УДК 51-77

ЭНТРОПИЙНЫЙ АНАЛИЗ ПОРТФЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Давнис Валерий Владимирович, д-р экон. наук, проф.
Коротких Вячеслав Владимирович, канд. экон. наук, доц.
Лукин Илья Александрович, асп.

Воронежский государственный университет, Университетская пл., 1, Воронеж, Россия, 394018; e-mail: korotkikh@econ.vsu.ru; lukin@econ.vsu.ru

Цель: разработка модели энтропии портфельной группы на фондовом рынке и использование ее в портфельном анализе инвестиционных возможностей. *Обсуждение*: актуальным направлением математического моделирования экономических процессов является их исследования посредством методов системного анализа, в частности, методов энтропийного моделирования. Энтропия является базисом развития любых систем в экономике с вероятностным поведением. Мы полагаем, что использование энтропии в моделировании экономических процессов вообще и инвестиционных процессов, в частности, в настоящее время недостаточно формализовано и, как правило, носит качественный характер. *Результаты*: разработана модель энтропии портфельной группы на фондовом рынке на основе модели дифференциальной энтропии многомерной стохастической системы. Установлено, что величина энтропии портфельного решения одновременно характеризует как определенность портфельной группы (степень взаимосвязи входящих в нее объектов), так и ее неопределенность (степень хаотичности входящих в нее объектов). Числовое решение позволило установить, что на эффективном в смысле соотношения риск–доходность множестве портфельных групп существует единственная портфельная группа с минимальной энтропией.

Ключевые слова: инвестиции, эффективный портфель, дифференциальная энтропия.

DOI:

Введение

Энтропия часто используется для исследования систем различной природы (биологических, социальных, экономических, физических и др.). На сегодняшний момент понятие «энтропия» является достаточно распространенным в научных исследованиях. Так, в библиографической базе данных Web of Science за период с 1975 по 2016 г. представлено в общей сложности свыше 120 000 научных статей, в названии которых встречается понятие «энтропия». В базе данных Scopus эта величина составляет свыше 151 000 за период с 1897 по 2016 г.[1]

Анализ большого числа работ отечественных [17, 20-22, 24, 25 и др.] и зарубежных авторов [7, 8, 10, 13, 18, 27, 28 и др.] порождает больше вопросов, чем дает ответов. Мы склонны согласиться с точкой зрения А.Н. Тырсина в исследовании [26], констатирующей, что большинство результатов носят частный характер и/или реализуют принцип максимума энтропии. Также в работе А.П. Левича [16] поднимаются вопросы, касающиеся как понятия энтропии, так и его применения: (1) существует ли обобщенное представление об энтропии, пригодное для частных случаев; (2) как вычислять энтропию в частных случаях; (3) почему энтропия экстремальна для реализующихся в действительном мире состояний.

Целью настоящего исследования стала разработка модели энтропийной характеристики портфельной группы на фондовом рынке и использование ее в портфельном анализе инвестиционных возможностей.

Рабочая гипотеза: на эффективном в смысле соотношения риск–доходность множестве портфельных групп существует единственная портфельная группа с минимальной энтропией.

Типология

Проблема отбора материалов для написания подобной статьи порождает весьма большие трудности. Лишенная подробностей статья становится сухой и неинтересной. Обилие же деталей заключает в себе опасность сделать ее невыносимо длинной. Мы стремились к компромиссу, исследую воззрения только тех мыслителей, которые, на наш взгляд, имеют выдающееся значение, и упоминаниям в связи с ними о таких деталях, даже если они не являются определяющими, которые представляют ценность ввиду их иллюстративного и оживляющего характера.

Представляется, что основной проблемой энтропийного анализа сложных систем является отсутствие адекватной математической модели.

На сегодняшний день науке известны несколько форм энтропии.

Исторически первой открыта термодинамическая (или тепловая) форма энтропии. Р. Клаузис ввел понятие «энтропия» в научный оборот для определения меры необратимого рассеивания энергии [14]:

$$S_b - S_a = \int_a^b \frac{dQ}{T}, \tag{1}$$

где Q – количество теплоты, полученное системой в обратимом процессе; T – термодинамическая температура; S_a, S_b – энтропия начального и конечного состояния системы соответственно.

Несмотря на изначально узконаправленный специальный характер

[1] Для сравнения аналогичный показатель в базе данных Российского индекса научного цитирования на сегодняшний день не превышает и двух тысяч.

понятия, оно стало использоваться для описания глобальных закономерностей, в частности, в законе возрастания энтропии Вселенной.

Л. Больцман стал оперировать понятием статистической энтропии [12], которая дала возможность сравнивать энтропии разных состояний системы. Согласно Больцману, энтропия системы, пребывающей в конкретном состоянии, пропорциональна логарифму числа микросостояний, которыми может быть реализовано данное состояние:

$$S = n \ln N, \tag{2}$$

где N – вероятность макросостояния, отождествляемая с числом микросостояний системы при условии их равновероятности; а n – коэффициент пропорциональности, зависящий от принятой размерности энтропии.

К. Шеннон ввел понятие информационной энтропии как меры неопределенности сведений о некоторой информационной системе [9]. Известное уравнение неопределенности кодовой информации в дискретном случае в каналах связи имеет вид:

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 p_i, \tag{3}$$

где p_i – вероятность появления i-го символа в коде, включающем m символов; $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Как правило, при оценке энтропии сложной системы осуществляется оценивание именно информационной энтропии. Следует отметить глубокий уровень проработанности положений теории информационной энтропии и получение значительных результатов в ряде публикаций [9, 11, 15, 19, 23]. Однако в [26] акцентируется внимание на том факте, что моделирование многомерных стохастических систем посредством информационной энтропии сталкивается с серьезными затруднениями.

1. Идентификация пространства элементарных состояний системы, а также идентификация вероятностной меры на этом пространстве требует больших выборок для обеспечения достаточной точности оценки энтропии.

2. Сложность аппроксимации бесконечного числа состояний открытой системы фиксированным конечным множеством.

3. Слабая проработанность математического аппарата оценки информационной энтропии для многомерного случая. Отсутствие возможности адекватного модельного представления взаимосвязей элементов системы.

4. Информационная энтропия не учитывает изменения числовых характеристик исследуемого процесса с течением времени.

5. Информационная энтропия всегда положительная величина [29].

В известном смысле обобщением информационной энтропии можно считать дифференциальную энтропию (или энтропию закона распределения). Она характеризует энтропию m-мерной непрерывной случайной величины $\mathbf{Y}$, имеющей плотность распределения $p_{\mathrm{Y}}(x_1, \ldots, x_m)$, и представима как функционал

$$H(\mathbf{Y}) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\mathrm{Y}}(x_1, \ldots, x_m) \ln p_{\mathrm{Y}}(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m. \tag{4}$$

Структурная энтропия используется при измерениях неупорядоченности строения макросистемы [21]. В широком смысле структурная энтропия – мера неупорядоченности любого объекта по любым признакам. В [26] отмечается принципиальное отличие структурной и термодинамической энтропии. В замкнутых системах термодинамическая энтропия растет с течением времени, а структурная энтропия с течением времени может как увеличиваться, так и уменьшаться.

Рассмотренная классификация позволяет заключить, что имеющиеся адекватные энтропийные модели реальных объектов, как правило, разработаны для решения частных задач. Обобщенная модель должна удовлетворять следующим требованиям: (а) объяснять увеличение и уменьшение энтропии; (б) принимать положительные и отрицательные значения; (в) учитывать неоднородность и многомерность объектов; (г) быть практически реализуемой.

Использование дифференциальной энтропии может решить указанные проблемы, оставаясь в рамках информационной энтропии. Дифференциальная энтропия вычисляется на основе плотности распределения вероятностей случайного вектора, и в этой связи она применима во всех стохастических системах любой природы (физических, социальных, экономических и т.д.). К основным затруднениям использования дифференциальной энтропии при исследовании сложных систем можно отнести следующие: (а) обычно закон распределения многомерной случайной величины Y не известен; (б) аналитическое решение (3) получено лишь для частного случая – многомерного нормального распределения случайного вектора Y.

Предпосылки энтропийного анализа на фондовом рынке

Рассмотрим фондовый рынок как сложную стохастическую систему в виде многомерной непрерывной случайной величины $\mathbf{S}=(S_1,S_2,\ldots,S_k)$ с совместной плотностью распределения $p_{\mathbf{S}}=(x_1,x_2,\ldots,x_k)$. Элементы такого вектора представляют собой одномерную случайную величину, характеризующую реализацию процесса биржевых торгов соответствующего актива. Причем они могут быть как взаимосвязанными, так и ортогональными.

В связи с тем, что процесс биржевых торгов происходит под влиянием множества слабо зависимых случайных факторов, будем полагать, что его реализация имеет нормальное распределение. Поскольку система случайных величин $(S_1,S_2,\ldots,S_k)$ состоит из попарно линейно коррелированных гауссовских случайных величин, то ее плотность распределения $p_{\mathbf{S}}=(\mathbf{x})$ является совместной нормальной.

Полагая, что энтропия процесса биржевых торгов по отдельному фондовому активу, представленного отдельной нормально распределенной случайной величиной S_i [2], равна

$$H(S_i)=\frac{1}{2}\ln\left[(2\pi e)\sigma_{S_i}^2\right],\ i=1,2,\ldots,m.$$

Определим энтропию процесса биржевых торгов в целом $H(\mathbf{S})$, используя теорему из [4]. Полагая, что $\mathbf{R}$ – корреляционная матрица случайного нормально распределенного вектора доходностей всех фондовых активов $\mathbf{S}$, участвующих в процессе биржевых торгов, энтропия вектора $\mathbf{S}$ будет равна

$$H(\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\ln\left[(2\pi e)\sigma_{S_i}^2\right]\right) + \frac{1}{2}\ln|\mathbf{R}|,$$

где $\sigma_{S_i}^2$ – дисперсия случайной величины S_i; $|\mathbf{R}|$ – определитель корреляционной матрицы $\mathbf{R}$.

Энтропийная модель фондового рынка

Далее рассмотрим портфельную группу как часть сложной стохастической системы фондового рынка, реализация которой представима в виде многомерной непрерывной случайной величины $\mathbf{S}^{(g)} = \left(S_1^{(g)}, S_2^{(g)}, \ldots, S_n^{(g)}\right)$ с совместной плотностью распределения $p_{\mathbf{S}^{(g)}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Элементы этого вектора также формируются по результатам реализации процесса биржевых торгов соответствующего актива и представляют собой одномерную случайную величину. Полагая, что $\mathbf{R}^{(g)}$ представляет корреляционную матрицу случайного нормально распределенного вектора доходностей портфельной группы $\mathbf{S}^{(g)}$, энтропию доходности портфельной группы получим в виде:

$$H\left(\mathbf{S}^{(g)}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\ln\left[(2\pi e)\sigma_{S_i^{(g)}}^2\right]\right) + \frac{1}{2}\ln\left|\mathbf{R}^{(g)}\right|,$$

где $\sigma_{S_i^{(g)}}^2$ – дисперсия случайной величины $S_i^{(g)}$; $\left|\mathbf{R}^{(g)}\right|$ – определитель корреляционной группы матрицы $\mathbf{R}^{(g)}$.

Полученное выражение справедливо для случая исследования объектов инвестирования вне портфеля. Поскольку в дальнейшем нас будет интересовать задача оптимизации портфельных структур, то имеет смысл исследовать дифференциальную энтропию портфельной группы произвольной структуры.

Энтропийная модель портфельной группы

Пусть портфельная группа имеет произвольную структуру $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $\sum_{i \le n} w_i = 1$, тогда ее доходность представляет собой нормально распределенный вектор

$$\mathbf{S}^{(g)} \mid \mathbf{w} = \mathbf{S}^{(g)} \circ (\mathbf{i} \otimes \mathbf{w}),$$

где $\circ$ – произведение Адамара; $\otimes$ – тензорное произведение векторов; i – единичный вектор-строка. Рассмотрим энтропию вектора $\mathbf{S}^{(\mathbf{w})}$. Поскольку [4]

$$\operatorname{var}\left(S_i^{(g)} \mid w_i\right) = \operatorname{var}\left(w_i S_i^{(g)}\right) = w_i^2 \sigma_{S_i^{(g)}}^2,$$

имеем

$$H\left(\mathbf{S}^{(g)} \mid \mathbf{w}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\ln\left[(2\pi e) w_i^2 \sigma_{S_i^{(g)}}^2\right]\right) + \frac{1}{2}\ln\left|\mathbf{R}^{(g)}\right|.$$

Преобразуем первое слагаемое, отражающее энтропию хаотичности процесса формирования доходности портфельной группы произвольной структуры

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\ln\left[(2\pi e) w_i^2 \sigma_{S_i^{(g)}}^2\right]\right) = \frac{n}{2}\ln(2\pi e) + \frac{1}{2}\ln\prod_{i=1}^{n}\left(w_i^2 \sigma_{S_i^{(g)}}^2\right).$$

Таким образом, очевидно, что изменение структуры портфеля скажется только на втором слагаемом полученного выражения. Тогда энтропия случайного нормально распределенного вектора доходностей портфельной группы $\mathbf{S}^{(g)} \mid \mathbf{w}$ произвольной структуры представима в виде

$$H\left(\mathbf{S}^{(g)} \mid \mathbf{w}\right) = \frac{n}{2}\ln\left(2\pi e\right) + \frac{1}{2}\ln\prod_{i=1}^{n}\left(w_i^2\sigma_{S_i^{(g)}}^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left|\mathbf{R}^{(g)}\right|. \quad (1.5)$$

Имеем, что энтропия вектора доходности портфельной группы, суть энтропия портфеля произвольной структуры, обусловлена тремя составляющими. Число активов в портфельной группе оказывает линейное положительное воздействие на величину энтропии, что находит отражение в первом слагаемом. Оно показывает, что одним из способов снижения энтропии портфельной группы можно считаться снижение числа активов в портфеле.

Во втором слагаемом отражение находит вклад взвешенной вариации активов в формирование энтропии доходности портфельной производной структуры. Оно показывает, что по мере увеличения весов активов с высокой вариацией энтропия портфеля будет расти. Два проанализированных слагаемых представляют собой вклад энтропии хаотичности.

Непосредственно снизить общую энтропию доходности портфельной группы произвольной структуры представляется возможным за счет энтропии самоорганизации. Это становится очевидным при анализе третьего слагаемого. Ключом к снижению энтропии здесь является неортогональность элементов многомерного вектора доходностей портфельной группы.

Далее рассмотрим частный случай $n = 2$. Тогда энтропия портфеля двух активов может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} H\left(\mathbf{S}^{(g)} \mid \mathbf{w}\right) &= \ln\left(2\pi e\right) + \frac{1}{2}\ln\left(w_1^2\sigma_{S_1^{(g)}}^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(w_2^2\sigma_{S_2^{(g)}}^2\right) + \frac{1}{2}\ln\begin{vmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{vmatrix} \\ &= \ln\left(2\pi e\right) + \frac{1}{2}\ln\left(w_1^2\sigma_{S_1^{(g)}}^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(w_2^2\sigma_{S_2^{(g)}}^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1-\rho^2\right), \end{aligned}$$

где ρ – коэффициент корреляции доходностей активов.

Эмпирическое исследование

Исходные данные

В эмпирической части мы проиллюстрируем возможности использования дифференциальной энтропии в портфельном анализе на двух выборочных совокупностях. Первую выборочную совокупность данных мы сформировали по временным рядам стоимостей акций эмитентов различной отраслевой принадлежности: AT&T Inc. (T), American Express Company (AXP), Bank of America Corporation (BAC), General Electric Company (GE), JPMorgan Chase & Co. (JPM), McDonald's Corporation (MCD), The Procter & Gamble Company (PG), Microsoft Corporation (MSFT) и Wal-Mart Stores, Inc. (WMT), – торгуемых на бирже NYSE. В исследовании мы понедельно проанализировали период с 04.01.2010 по 11.09.2017. Для визуализации данных воспользуемся диаграммой размаха. Она очень проста для понимания и часто используется в различных публикациях. Соответствующие диаграммы представлены ниже.

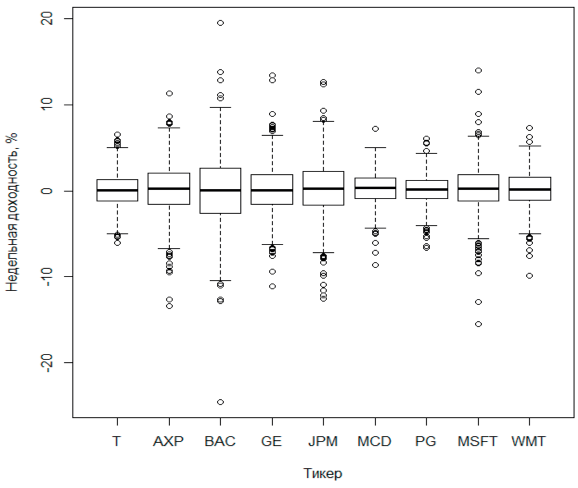

Рис. 1. Диаграммы размаха недельных доходностей акций зарубежных компаний

Распределения доходностей акций являются симметричными. Максимальную дисперсию демонстрируют распределения доходностей MSFT и BAC, минимальную – T и MCD. В зависимости от акции доля выбросных наблюдений варьируется в диапазоне 3-5 %.

Вторую выборочную совокупность данных мы сформировали по временным рядам стоимостей акций российских эмитентов различной отраслевой принадлежности: ПАО «Газпром» (GAZP), ГМК «Нор.Никель» ПАО (GMKN), НК Лукойл ПАО (LKOH), ПАО НК Роснефть (ROSN), Сбербанк России ПАО (SBER), ПАО Банк ВТБ (VTBR), Мобильные ТелеСистемы ПАО (MTSS), Северсталь ПАО (CHMF), Ростелеком ПАО (RTKMP) – торгуемых на московской бирже. Анализируемый период тот же. Для визуализации данных также воспользуемся диаграммой размаха.

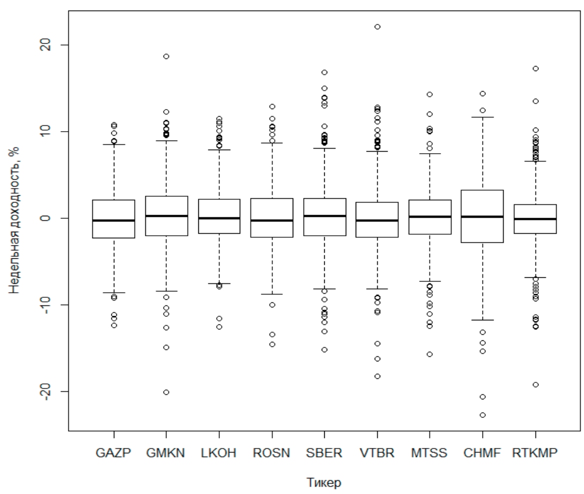

Рис. 2. Диаграммы размаха недельных доходностей акций российских компаний

Распределения доходностей акций являются симметричными. Максимальную дисперсию демонстрирует распределение доходностей CHMF, минимальную – RTKMP. Доля выбросных наблюдений не превышает 5%. На текущем этапе исследования имеет смысл заключить, что выборочная совокупность по доходностям российских акций демонстрирует более высокую волатильность.

Тестирование на нормальность

В соответствии с [26] энтропийная модель получена в предположении совместного нормального распределения, корректное вычисление дифференциальной энтропии портфеля предполагает тестирование многомерного случайного вектора доходностей акций на нормальность. В настоящем исследовании для проверки гипотезы о соответствии распределения многомерной переменной многомерному нормальному распределению предлагается E-статистика [30].

Таблица 1

Результаты проверки гипотезы о нормальности

Выборка	Наблюдаемое значение критерия	p-значение	Вывод
NYSE	5,4169	< 2,2e-16	H0 не отклоняется
РТС	5,0076	< 2,2e-16	H0 не отклоняется

Использованный статистический критерий не опроверг соответствие исследуемых многомерных векторов доходностей нормальному закону распределения.

Случай 1. Продажи без покрытия запрещены

В условиях «естественного» протекания рыночного процесса необходимость ограничения продаж без покрытия (или вовсе отказа от таких операций) обусловлена несклонностью к риску на уровне инвестора.

В условиях кризиса необходимость ограничения (вплоть до временных запретов) на проведение маржинальных операций, в том числе и продаж без покрытия, возникает на уровне регулятора, преследующего цель восстановить доверие на рынках, а также не допустить резкого падения местных фондовых индексов. Так, в целях обуздания паники и слухов, охвативших Wall Street в 2008 году, Комиссия по торговле ценными бумагами США (SEC) экстренно ограничила непокрытые продажи акций почти 800 эмитентов. Управление по финансовому регулированию и надзору Великобритании (FSA) ввело временный запрет на «короткую продажу» акций на Лондонской фондовой бирже с 19 сентября 2008 г. до 16 января 2009 г.

Изложенные аргументы и факты позволяют заключить, что задача портфельного анализа с использованием дифференциальной энтропии в условиях ограничения непокрытых продаж представляет научный и практический интерес, поскольку охватывает широкий спектр реальных рыночных ситуаций.

Рассмотрим результаты числового решения, полученного в рамках портфельного анализа инвестиционных возможностей на бирже NYSE. Результат, представленный на графике, позволяет заключить следующее. Для заданного множества инвестиционных возможностей, представленного девятью акциями зарубежных эмитентов, идентифицирована граница эффективного множества портфельных групп. Это нашло отражение на графике в координатах «доходность-риск».

Для удобства графического представления исследуемых взаимосвязей наблюдаемых характеристик эффективных портфельных решений мы намеренно поменяли оси местами на этом графике, хотя читателю он привычнее именно в координатах «риск-доходность». Правее и ниже показаны отображения классических характеристик портфельного решения на множество значений дифференциальной энтропии. Анализ локальных экстремумов на вспомогательных графиках не опровергает выдвинутой гипотезы о существовании единственной точки (суть портфельной группы) на границе эффективного множества, где дифференциальная энтропия минимальна.

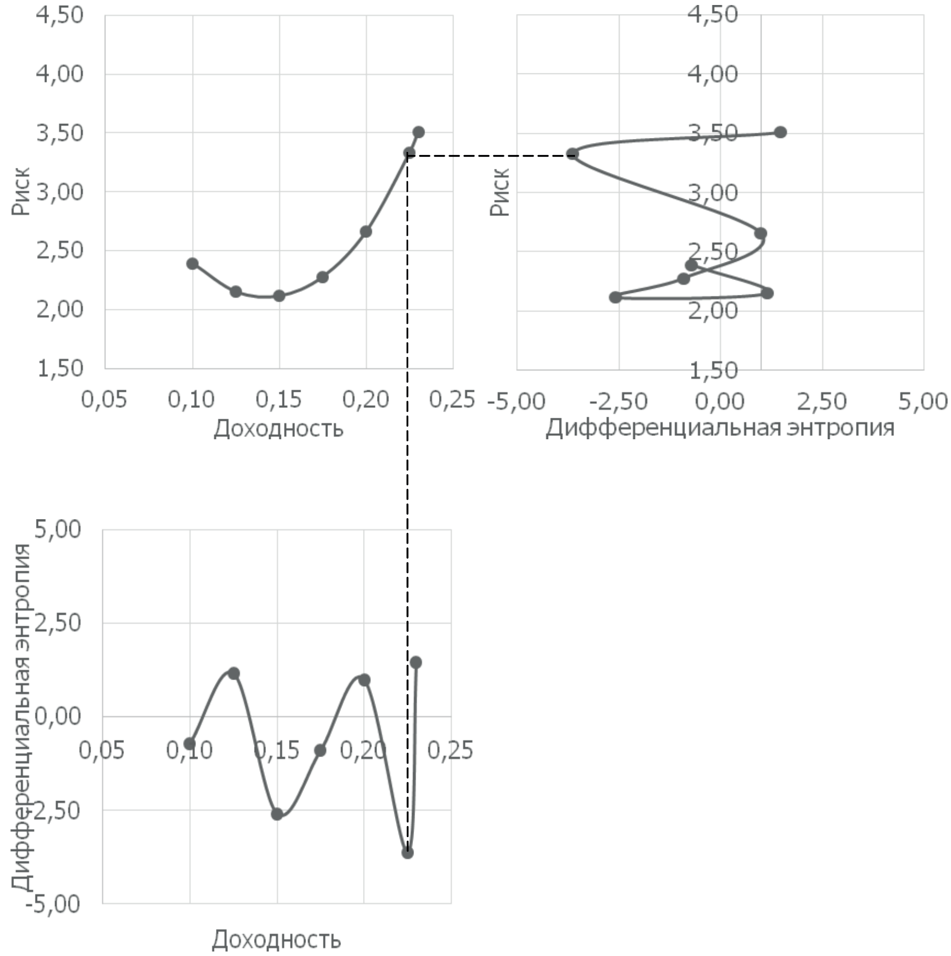

Рис. 3. NYSE без непокрытых продаж

Далее. Рассмотрим результаты портфельного анализа инвестиционных возможностей на бирже РТС.

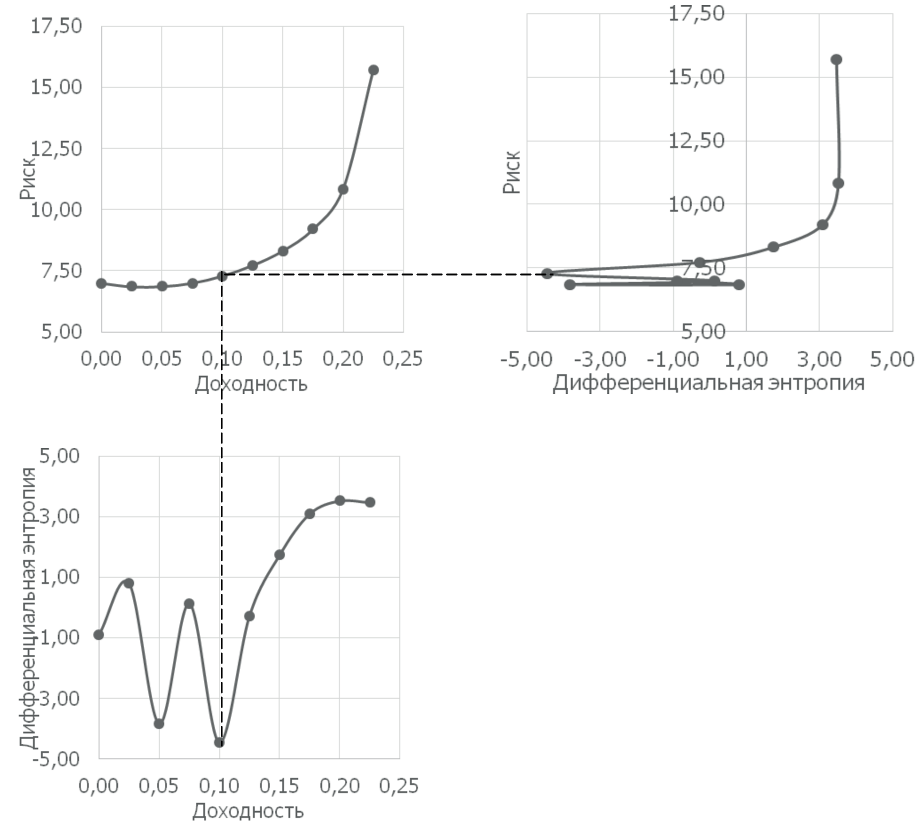

Рис. 4. РТС без непокрытых продаж

Аналогичную графическую модель используем в портфельном анализе на российском рынке. Для заданного множества инвестиционных возможностей, представленного девятью акциями российских эмитентов, идентифицирована граница эффективного множества портфельных решений. На вспомогательных графиках имеются несколько локальных экстремумов и единственный ярко выраженный минимум функции дифференциальной энтропии. Портфели минимального риска и минимальной дифференциальной энтропии различны по структуре. Интересным представляется отметить факт близости минимумов энтропии для портфельных групп российских и зарубежных акций в условиях ограничения сделок без покрытия. При этом величина риска портфельных групп российских акций превышает значение аналогичной характеристики портфельных групп зарубежных акций почти вдвое.

Случай 2. Продажи без покрытия разрешены.

Рассмотрим регулярный рыночный процесс без дополнительных ограничений на сделки без покрытия. На выборке зарубежных акций мы также получили единственный портфель минимальной энтропии.

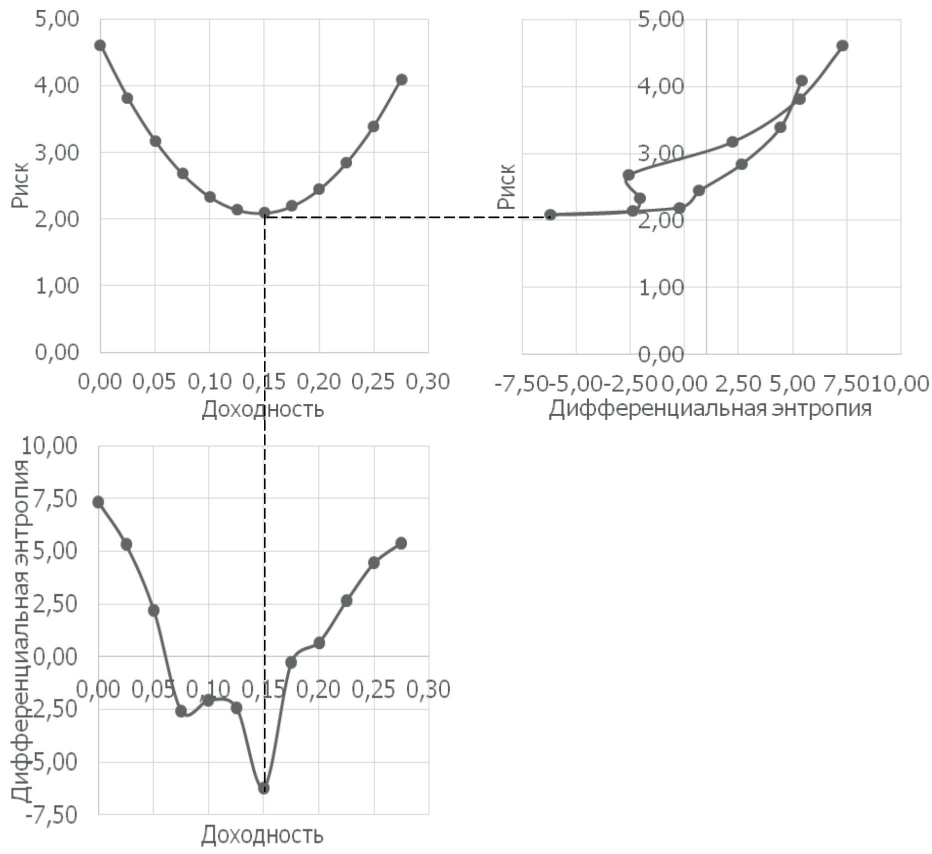

Рис. 5. NYSE с короткими продажами

В результате снятия ограничений на продажи без покрытия оценки величины риска эффективных портфельных групп оказались несколько ниже, чем в случае 1. Указанное изменение необходимо сказалось на увеличении диапазона значений дифференциальной энтропии эффективных портфелей и как следствие появлении нового минимума дифференциальной энтропии эффективных портфельных групп. Интересным представляется тот факт, что в этот раз портфели минимального риска и минимальной энтропии оказались идентичными. Оценка ожидаемой доходности портфеля минимального риска, впрочем, как и портфеля минимальной энтропии, оказалась ниже аналогичной величины для случая 1, рассмотренного выше.

Перейдем к анализу результатов по второй выборке.

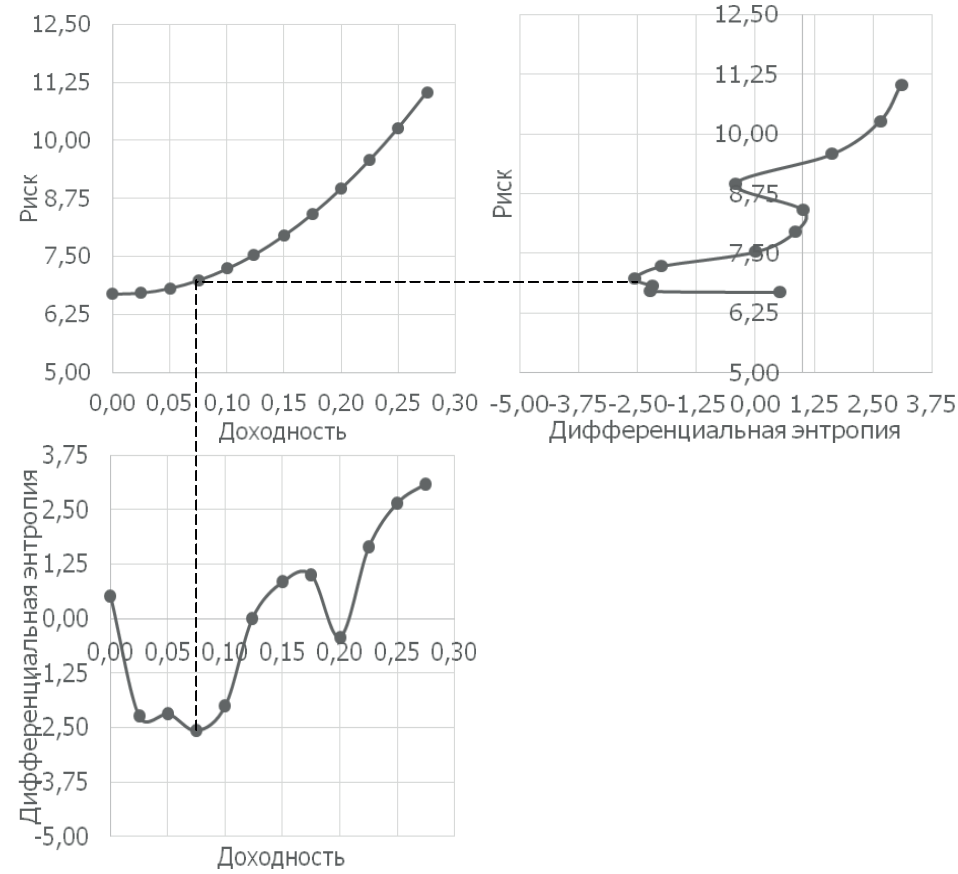

Рис. 6. РТС с короткими продажами

Как и предполагалось в рамках рабочей гипотезы исследования, на эффективном множестве существует единственный портфель минимальной энтропии. Анализ вспомогательных графиков показал, что снятие ограничения на непокрытые продажи отечественных акций незначительно снизило риски на эффективном множестве портфельных групп. Однако, как это было выявлено для выборки NYSE, снижение риска не сопровождалось снижением дифференциальной энтропии. Диапазон ее значений уменьшился, что привело к увеличению соответствующего минимума функции дифференциальной энтропии.

Заключение

В ходе проведенного исследования мы получили достаточное основание полагать, что дифференциальная энтропия расширяет возможности портфельного анализа инвестиционных возможностей и вполне может претендовать на статус дополнительной характеристики в портфельном анализе. Фактически мы получили новую характеристику портфельных решений на пространстве инвестиционных возможностей. Мы полагаем, что повысить эффективность портфельного анализа инвестиционных возможностей можно, рассматривая рыночные процессы с позиции увеличения или уменьшения их энтропии. В случае портфельного анализа самым очевидным вариантом управляющего воздействия представляется варьирование долями капитала, распределяемого между инвестиционными альтернативами, и увеличение степени взаимосвязи между выбранными инвестиционными альтернативами.

Для дальнейшего исследования представляет интерес рассмотрение задач минимизации и максимизации энтропии доходности портфельной группы произвольной структуры, выявления «полюсов роста» [1].

Список источников

1. Perroux F. *L'Economie du XXe siècle*. Paris, Universitaires de France, 1961.

2. Shannon C.E. A Mathematical Theory of Communication // *The Bell System Technical Journal*, 1948, vol. 27, p. 379-423, 623-656.

3. Тырсин А.Н., Соколова И.С. Задачи управления гауссовской стохастической системой на основе энтропийной модели // *Современные тенденции развития науки и технологий*, 2015, no. 6-1, с. 62-73.

4. Тырсин А.Н., Соколова И.С. Энтропийно-вероятностное моделирование гауссовских стохастических систем // *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*, 2012, т. 24, no. 1, с. 88-103.

5. Фёрстер Э., Рёнц Б. *Методика корреляционного и регрессионного анализа*: пер. с нем. Москва, Финансы и статистика, 1983.

6. Cover T.M., Thomas J.A. *Elements of Information Theory.* New York, Wiley, 1991.

7. Jaynes E.T. Informational Theory and Statistical Mechanics // *Phys. Rev.* 1957, vol. 102, pp. 620-630.

8. Lurie D., Wagensberg J. On Biomass Diversity in Ecology // *Bulletin of Mathematical Biology*, 1983, vol. 45, no. 2, pp. 287-293.

9. Shannon C.E. A Mathematical Theory of Communication // *The Bell System Technical Journal*, 1948, vol. 27, pp. 379-423.

10. Tribus M. Information Theory as the Basis for the Thermostatics and Thermodynamics // *Journal of Applied Mechanics*. 1961, vol. 28, no. 1, pp. 1-8.

11. Биллингслей П. *Эргодическая теория и информация*. Москва, Мир, 1969.

12. Больцман Л. *Избранные труды*. Москва, Наука, 1984.

13. Вильсон А. Дж. *Энтропийные методы моделирования сложных систем*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 1978.

14. Карно С., Томсон У., Клаузиус Р., Больцман Л., Смолуховский М.М. *Второе начало термодинамики*. Ленинград, ГТТИ, 1934.

15. Колмогоров А.Н. *Теория информации и теория алгоритмов*. Москва, Наука, 1987.

16. Левич А.П. Энтропия как мера структурированности сложных систем // *Труды семинара «Время, хаос, математические проблемы»*. Москва, ИМИСС МГУ, 2000, вып. 2, с. 163-176.

17. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. *Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды.* Москва, ЛИБРОКОМ, 2011.

18. Мандельброт Б. Теория информации и психолингвистика: теория частот слов // *Математические методы в социальных науках*. Москва, Прогресс, 1973, с. 316-337.

19. Мартин Н., Ингленд Дж. *Математическая теория энтропии.* Москва, Мир, 1988.

20. Попков Ю.С. *Математическая демоэкономика: макросистемный подход*. Москва, ЛЕНАНД, 2013.

21. Прангишвили И.В. *Энтропийные и другие системные закономерности: вопросы управления сложными системами*. Москва, Наука, 2003.

22. Приц А.К. *Принцип стационарных состояний открытых систем и динамика популяций.* Калининград, Калининградский государственный университет, 1974.

23. Синай Я.Г. *Введение в эргодическую теорию.* Москва, ФАЗИС, 1996.

24. Скоробогатов С.М. *Катастрофы и живучесть железобетонных сооружений (классификация и элементы теории)*. Екатеринбург, УрГУПС, 2009.

25. Стратонович Р.Л. *Теория информации.* Москва, Советское радио, 1975.

26. Тырсин А.Н. *Энтропийное моделирование многомерных стохастических систем*. Воронеж, Научная книга, 2016.

27. Хазен А.М. *Введение меры информации в аксиоматическую базу механики*. Москва, РАУБ, 1998.

28. Хакен Г. *Информация и самоорганизация: макроскопический подход к сложным системам*. Москва, Мир, 1991.

29. Шредингер Э. *Что такое жизнь? С точки зрения физика*. Москва, Атомиздат, 1972.

30. Szekely G.J., Rizzo M.L. A New Test for Multivariate Normality // *Journal of Multivariate Analysis*, 2005, vol. 93, no. 1, pp. 58-80.

ENTROPY ANALYSIS OF PORTFOLIO SOLUTIONS

Purpose: to develop a model for the entropy of a portfolio group in the stock market and use it in portfolio analysis of investment opportunities. *Discussion*: the actual direction of mathematical modeling of economic processes is their research through methods of system analysis, in particular, methods of entropic modeling. Entropy is the basis for the development of any systems in an economy with probabilistic behavior. Authors believe that the use of entropy in the modeling of economic processes in general and investment processes in particular is not currently formalized and, as a rule, is of a qualitative nature. *Results*: the article contains the developed model of entropy of a portfolio group in the stock market on the basis of the differential entropy model of a multidimensional stochastic system. Actors established that the value of the entropy of the portfolio solution simultaneously characterizes both the certainty of the portfolio group and its uncertainty

Keywords: investment, effective portfolio, differential entropy.

References

1. Perroux F. *L'Economie du XXe siècle*. Paris, UniversitairesdeFrance, 1961.
2. Shannon C.E. A Mathematical Theory of Communication. *The Bell System Technical Journal*, 1948, vol. 27, p. 379-423, 623-656.
3. Tyrsin A.N., Sokolova I.S. Zadachi upravleniia gaussovskoi stokhasticheskoi sistemoi na osnove entropiinoi modeli [Problems of control of a Gaussian stochastic system based on the entropy model]. *Sovremennye tendentsii razvitiia nauki i tekhnologii*, 2015, no. 6-1, pp. 62-73. (In Russ.)
4. Tyrsin A.N., Sokolova I.S. Entropiino-veroiatnostnoe modelirovanie gaussovskikh stokhasticheskikh sistem [Entropy-probabilistic modeling of Gaussian stochastic systems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriia Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2012, no. 1 (24), pp. 88-103. (In Russ.)
5. Ferster E., Rents B. *Metodika korreliatsionnogo i regressionnogo analiza* [Method of correlation and regression analysis]. M., Finansy i statistika, 1983. (In Russ.)
6. Cover T.M., Thomas J.A. *Elements of Information Theory.* New York, Wiley, 1991.
7. Jaynes E.T. Informational Theory and Statistical Mechanics. *Phys. Rev.,* 1957, vol. 102, pp. 620-630.
8. Lurie D., Wagensberg J. On Biomass Diversity in Ecology. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1983, vol. 45, no. 2, pp. 287-293.
9. Shannon C.E. A Mathematical Theory of Communication. *The Bell System Technical Journal*, 1948, vol. 27, pp. 379-423.
10. Tribus M. Information Theory as the Basis for the Thermostatics and Thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*. 1961, vol. 28, no. 1, pp. 1-8.
11. Billingslei P. *Ergodicheskaia teoriia i informatsiia* [Ergodic theory and information]. Moscow, Mir, 1969. (In Russ.)
12. Bol'tsman L. *Izbrannye trudy* [Selected works]. Moscow, Nauka, 1984. (In Russ.)
13. Vil'son A.Dzh. *Entropiinye metody*

modelirovaniia slozhnykh system [Entropy Methods for Modeling Complex Systems]. Moscow, FIZMATLIT, 1978. (In Russ.)

14. Karno S., Tomson U., Klauzius R., Bol'tsman L., Smolukhovskii M.M. *Vtoroe nachalo termodinamiki* [The second law of thermodynamics]. Leningrad, GTTI, 1934. (In Russ.)

15. Kolmogorov A.N. *Teoriia informatsii i teoriia algoritmov* [Information theory and theory of algorithms]. Moscow, Nauka, 1987. (In Russ.)

16. Levich A.P. [Entropy as a measure of structured complex systems] Entropiia kak mera strukturirovannosti slozhnykh sistem. *Trudy seminara «Vremia, khaos, maematicheskie problemy»*. Moscow, IMISS MGU, 2000, no. 2, pp. 163-176. (In Russ.)

17. Malinetskii G.G., Potapov A.B., Podlazov A.V. *Nelineinaia dinamika: podkhody, rezul'taty, nadezhdy* [Nonlinear dynamics: approaches, results, hopes]. Moscow, LIBROKOM, 2011. (In Russ.)

18. Mandel'brot B. Teoriia informatsii i psikholingvistika: teoriia chastot slov [Information theory and psycholinguistics: the theory of word frequencies]. *Matematicheskie metody s sotsial'nykh naukakh*. Moscow, Progress, 1973, pp. 316-337. (In Russ.)

19. Martin N., Inglend Dzh. *Matematicheskaia teoriia entropii* [Mathematical theory of entropy]. Moscow, Mir, 1988. (In Russ.)

20. Popkov Iu.S. *Matematicheskaia demoekonomika: makrosistemnyi podkhod* [Mathematical demoeconomics: a macrosystem approach]. Moscow, LENAND, 2013. (In Russ.)

21. Prangishvili I.V. *Entropiinye i drugie sistemnye zakonomernosti: voprosy upravleniia slozhnymi sistemami* [Entropy and other system regularities: the management of complex systems]. Moscow, Nauka, 2003. (In Russ.)

22. Prits A.K. *Printsip statsionarnykh sostoianii otkrytykh sistem i dinamika populiatsii* [The principle of stationary states of open systems and the dynamics of populations]. Kaliningrad, Kaliningradskii gosudarstvennyi universitet, 1974. (In Russ.)

23. Sinai Ia.G. *Vvedenie v ergodicheskuiu teoriiu* [Introduction to ergodic theory]. Moscow, FAZIS, 1996. (In Russ.)

24. Skorobogatov S.M. *Katastrofy i zhivuchest' zhelezobetonnykh sooruzhenii (klassifikatsiia i elementy teorii)* [Catastrophes and survivability of reinforced concrete structures (classification and elements of the theory)]. Ekaterinburg, UrGUPS, 2009. (In Russ.)

25. Stratonovich R.L. *Teoriia informatsii* [Information theory]. Moscow, Sovetskoe radio, 1975. (In Russ.)

26. Tyrsin A.N. *Entropiinoe modelirovanie mnogomernykh stokhasticheskikh system* [Entropy modeling of multidimensional stochastic systems]. Voronezh, Nauchnaia kniga, 2016. (In Russ.)

27. Khazen A.M. *Vvedenie mery informatsii v aksiomaticheskuiu bazu mekhaniki* [The introduction of information measures in the axiomatic basis of mechanics]. Moscow, RAUB, 1998. (In Russ.)

28. Khaken G. *Informatsiia i samoorganizatsiia: makroskopicheskii podkhod k slozhnym sistemam* [Information and self-organization: a macroscopic approach to complex systems]. Moscow, Mir, 1998. (In Russ.)

29. Shredinger E. *Chto takoe zhizn'? S tochki zreniia fizika* [What is life? From the point of view of the physicist]. Moscow, Atomizdat, 1972. (In Russ.)

30. Szekely G.J., Rizzo M.L. A New Test for Multivariate Normality. *Journal of Multivariate Analysis*, 2005, vol. 93, no. 1, pp. 58-80.