

## МОДЕЛЬ СТИМУЛИРОВАНИЯ СБОРА И ПЕРЕРАБОТКИ ПЛАСТИКОВЫХ ОТХОДОВ<sup>1</sup>

**Угольницкий Геннадий Анатольевич**, д-р физ.-мат. наук, проф.  
**Баркалов Владислав Вадимович**, маг.

Южный федеральный университет, ул. Большая Садовая, 105/42, Ростов-на-Дону, Россия, 344006; e-mail: ougoln@mail.ru; f.barkalov@gmail.com

*Цель:* статья посвящена проблеме стимулирования сбора и переработки пластиковых отходов. *Обсуждение:* за основу берется изученная в рамках теории управления организационных систем задача стимулирования, которая рассматривается в трехуровневой системе управления. *Результаты:* найдено аналитическое решение задачи стимулирования сбора и переработки пластиковых отходов для случаев трехуровневой системы управления государство–предприятия–население и нескольких агентов в двухуровневой системе государство–предприятия.

**Ключевые слова:** иерархические игры, модели стимулирования, переработка пластиковых отходов.

**DOI:**

### 1. Введение

Проблема вторичной переработки сырья, в частности, пластиковой тары, весьма актуальна для нашего государства. Сейчас в России перерабатывается лишь малая доля пластика, утратившего потребительские свойства [10]. С каждым годом объем непереработанного пластика растет, при этом власти предпочитают решать эту проблему путем захоронения отходов на специальных полигонах. Переработкой отходов занимаются в основном малые компании, большинство из которых прекращает свою деятельность через один-два года. Данный вид бизнеса нерентабелен ввиду того, что частные компании не могут наладить сбор пластиковых отходов в необходимых объемах. Для осуществления подобной деятельности требуются специальные программы, направленные на повышение экологической ответственности у населения, финансирование которых за счет государства крайне затратно.

В статье представлена иерархическая модель распределения финансовой нагрузки в процессе сбора и переработки пластиковой тары между государством, предприятиями и населением. Данная модель позволяет ра-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект № 17-19-01038.

ционально перераспределить ресурсы государства, направленные на утилизацию отходов, возложив часть обязанностей по сбору и утилизации пластиковых отходов на население и предприятия, выпускающие продукцию в пластиковой таре. Выполнение условий контракта гарантирует всем участникам системы выигрыш больший, чем если бы они не участвовали в программе утилизации пластиковых отходов.

Анализ основан на результатах теории управления организационными системами [6, 7, 8] и теории иерархических игр [2, 3].

## 2. Математическая модель

При моделировании стимулирования вторичной переработки рассмотрим трехуровневую иерархическую систему управления в статической постановке. Предполагается, что субъекты управления иерархически упорядочены. Государство находится на высшем уровне и воздействует на предприятия, а те, в свою очередь, на население. Все субъекты управления стремятся максимизировать свой выигрыш:

$$F_G(S(\cdot), x) = D(x) - S(x) \rightarrow \max_x, \quad (1)$$

$$F_I(Z(\cdot), S(\cdot), x) = S(x) + H(x) - C(x) - Z(x) \rightarrow \max_x, \quad (2)$$

$$F_P(Z(\cdot), x) = Z(x) - M(x) \rightarrow \max_x, x \in [0, 1]. \quad (3)$$

Государство (G) субсидирует вторичную переработку сырья предприятиями, а в случае их отказа от участия в данной программе взимает налог.

$D(x) = \text{ecoprofit}(x)$  – доходы государства, получаемые от улучшения экологической обстановки, за счет своевременной переработки вышедшего из употребления пластика;

$$S(x) = \begin{cases} \text{subsidy}, & \text{при } x = x^* \\ \text{subsidy} - \text{tax}, & \text{иначе} \end{cases} \text{ – механизм управления с обратной связью.}$$

Предприятия (I) осуществляют сбор и вторичную переработку упаковки своих товаров, извлекая выгоду от продажи переработанного сырья и компенсируя часть расходов за счет получения субсидий. Для побуждения населения к сбору и доставке вторсырья используется механизм залоговой стоимости.

$H(x) = \text{pledge}(x) + \text{profit}(x)$  – взимаемая с населения залоговая стоимость и доходы от продажи переработанного сырья.

$C(x) = \text{recycling}(x) + \text{gather}(x)$  – затраты на сбор и переработку сырья.

$$Z(x) = \begin{cases} \text{pledge}(x) \cdot a, & \text{при } x = x^* \\ \text{pledge}(x), & \text{иначе} \end{cases} \text{ – механизм управления.}$$

При сотрудничестве предприятия возвращают населению залоговую стоимость, умноженную на положительный коэффициент  $a > 1$ . В случае отказа возвращается только залоговая стоимость.

Население (P) осуществляет сбор и доставку пластиковой упаковки для последующей переработки, получая за свою деятельность вознаграждение, превышающее уплаченный залог, если сдает пластиковую тару в необходимом предприятиям объеме.

$M(x) = pledge(x) + delivery(x)$  – затраты населения на оплату залоговой стоимости и доставку пластика к специальным аппаратам – фандоматам.

### 3. Регламент моделирования

Для данной модели на обоих уровнях взаимодействия агентов используется регламент игры Гермейера Г2: ведущий, обладая правом первого хода, сообщает ведомому план выбора своей стратегии в зависимости от выбранного ведомым действия  $x_2$  [2, 3]. Стратегия ведущего – условное действие  $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_1(x_2)$ . После этого второй игрок выбирает действие  $x_2$ , максимизируя свою целевую функцию с подставленной туда стратегией первого игрока, затем первый игрок выбирает действие  $\tilde{X}_1(X_2)$ . Центр всегда имеет две стратегии: поощрения и наказания. Выбор стратегий осуществляется при помощи механизма налогообложения в игре государства и предприятий и механизма оплаты усилий в игре предприятий и населения.

### 4. Идентификация параметров модели

Функции затрат всех участников выпуклы, неотрицательны, в нуле равны нулю и не убывают. Функции дохода вогнуты, неотрицательны, в нуле равны нулю и не убывают. Конечный вид функций был получен с применением регрессионного анализа на основе данных, полученных из открытых источников [1, 11]:

$$ecoprofit(x) = -59.06x^2 + 105.57x, \quad (4)$$

$$subsidy(x) = 25.37x^2 + 31.82x, \quad (5)$$

$$tax(x) = 30.4x^2, \quad (6)$$

$$profit(x) = -62.5x^2 + 144.73x, \quad (7)$$

$$recycling(x) = 19.71x^2 + 50.66x, \quad (8)$$

$$gather(x) = 9.8x, \quad (9)$$

$$pledge(x) = 40x, \quad (10)$$

$$delivery(x) = 2.4x^2; a = 2, \quad (11)$$

$x$  – процент перерабатываемого сырья,  $x \in [0,1]$ ; 1% – это примерно 33 тыс. тонн пластика;  $f(x)$  – стоимость обращения с тонной пластика в тыс. руб.

### 5. Аналитическое решение

Чтобы найти оптимальный уровень переработки пластиковых отходов, будем решать задачу на разных уровнях иерархии. Сначала государство решает, сколько пластика должно быть переработано и, применяя стратегии поощрения и наказания, побуждает предприятия выкупить определенное количество пластика у населения для переработки. Затем предприятия, применяя стратегии поощрения и наказания, побуждают население сдать необходимое количество пластика.

На верхнем уровне иерархии в игре Государства (G) и Предприятий (I) ищется оптимальный процент переработки пластика, на переработку которого государство готово выделить субсидии.

$$F_G(S(\cdot), x) = D(x) - S(x) \xrightarrow{x} \max, \quad (12)$$

$$F_I(S(\cdot), x) = (S(x) - (C(x) + Z(x) - H(x))) \xrightarrow{x} \max. \quad (13)$$

Оптимальный уровень переработки сырья будем искать как:

$$x^* \in \operatorname{Argmax} [D(x) - S(x)_{\text{поощрения}}], \text{ тогда } x^* = 0.44. \quad (14)$$

Таким образом, механизм управления на верхнем уровне принимает вид:

$$S(x^*) = \begin{cases} \text{subsidy}, & \text{при } x = x^* \\ \text{subsidy} - \text{tax}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (15)$$

Ведомый вынужден принять предложенные ведущим правила игры, в этом случае выигрыши ведущего (JG) и ведомого (JI) составят:

$$JG = 16.10; \quad (16)$$

$$JI = 27.77. \quad (17)$$

Ведомому невыгодно отклоняться от предложенного ведущим уровня переработки, так как при оптимальном ответе на стратегию наказания он получит меньший выигрыш. При этом ведущий не только не понесет финансовых потерь, но и сможет увеличить свой выигрыш:

$x^* = 0.36$  – оптимальный ответ ведомого на стратегию наказания;

$$JG = 19.29; \quad (18)$$

$$JI = 23.30. \quad (19)$$

Рассчитывая выигрыш ведомого, полагаем, что в игре на нижней ступени иерархии он будет использовать стратегию поощрения для своего ведомого, так как в противном случае предприятия не смогут побудить население сдать необходимый объем пластиковой тары.

Теперь, когда задача на верхнем уровне решена, предприятиям необходимо убедить население сдать ровно столько пластика, сколько требуется для обеспечения оптимального уровня переработки.

$$F_I(Z(\cdot), x) = (S(x) + H(x) - C(x)) - Z(x) \xrightarrow{x} \max, \quad (20)$$

$$F_P(Z(\cdot), x) = Z(x) - M(x) \xrightarrow{x} \max. \quad (21)$$

Предприятия максимизируют свой целевой функционал при  $x^* = 0.44$ , соглашаясь на сотрудничество с государством. В таком случае механизм управления населением будет иметь следующий вид:

$$Z(x^*) = \begin{cases} \text{pledge}(x) \cdot a, & \text{при } x = x^* \\ \text{pledge}(x), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (22)$$

При стратегии поощрения выигрыши предприятий (JI) и населения (JP) составят:

$$JI = 27.77; \quad (23)$$

$$JP = 17.01. \quad (24)$$

При отказе населения от сотрудничества оно потерпит убытки, так как будет вынуждено тратить ресурсы на доставку тары к фандоматам, при этом возвращая лишь залоговую стоимость, уплаченную ранее. В этом случае оптимальным ответом будет нулевое действие, тогда:

$$JP = 0. \quad (25)$$

### 6. Аналитическое решение игры с двумя агентами на верхнем уровне иерархии

$$F_G(S(\cdot), x_i) = D(x_i) - S_i(x_i) \rightarrow \max, i = 1, 2, \quad (26)$$

$$F_{I-1}(S(\cdot), x_1) = S_1(x_1) - (C_1(x_1) + Z(x_1) - H(x_1)) \rightarrow \max, \quad (27)$$

$$F_{I-2}(S(\cdot), x_2) = S_2(x_2) - (C_2(x_2) + Z(x_2) - H(x_2)) \rightarrow \max. \quad (28)$$

Пусть теперь предприятия делятся на два вида: крупные ( $I_{-1}$ ) и малые ( $I_{-2}$ ). Малым предприятиям затруднительно перерабатывать большой объем пластика из-за нехватки свободных площадей и отсутствия специального крупнотоннажного оборудования. Крупным предприятиям, наоборот, невыгодно перерабатывать малые объемы из-за сложной логистики и дорогостоящего оборудования, рассчитанного на большие объемы переработки. При этом государство облегчает налоговое бремя малых предприятий, увеличивая количество субсидий на величину, равную половине налоговой ставки.

$$S_1 = \text{subsidy}(x_1); S_2 = \text{subsidy}(x_2) + \frac{\text{tax}(x_2)}{2}; \quad (29)$$

$$\text{recycling}(x_1) = -25x_1^2 + 40x_1; \text{recycling}(x_2) = 25x_2^2 + 54x_2. \quad (30)$$

Целевая функция центра при использовании системы стимулирования – это сумма его действий минус сумма затрат. Ее можно максимизировать по  $x_1 > 0$  и  $x_2 > 0$  при условии, что сумма компенсируемых затрат не больше, чем фонд субсидирования:

$$\begin{cases} (D(x_1) + D(x_2)) - (S_1(x_1) + S_2(x_2)) \rightarrow \max \\ S_1(x_1) + S_2(x_2) < R \end{cases} \quad (x_1, x_2 > 0). \quad (31)$$

Воспользуемся методом множителей Лагранжа для нахождения оптимального действия [4]. Составим функцию Лагранжа:

$$F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \mu^* \varphi(x_1, x_2), \quad (32)$$

$$\text{где } f(x_1, x_2) = D(x_1) + D(x_2); \varphi(x_1, x_2) = S_1(x_1) + S_2(x_2) - R. \quad (33)$$

Найдем частные производные первого порядка и выразим  $x_2$  через  $x_1$ . Для каждого значения финансового ограничения  $R$  получим по два вещественных значения  $x_1$ , и для каждого  $x_1$  еще по два значения  $x_2$ . Так как в настоящее время на обращение с отходами тратится порядка 50 тыс. руб. на тонну, то  $R$  принимает значения в диапазоне [1, 100] (табл. 1).

Таблица 1

R	1	10	15	20	50	100
$x_1$	< 0	< 0	< 0	< 0	< 0	< 0
$x_2$	0.03	0.24	0.33	0.41	0.79	> 1
$x_2$	< 0	< 0	< 0	< 0	< 0	< 0
$x_1$	0.02	0.16	0.22	0.28	0.55	0.85
$x_2$	0.01	0.12	0.17	0.22	0.48	0.83
$x_2$	< 0	< 0	< 0	< 0	< 0	< 0

Чтобы определить характер экстремума в каждой из найденных на прошлом шаге стационарных точек, составим определитель матрицы Гессе  $H$  и выясним его знак:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & \frac{d\varphi}{dx_1} & \frac{d\varphi}{dx_2} \\ \frac{d\varphi}{dx_1} & \frac{d^2F}{dx_1^2} & \frac{d^2F}{dx_1 dx_2} \\ \frac{d\varphi}{dx_2} & \frac{d^2F}{dx_1 dx_2} & \frac{d^2F}{dx_2^2} \end{vmatrix}. \quad (34)$$

Знак определителя зависит от значения  $\mu$ , которое можно вычислить из частных производных, подставив в них значения  $x_1$  и  $x_2$  из предыдущей таблицы. Таким образом, для различных значений финансирования  $R$  будем иметь условные максимумы в следующих точках:

Таблица 2

R	1	10	15	20	50	100
$x_1$	0.02	0.16	0.22	0.28	0.55	0.85
$x_2$	0.01	0.12	0.17	0.22	0.48	0.83
$\mu$	-3.14	-2.17	-1.85	-0.25	-0.67	-0.07
Det(H)	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0

## 7. Заключение

При решении задачи поиска оптимального уровня вторичной переработки пластиковой тары выявлено, что распределение финансовой нагрузки позволяет значительно увеличить объем переработки, а налоговые льготы являются действенным механизмом управления. При увеличении объемов субсидирования значительно увеличивается объем перерабатываемого пластика, что позволяет участникам системы достигать больших выигрышей. В дальнейшем предполагается рассмотреть динамические постановки задачи [9], в том числе с использованием имитационного моделирования [5, 12].

## Список источников

1. Бизнес по переработке пластика и мусора: бизнес-план. Доступно: <https://goo.gl/Xtp27o> (дата обращения: 04.01.18).
2. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. Москва, Радио и связь, 1991.
3. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах*. Москва, Радио и связь, 1982.
4. Интрилигатор М. *Математические методы оптимизации и экономическая теория*. Москва, Айрис-пресс, 2002.
5. Картушин Д.Ю., Максименкова А.Р., Угольницкий Г.А. Оптимизация количества заявок при заданном бюджете инвестиций // *Современная экономика: проблемы и решения*, 2016, по. 78 (6), с. 20-33.
6. Новиков Д.А. *Стимулирование в организационных системах*. Москва, СИНТЕГ, 2003.
7. Новиков Д.А., Цветков А.В. *Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах*. Москва, Апостроф, 2000.

8. Новиков Д.А. *Теория управления организационными системами*. Москва, Физматлит, 2007.
9. Рохлин Д.Б., Угольницкий Г.А. Равновесие Штакельберга в динамической модели стимулирования с полной информацией // *Автоматика и телемеханика*, 2018, по. 4, с. 152-166.
10. Семиошина В. *Когда придет конец пластиковой упаковке*. Доступно: <https://goo.gl/bndExX> (дата обращения: 14.01.18).
11. Статистический сборник. Охрана окружающей среды в России. Доступно: <https://goo.gl/w7E3eD> (дата обращения: 04.01.18).
12. Угольницкий Г.А., Якушева В.В. Оптимизация количества заявок при заданном бюджете инноваций // *Современная экономика: проблемы и решения*, 2017, по. 4, с. 19-23.

---

# INCENTIVE MODEL OF GATHERING AND RECYCLING OF THE PLASTIC WASTE

---

**Ougolnitsky Guennady Anatolievich**, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Prof.  
**Barkalov Vladislav Vadimovich**, M.S. student

Southern Federal University, Bolshaya Sadovaya st., 105/42, Rostov-on-Don, Russia, 344006; e-mail: ougoln@mail.ru; f.barkalov@gmail.com

*Purpose:* the paper is dedicated to the problem of incentives for gathering and recycling of the plastic waste. *Discussion:* the authors consider the incentive problem from the theory of control in organizational system which is presented in a three-level control system. *Results:* the authors found an explicit solution of the problem for the cases of a three-level control system federal state – enterprises – population and for several agents in a two-level system federal state – enterprises.

**Keywords:** hierarchical games, incentive models, plastic waste recycling.

## References

1. Biznes po pererabotke plastika i musora: biznes-plan [Plastic and garbage recycling business plan]. Available at: <https://goo.gl/Xtp27o> (accessed: 04.01.18).
2. Gorelik V.A., Gorelov M.A., Kononenko A.F. *Analiz konfliktnykh situatsii v sistemakh upravleniia* [Analysis of conflict situations in management systems]. Moscow, Radio i sviaz', 1991. (In Russ.)
3. Gorelik V.A., Kononenko A.F. *Teoretiko-igrovye modeli priniatiia reshenii v ekologo-ekonomicheskikh sistemakh* [Game-theoretic model of decision-making in ecological and economic systems]. Moscow, Radio i sviaz', 1982. (In Russ.)
4. Intriligator M. *Matematicheskie metody optimizatsii i ekonomicheskaiia teoriiia*. [Mathematic methods of optimization and economic theory]. Moscow, Airis-press, 2002. (In Russ.)
5. Kartushin D.Iu., Maksimenkova A.R., Ugol'nitskii G.A. Optimizatsiia kolichestva zaiavok pri zadannom biudzhete investitsii [Optimization of the quantity of applications with a given budget of innovations]. *Sovremennaia ekonomika: problemy i resheniia*, 2016, no. 78 (6), pp. 20-33. (In Russ.)
6. Novikov D.A. *Stimulirovanie v organizatsionnykh sistemakh* [Stimulation in organizational systems]. Moscow, SINTEG, 2003. (In Russ.)
7. Novikov D.A. Tsvetkov A.V. *Mekhanizmy stimulirovaniia v mnogoelementnykh organizatsionnykh sistemakh* [Mechanism of stimulation in multielement organizational systems]. Moscow, Apostrof, 2000. (In Russ.)
8. Novikov D.A. *Teoriia upravleniia organizatsionnymi sistemami* [Organizational system management theory]. Moscow, Fizmatlit, 2007. (In Russ.)
9. Rokhlin D.B., Ugol'nitskii G.A. Ravnovesie Shtakel'berga v dinamicheskoi modeli stimulirovaniia s polnoi informatsiei [Stackelberg equilibrium in a dynamic incentive model with full information]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2018, no. 4, pp. 152-166. (In Russ.)
10. Semioshina V. *Kogda pridet konets plastikovoi upakovke* [When there will be the end of plastic package]. Available at: <https://goo.gl/bndExX> (accessed: 14.01.18).
11. Statisticheskii sbornik. Okhrana okruzhaiushchei sredy v Rossii [Statistics digest. Environmental protection in Russia]. Available at: <https://goo.gl/w7E3eD> (accessed: 04.01.18).



12. Ugol'nitskii G.A., Iakusheva V.V. Optimizatsiia kolichestva zaiavok pri zadannom biudzhete innovatsii [Optimization of the quantity applications with a given budget of innovations]. *Sovremennaia ekonomika: problemy i resheniia*, 2017, no. 4, pp. 19-23. (In Russ.)