. Дж. Келли предложил оценку точности передачи данных как «игру», применив в качестве критерия сумму (интеграл) логарифмов величин активов. При этом Келли не применял идею функции полезности, рассчитывая средний темп прироста (отсюда и логарифмическая функция). Несмотря на лишь внешнюю связь с азартными играми, данный подход распространился среди профессиональных игроков казино и финансовых спекулянтов под названием «критерий Келли», а впоследствии была осознана его связь с идеями Д. Бернулли.

3. Закон распределения цены на рынке ценных бумаг

Отметим, что санкт-петербургский парадокс имеет существенное значение для инвесторов и портфельных менеджеров. Конкретизируем это.

Первая идея заключается в том, что распространение прибыли на рынке ценных бумаг не согласуется со стандартной моделью, используемой в теории финансов. Эта теоретическая флуктуация значима при управлении рисками, рыночной эффективностью и индивидуальном выборе акций [3].

Стандартная теория финансов утверждает, что колебания цен актива соответствуют нормальному распределению – знаменитая кривая колокола. Хотя многое в природе не соответствует норме [1]. Поэтому предположим, что и рынок акций не является исключением. А фрактальное распределение отличается следующими характеристиками: большое число меньших частей и подобные друг другу части в разных масштабах [14]. Например, дерево имеет большой ствол и множество меньших ответвлений, а маленькие ветви подобны большим. При этом средняя величина не является характеристикой фрактальной системы в сравнении с нормальным распределением [15].

Известны исследования, связанные с вопросом идентификации вероятностного распределения цен финансовых активов на фондовом рынке. Основная цель этих исследований состояла в том, чтобы выяснить, насколько обоснована точка зрения, в соответствии с которой законом изменения цен на фондовом рынке является нормальное распределение, а не фрактальное [5].

По результатам исследования была подтверждена фрактальность распределения цены на рынке финансовых активов.

Бенуа Мандельброт в своей работе демонстрирует, что прибыль на рынке ценных бумаг имеет фрактальное распределение. Мандельброт доказывает это следующим образом: он увеличивает и уменьшает в длину горизонтальную ось цен, при этом время эффективно убыстряется или тормозится. Отсюда вывод: цены на практике фрактальны. Помимо того, что редкие сильные изменения сопровождаются большим количеством меньших изменений цены, цены в различных масштабах времени выглядят подобно (например, дневные, недельные и месячные графики). Такой финансовый ряд времени Мандельброт называет мультифрактальным. В данном случае приставка «мульти» характеризует регулирование времени [6].

Геофизик Дидье Сорнетт (Didier Sornette) в своей книге «Причины краха рынков акций» подтверждает, что распределения рынка ценных бумаг содержат две закономерности: тело, которое моделируется с применением стандартной теории, и моделируемый совершенно другим способом хвост. Проведенный в данной работе анализ дает Сорнетту [9] основание утверждать, что цены на фондовом рынке независимы, т.е. опровергаются постулаты классической теории финансов.

Данные исследования, естественно, актуализировали развитие теории фрактальных рынков. В альтернативу известным гипотезам эффективного рынка сформулированы гипотезы фрактального рынка, рамки которых ориентируют на разработку специального аппарата моделирования рыночных процессов. Даже в имитационных моделях использование привычного нормального распределения следует признать некорректным.

Поэтому применение статистики нормальных распределений для оценки фрактальной системы, подобной финансовым рынкам, потенциально очень рискованно. Тем не менее теоретики и практики повторяют это ежедневно. При этом основная отличительная особенность между этими двумя системами проявляется в вероятностях и прибылях. Характерный пример – крах 1987 года. Заметим, что, по оценкам аналитиков, вероятность (в соответствии с нормальным распределением) рыночного спада не более чем 20% была бесконечно низкой, близкой к нулю. Напомним, что итоговый ущерб при этом превышал 2 триллиона долларов.

Для наглядности представления изобразим и визуально сравним выборки данных с нормальным и фрактальным распределением [14]. Выборка с нормальным распределением представлена на рис. 1.

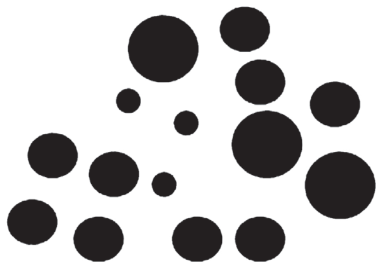

Рис. 1. Выборка с нормальным распределением

А выборка с фрактальным распределением изображена на рис. 2.

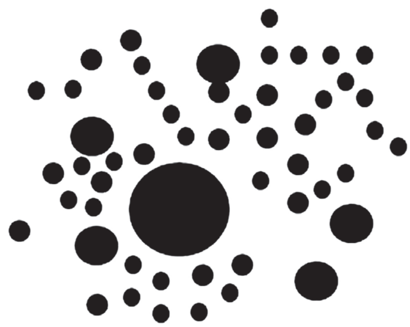

Рис. 2. Выборка с фрактальным распределением

Смоделируем и сравним нормальную игру с подкидыванием монеты и санкт-петербургскую игру.

Предположим следующие условия нормальной игры: игрок подкидывает монету и зарабатывает 2 доллара, если выпадает орел, и ничего не зарабатывает, если выпадает решка. Потенциальная цена игры составляет 1 доллар. Было сыграно 1 миллион раундов по 100 бросков [13]. Как и ожидалось, результатом игры стало четкое нормальное распределение. Полученная модель нормальной игры с подкидыванием монеты показана на рис. 3.

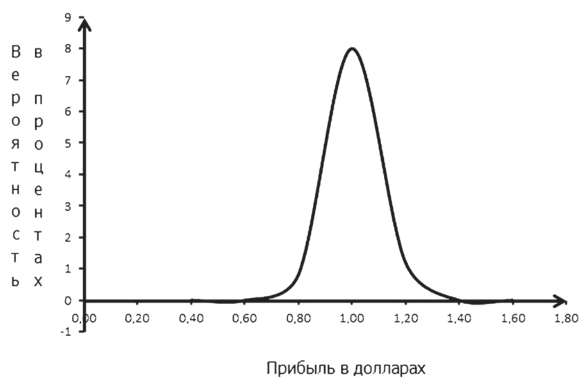

Рис. 3. Нормальная игра с подкидыванием монеты

(Функция плотности вероятности для нормальной системы)

Перейдем к моделированию санкт-петербургской игры. Выясняется, что главный процесс – стохастический, а итог – закон силы. Например, в половине случаев игра дает прибыль 2 доллара, а в трех четвертях случаев – не более 4 долларов. Хотя при 30-м броске прибыль составит 1,1 миллиарда долларов, а вероятность при этом составляет всего лишь 1 из 1,1 миллиарда [10]. Средняя прибыль санкт-петербургской игры непостоянна, поэтому ее среднее значение однозначно характеризует стратегию игры [7]. Таким образом, как и предполагалось, результатом игры стало фрактальное распределение. Полученная модель санкт-петербургской игры показана на рис. 4.

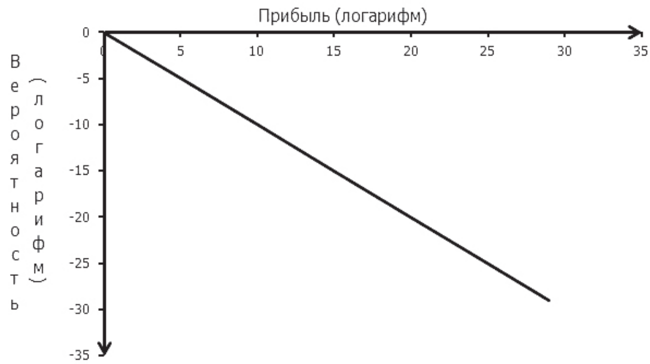

Рис. 4. Санкт-петербургская игра
(Функция плотности вероятности для фрактальной системы)

Вторая идея заключается в оценке роста акций. Целый ряд работ Дэвида Дюрана был посвящен этой проблеме. По его мнению, санкт-петербургский парадокс дает возможность иначе подойти к анализу акций роста.

Напомним, что акции роста – это акции быстрорастущих организаций, чья прибыль раньше увеличивалась быстрыми темпами, существенно превосходя показатели других организаций, при этом те же самые темпы роста планируются в будущем. Акции роста – это ценные бумаги с высоким уровнем P/E (превышающем 50 или 100), при этом P/E – отношение цена/прибыль [9].

В результате появляется возможность ответить на следующий вопрос: «Сколько вы можете потратить за достаточно низкую вероятность того, что организация сумеет постоянно значительно увеличивать свой денежный оборот?» [12].

В 1957 г. Дэвид Дюран дал ответ на данный вопрос в статье под названием «Акции роста и петербургский парадокс». Он не рекомендует неосторожно обращаться с нормальным распределением. Но поскольку на большинстве растущих рынков действует закон «Победитель получает все», не стоит ожидать, что в будущем модели создания стоимости и доходности будут стремиться к нормальному распределению [12].

Санкт-петербургскому парадоксу уже столетия, но сегодня его уроки актуальны как никогда. Одна из основных задач в инвестировании – как поймать (или избежать) значимое событие с низкой вероятностью. К сожалению, стандартная теория финансов немного скажет нам о предмете.

Заключение

Санкт-петербургский парадокс – это задача из сферы теории вероятностей, имеющая важную роль для эволюции нескольких научных областей, особенно математики, финансовой математики и экономики в целом. Математик К. Менгер впервые предложил использовать санкт-петербургский парадокс в экономической сфере, сместив акцент с определения «честной цены» определенной азартной игры на поиск адекватной дескриптивной модели поведения в условиях неопределенности.

Применение этой задачи в экономике встречается в таких идеях, как принцип убывающей предельной полезности, ожидаемая полезность как критерий принятия решения в условиях неопределенности, основы микроэкономики страхования, управления рисками и теория игр.

К тому же санкт-петербургский парадокс пытались использовать в качестве доказательства некоторых современных подходов к финансовому моделированию. Таким образом, его предлагали применять в теории портфеля как предшественника концепции «среднее-риск» и предтече эконофизики – одной из самых популярных альтернатив современной финансовой теории.

Список источников

1. Давнис В.В., Добрина М.В. Модели доходности активов и их применение в моделях портфельного инвестирования // *Материалы XII международной научно-практической конференции «Экономическое прогнозирование: модели и методы»*, Воронеж, 2016, с. 197-200.

2. Добрина М.В. Функции полезности и их применение в моделировании портфельных решений // *Современная экономика: проблемы и решения*, ВГУ, Воронеж, 2017, no. 8 (92).

3. Давнис В.В., Зироян М.А., Комарова Е.В., Тинякова В.И. *Прогнозное обоснование инвестиционных решений на финансовых рынках*. Москва, 2015.

4. Кудрявцев А.А. Санкт-петербургский парадокс и его значение для экономической теории // *Вестник СПбГУ,* сер. 5, 2013, вып. 3, с. 41-55.

5. Лаплас П.С. *Опыт философии теории вероятностей*. Москва, Либроком, 2011.

6. Мандельброт Б. *Фракталы, случай и финансы*. Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2004.

7. Мобуссин М. *Больше, чем вы знаете. Необычный взгляд на мир финансов.* Москва, Альпина паблишер, 2014.

8. Петерс Э. *Фрактальный анализ финансовых рынков: применение теории хаоса в инвестициях и экономике*. Москва, Интернет-трейдинг, 2004.

9. Сорнетте Д. *Как предсказывать крахи финансовых рынков. Критические события в сложных финансовых системах*. Москва, И-Трейд, 2011.

10. Aase K. On St. Petersburg paradox // *Scandinavian Actuarial Journal*, 2001, no. 1, pp. 69-78.

11. Brito D.L. Beckers theory of the allocation of time and the St. Petersburg paradox // *Journal of Economic Theory,* 1975, vol. 10, pp. 123-126.

12. Durand D. Growth stocks and St. Petersburg paradox // *The Journal of Finance*, 1957, vol. 12, no. 3, pp. 348-363.

13. Peters O. The time resolution of the St. Petersburg paradox // *Philosophical Transactions of the Royal Society.* Ser. A, 2011, vol. 369, pp. 4913-4931.

14. Samuelson P.A. St. Petersburg paradoxes: defanged, dissected and historically described // *Journal of Economic Literature*, 1977, vol. 15, pp. 24-55.

15. Szekely G.J., Richards D. The St. Petersburg paradox and the crash of high-tech stocks in 2000 // *The American Statistician*, 2004, vol. 58, no. 3, pp. 225-231.

16. Weber Ch.E. The St. Petersburg paradox: a resolution for impatient risk seekers // *International advances in economic research*, 1998, vol. 4, pp. 367-373.

17. Weirich P. The St. Petersburg gamble and risk // *Theory and Decision*, 1984, vol. 17, pp. 193-202.

THE ST. PETERSBURG PARADOX AND ITS APPLICATIONS AT FINANCIAL MARKETS

Dobrina Mariya Valeryevna, graduate student

Voronezh State University, University Sq., 1, Voronezh, Russia, 394006; e-mail: nice.smirnova@yandex.ru

Purpose: the author appraises the use opportunities of St. Petersburg paradox in process modeling of financial assets pricing in the fractal market. *Discussion*: St. Petersburg paradox is the task of probability theory sphere. It plays the important role for the evolution of several scientific fields, especially mathematics, financial mathematics and economics in general. Mathematician K. Menger was first proposed to use the St. Petersburg paradox in the economic sphere. He shifted the emphasis from determination of certain gambling «fair price» on the search for an adequate descriptive model of behavior under uncertainty. In addiction the author describes the possible applications of this model in diminishing marginal utility, expected utility as a criterion for decision making under uncertainty, fundamentals of insurance and risk management. The writer offers to use the St. Petersburg paradox in modern approaches to financial modeling. *Results*: the author revealed that the St. Petersburg paradox has the fractal distribution. Whereas the writer considers advisable to use the fractal distribution in the financial markets simulation.

Keywords: St. Petersburg paradox, normal distribution, fractal distribution, probability density function, growth shares.

References

1. Davnis V.V., Dobrina M.V. [Models of asset returns and their application in models of portfolio investment]. *Materialy 12 mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Ekonomicheskoe prognozirovanie: modeli i metody»* [Proc. 12th Int. sci.-pract. conf. «Economic forecasting: Models and methods»]. Voronezh, 2016, pp. 197-200. (In Russ.)

2. Dobrina M.V. Funktsii poleznosti I ih primenenie v modelirovanii portfelnyh resheniy [Utility functions and their application to the portfolio decisions modeling]. *Sovremennaia ekonomika: problemy i resheniia*, 2017, no. 8 (92), pp. 64-76. (In Russ.)

3. Davnis V.V., Ziroyan M.A., Komarova E.V., Tinyakova V.I. *Prognoznoe obosnovanie investitcionnyh reshenii na finansovyh rynkah* [The Forecast substantiation of investment decisions in financial markets]. Moscow, 2015. (In Russ.)

4. Kudryavtsev A.A. Sankt-Peterburgskii paradox I ego znachenie dlya economicheskoi teorii [St. Petersburg paradox and its significance for economic theory]. *Vestnik St. Petersburg University*, 2013, no. 3 (5), pp. 41-55. (In Russ.)

5. Laplace P.S. *A philosophical essay on probabilities of compound*. New York, 1902.

6. Mandelbrot B. *Fractals: Form, Chance and Dimension*, W.H.Freeman & Company, 1977.

7. Michael J. *Mauboussin More Than You Know. Finding Financial Wisdom in Unconventional Places* (Updated and Expanded). Columbia University Press, 2007.

8. Peters E. *Fraktalynyiy analiz finansovyih ryinkov: primenenie teirii haosa v investitsiyah I economike* [The fractal analysis of financial markets: the theory of chaos application in investments and economics]. Moscow, Internet-trading, 2004.

9. Sornette D. *Kak predskazyvaty krahi finansovyh ryinkov. Kriticheskie sobyitiya v slozhnyih finansovyih sistemah* [How to predict the collapse of the financial markets. Critical events in complex financial systems]. Translated from the French, 2011.

10. Aase K. On St. Petersburg paradox. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2001, no. 1, pp. 69-78.

11. Brito D.L. Beckers theory of the allocation of time and the St. Petersburg paradox. *Journal of Economic Theory*, 1975, vol. 10, pp. 123-126.

12. Durand D. Growth stocks and St. Petersburg paradox. *The Journal of Finance*, 1957, vol. 12, no. 3, pp. 348-363.

13. Peters O. The time resolution of the St. Petersburg paradox // *Philosophical Transactions of the Royal Society*. Ser. A, 2011, vol. 369, pp. 4913-4931.

14. Samuelson P.A. St. Petersburg paradoxes: defanged, dissected and historically described. *Journal of Economic Literature*, 1977, vol. 15, pp. 24-55.

15. Szekely G.J., Richards D. The St. Petersburg paradox and the crash of high-tech stocks in 2000 // *The American Statistician*, 2004, vol. 58, no. 3, pp.225-231.

16. Weber Ch.E. The St. Petersburg paradox: a resolution for impatient risk seekers. *International advances in economic research,* 1998, vol. 4, pp. 367-373.

17. Weirich P. The St. Petersburg gamble and risk. *Theory and Decision*, 1984, vol. 17, pp. 193-202.