УДК 656.025:519.17

ОПТИМИЗАЦИЯ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ЗАТРАТ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ МАРШРУТОВ В КРУПНОМАСШТАБНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ[1]

Павлов Дмитрий Алексеевич, канд. физ.-мат. наук, доц.
Лойко Валерий Иванович, д-р техн. наук, проф.
Ковалева Ксения Александровна, канд. экон. наук, доц.

Кубанский государственный аграрный университет им. И.Т. Трубилина, ул. Калинина, 13, Краснодар, Россия, 350044; e-mail: dp.logic@gmail.com

Цель: разработать эффективный алгоритм для задачи планирования маршрутов в крупномасштабной транспортной сети, оптимизирующий эксплуатационные затраты. *Обсуждение*: в качестве сетевой модели крупномасштабной транспортной сети используются предфрактальные графы. Строится математическая модель в теоретико-графовой постановке исследуемой задачи с учетом многокритериального подхода. Математическая модель сводится к задаче о покрытии предфрактального графа простыми пересекающимися цепями. Строится и обосновывается алгоритм, оптимизирующий пассажирские и административные затраты при эксплуатации транспортной системы, называемые эксплуатационными затратами. *Результаты*: представленный алгоритм имеет в разы меньшую вычислительную сложность по сравнению с классическим подходом при решении этой задачи с использованием графов. Обосновывается оптимальность найденного решения по выбранному критерию и даются оценки по остальным критериям.

Ключевые слова: крупномасштабная транспортная сеть, предфрактальные и фрактальные графы, многокритериальная дискретная оптимизация, покрытие графа.

DOI:

1. Введение

Важной и значимой на практике является задача организации сети пассажирского или грузового транспорта в крупномасштабной транспортной сети. Одной из существенных особенностей подобных задач является необходимость планирования маршрутов с учетом разных критериев [1], которые порой противоречат друг другу. К примеру, найденная система

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта 17-06-00282 А.

транспортных маршрутов дает оптимальные показатели с учетом затрат на транспортировку пассажиров (груза), но эта система плохо соотносится с общественными требованиями, предъявляемыми к маршрутам [11]. В этом случае приходится строить решения с учетом многокритериальной формулировки проблемы. Стоит отметить и важный момент, связанный с вычислительной сложностью [4] проблемы нахождения системы маршрутов в крупномасштабной сети. Так как большинство задач планирования транспортных маршрутов сводится к задачам дискретной комбинаторной оптимизации [2, 10], то с ростом транспортной сети они становятся трудоемкими в плане вычислительной сложности.

Статья является продолжением исследования многокритериальной задачи выделения маршрутов в крупномасштабной сети и опирается на работы [7, 8]. В этих работах проводится аналогия устройства связей крупномасштабной модели карты дорог с сетевой моделью на предфрактальных графах, порожденных множеством затравок [5, 6]. В котором вершинам соответствуют, к примеру, промышленные объекты, станции, а ребрам – соединяющие их дороги. Предфрактальные графы позволяют естественным образом смоделировать принцип «территориальной иерархии» карты дорог, согласно которому на первом этапе рассматриваются дороги федерального значения. На втором этапе внутри определенного федерального округа рассматриваются дороги, соединяющие края, области или республики. На третьем этапе рассматриваются дороги, соединяющие районы внутри содержащих их более крупных территориальных зон: краев, областей, республик и т.д. Продолжая по аналогии просматривать карту дорог, в порядке увеличения масштаба, на последнем этапе рассматриваются дороги внутри определенных населенных пунктов. Принцип соответствует последовательному процессу рассмотрения ребер соответствующего ранга в предфрактальном графе, порожденным определенным множеством затравок [7].

2. Теоретико-графовая модель

Пусть задан взвешенный предфрактальной граф [7] $G_L = (V_L, E_L)$, в котором вес ребра применительно к исследуемой задачи означает стоимость перевозки груза между соответствующими узлами.

Под множеством допустимых решений X будем понимать совокупность всевозможных выделенных на G_L пересекающихся простых цепей $X = \{x\}$, где $x = (V_L, E_x)$, $E_x \subseteq E_L$, представляет собой один из возможных вариантов покрытия. Выделенные простые цепи, составляющие покрытие – транспортные маршруты исходной задачи.

На $X = \{x\}$ зададим векторно-целевую функцию:

$$\mathrm{F}(X) = \{F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x), F_4(x), F_5(x)),\ x \in X\} \tag{1}$$

$$F_1(x) = \sum_{e \in E_x} w(e) \to \min, \tag{2}$$

где $\sum_{e \in E_x} w(e)$ – суммарный вес x;

$$F_2(x) = \min_{k=1,K} w(C_k) \to \max, \quad (3)$$

где $w(C_k)$ – длина максимальной цепи в покрытии *x*, $x \in \{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_K\}$, $k = \overline{1, K}$.

$$F_3(x) = N(x) \to \min, \quad (4)$$

где $N(x)$ – количество максимальных цепей, входящих в *x*;

$$F_4(x) = i \to \min, \quad (5)$$

для любой цепи C^i из *x*, содержащей *i*-ребер различных рангов.

$$F_5(x) = \left|\rho_x(u,v) - \rho_{G_L}(u,v)\right| \to \min, \quad (6)$$

где $\rho_x(u,v)$ – расстояние в *x*, а $\rho_{G_L}(u,v)$ – расстояние в G_L между любой парой вершин $u, v \in V_L$.

Построенные критерии (2)-(6) векторно-целевой функции (1) применительно к задаче об организации маршрутов в транспортной сети несут в себе важный экономический смысл. В работе оптимальное решение строится по критерию (2), минимизируемому затраты пассажиров и администрации транспортной системы при ее эксплуатации.

Нахождение множества альтернатив является общей проблемой дискретных многокритериальных задач [9]. В работе акцент делается на нахождение хотя бы одного оптимального решения из множества альтернатив с оценкой по остальным критериям.

3. Алгоритм построения остовного дерева минимального веса на предфрактальных графах

В результате применения алгоритма β_1 на взвешенном предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$ с затравкой $H = (W, Q)$, где $|W| = n$, выделяется остовное дерево $T = (V_L, E_T)$ минимального веса (ОДМВ) [10].

Вкратце опишем основную идею алгоритма, который в качестве процедуры использует алгоритм Прима [10], обрабатывающий множество $Z(G_L)$ всех подграф-затравкок $z_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$, предфрактального графа G_L. Общее число выполнения процедуры Прима соответствует количеству $\dfrac{n^L - 1}{n - 1}$ подграф-затравок G_L. В результате на каждой подграф-затравке G_L строится ОДМВ $T_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{T_s^{(l)}})$.

Для эффективной работы алгоритма необходима уникальная нумерация каждого ребра G_L, позволяющая идентифицировать его принадлежность к определенной подграф-затравке $z_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$.

АЛГОРИТМ β_1

Вход: взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$.

Выход: $T = (V_L, E_T)$ ОДМВ.

Шаг 1. Уникально пронумеровать все ребра G_L и выделить множество подграф-затравок $Z(G_L) = \{z_s^{(l)}\}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$.

Шаг 2. Выполнить процедуру Прима на каждой подграф-затравке $z_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ из $Z(G_L)$.

Шаг 3. После выполнения шага 2, выделяется $\frac{n^L-1}{n-1}$ ОДМВ $T_s^{(l)}=(V_s^{(l)}, E_{T_s^{(l)}})$, $l=\overline{1,L}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$, образующих ОДМВ $T=(V_L, E_T)$ на предфрактальном графе G_L.

Теорема 1. Алгоритм β_1 выделяет ОДМВ $T=(V_L, E_T)$ на предфрактальном *(n, L)*-графе $G_L=(V_L, E_L)$ с затравкой $H=(W, Q)$, где $|W|=n$, $|V_L|=N=n^L$, с вычислительной сложностью, не превышающей $O(Nn^2)$.

Доказательство. При выполнении алгоритма β_1, $\frac{n^L-1}{n-1}$ – раз выполняется процедура алгоритма Прима для каждой затравки заданного предфрактального графа G_L, реализованная в виде многократного повторения шага 2. Вычислительная сложность алгоритма Прима равна $O(n^2)$. Для алгоритма β_1 получаем:

$$O(\frac{n^L-1}{n-1}\cdot n^2)=O(n^L\cdot n^2)=O(Nn^2).$$

Примечание 1. Вычислительная сложность алгоритма Прима в n^{L-2} раз превосходит вычислительную сложностью алгоритма β_1 на предфрактальном графе G_L или $O(N^2)<O(Nn^2)$, где $N=|V_L|=n^L$.

Теорема 2. Алгоритм β_1 на предфрактальном *(n, L)*-графе $G_L=(V_L, E_L)$, с затравкой $H=(W, Q)$,где $|W|=n$, $|V_L|=N=n^L$,, выделяет ОДМВ $T=(V_L, E_T)$.

Доказательство. Работа алгоритма β_1 на взвешенном предфрактальном графе G_L выделяет последовательную совокупность остовных деревьев минимального веса $\{T_s^{(l)}=(V_s^{(l)}, E_{T_s^{(l)}})\}$, $l=\overline{1,L}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$. Требуется доказать, что построенная совокупность $\{T_s^{(l)}\}$ в объединении образует остовное дерево минимального веса $T=(V_L, E_T)$ на графе G_L.

При выделении остовных деревьев $T_s^{(L)}$, $s=\overline{1,n^{L-1}}$ на множестве подграф-затравкок $z_s^{(L)}$ заданного взвешенного предфрактального графа G_L формируется остовный лес. Построенный из n^{L-1} несвязанных друг с другом подграфов остовный лес образует остовное дерево на блоках $\{B_L^{(1)}\}$.

Аналогично, работая с подграф-затравками $z_s^{(L-1)}$, на каждой из которых выделяется $T_s^{(L-1)}$, $s=\overline{1,n^{L-2}}$ остовные деревья минимального веса, в объединении с ранее выделенными ребрами графа G_L, образуют остовный лес. Построенный остовный лес состоит из n^{L-2} несвязных подграфов, который в объединении с ранее построенным выделением остовных деревьев на блоках $\{B_L^{(1)}\}$будет образовывать остовное дерево блоков $\{B_L^{(2)}\}$.

Последовательно выполняя процесс выделения ОДМВ, перейдем к подграф-затравкам $z_s^{(2)}$ блока $\{B_L^{(L-1)}\}$, состоящим из *n* компонент связности. В результате выделения ОДМВ образующих на G_L остовный лес.

Последний этап выделяет ОДМВ на подграф-затравке $z_1^{(1)}$, которая связывает *n* остовный лес, выделенный на предыдущих этапах. В результате образуется остовное дерево $T=(V_L, E_T)$ на графе G_L образующее одну компоненту.

По правилу взвешивания предфрактального графа G_L, $w(e^{(l)})<w(e^{(l-1)})$,

$l=\overline{2,L}$ [5]. В связи с этим для построения остовного дерева минимального веса предфрактального графа G_L требуется найти остовные деревья на подграф-затравках $z_s^{(L)}$, а это выполняет алгоритм β_1.

В итоге, выделяя ОДМВ на каждой из подграф-затравок $T_s^{(l)}=(V_s^{(l)},E_{T_s^{(l)}})$, $l=\overline{1,L}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$, алгоритмом β_1 строит подграф $T=(V_L,E_T)$ являющийся ОДМВ на всем предфрактальном графе G_L.

Рассмотрим постановку задачи с изучаемыми критериями (1)–(6). Среди всех остовных подграфов, выделяемых на взвешенном предфрактальном графе, остовное дерево минимального веса $T=(V_L,E_T)$, построенное алгоритмом β_1, является допустимым решением $x_1=T=(V_L,E_T)\in X$ и минимизирует критерий (2).

Рассмотрим оценки полученного решения x_1, выделяемого алгоритмом β_1 по остальным критериям (3)-(6). Разумно предположить, что полученные оценки по этим критериям не будут давать оптимальные результаты.

Проведем оценку покрытия x_1 по критерию (6). Значение верхней оценки для функции $F_5(x_1)$ построим с использованием самой большой цепи $\max\limits_{\{x_1\}}\max\limits_{u,v\in x_1}\rho_{x_1}(u,v)$ из покрытия $\{x_1\}$. Наибольшей цепью на графе $G=(V,E)$ является гамильтонова цепь [3], которая является остовным деревом, т.к. содержит все вершины графа. На предфрактальном графе G_L с затравкой $H=(W,Q)$, где $n=|W|$, в случае существования гамильтоновой цепи, последняя будет содержать n^L-1 ребер. В результате в качестве верхней границы оценки покрытия предфрактального графа будет выступать длина гамильтоновой цепи, содержащая количество ребер, равное $\max\limits_{\{x_1\}}\max\limits_{u,v\in x_1}\rho_{x_1}(u,v)-1=n^L-2$, оцениваемая по топологическому критерию (6) векторно-целевой функции (1)–(6).

Примечание 2. Построенная выше верхняя оценка по критерию (3) для решения x_1, представляющая собой гамильтонову цепь, выполняется только на предфрактальном графе, являющемся гамильтоновым [3].

Предфрактальный граф называется гамильтоновым, если он содержит гамильтонов цикл и соответствует двум условиям:

1) затравка, порождающая предфрактальный граф, является гамильтоновой связной [3];

2) предфрактальный граф не должен пересекаться в старых ребрах [5].

Рассмотрим случай, когда предфрактальный граф G_L строится с помощью затравки H, представляющей собой дерево. Тогда полученный предфрактальный граф есть дерево. В дереве расстояние между двумя вершинами представляет собой единственный кратчайший маршрут. Таким образом, алгоритм β_1 на предфрактальном графе G_L, порожденном затравкой деревом, строит покрытие x_1, совпадающее с G_L, т. е. $x_1=(E_L,V_L)$. В этом случае, оценивая покрытие x_1 по топологическому критерию (6) исходной векторно-целевой функции (1)-(6), получаем оценку, равную нулю, которая будет являться нижней границей оценки.

Выше был представлен способ построения верхней границы оценки критерия $F_5(x)$ для решения x_1, выделяемого алгоритмом β_1 на предфрактальном графе G_L. Для этого на G_L необходимо выделить гамильтонову цепь, которая существует в графе, в случае удовлетворения двух условий. Так как любая гамильтонова цепь есть дерево $x_1 = T = (V_L, E_T)$, следовательно, в нем между двумя висячими вершинами существует единственная простая цепь, которая будет являться максимальной. Данное утверждение позволяет дать нижнюю оценку по критерию (4) для решения x_1, совпадающего с гамильтоновой цепью, т.е. $N(x_1) \geq 1$.

Лемма 1. Выделенное алгоритмом β_1 на предфрактальном *(n, L)*-графе $G_L = (V_L, E_L)$ решение $x_1 = T = (V_L, E_T)$,, совпадающее с гамильтоной цепью, является оптимальным по критериям $F_1(x)$, $F_3(x)$: $F_1^0(x_1) = \min\limits_{x \in X} F_1(x)$, $F_3^0(x_1) = \min\limits_{x \in X} F_3(x)$.

Пусть m – количество висячих вершин в дереве D. Количество максимальных цепей *N(D)* вычисляется по формуле $N(D) = C_m^2 = \dfrac{m(m-1)}{2}$.

Наибольшее количество висячих вершин из всего множества деревьев принадлежит звезде $K_{1,n}$, которое определяется по формуле $N(K_{1,n}) = C_{n-1}^2 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$. Если рассматривать множество предфрактальных графов, то среди них с наибольшим числом висячих вершин будут порожденные затравкой-звездой $H = K_{1,n}$, у которых n – количество вершин. В результате, можно оценить число максимальных цепей $N(x_1)$ в покрытии $x_1 = T = (V_L, E_T)$ для $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного звездой $H = K_{1,n}$, с помощью неравенства $N(x_1) \leq n^{L-1}(n-1)$. Причем $N(x_1) = n^{L-1}(n-1)$ выполняется на $G_L = (V_L, E_L)$ со звездой-затравкой $H = K_{1,n}$ и пересечением старых ребер. Верхняя оценка по критерию $F_3(x)$ зависит от количества подграф-затравок и числа висячих ребер в G_L. В результате получаем неравенство $N(x_1) \leq n^{L-1}(n-1)$..

Сделанные выше вычисления оценок резюмируем в теореме 3. В теореме для алгоритма β_1 с построенным решением x_1 приводятся оценки для неоптимальных критериев векторной целевой функции (2)-(6).

Теорема 3. Алгоритм β_1 выделяет покрытие $x_1 = T = (V_L, E_T)$ на предфрактальном (n, L)-графе $G_L = (V_L, E_L)$, порожденном n-вершинной затравкой $H = (W, Q)$, оптимальное по первому критерию $F_1^0(x_1) = \min\limits_{x \in X} F_1(x)$, и оцениваемое по двум следующим, $F_3(x_1) \in [1; n^{L-1}(n-1)]$, и $F_5(x_1) \in [0; n^L - 2]$.

4. Заключение

В работе построен алгоритм нахождения дерева минимального веса на предфрактальном графе для многокритериальной задачи о покрытии предфрактального графа простыми пересекающимися цепями, которая является математической моделью задачи организации транспортных маршрутов в крупномасштабных транспортных сетях. Построенный алгоритм для исследуемой задачи в многокритериальной постановке является алгоритмом с оценками [9], оптимизирующий найденное решение по весовому критерию (2) и оцениваемый по остальным критериям.

Список источников

1. Bell M.G.H., Yasunori Iida. *Transportation network analysis*. Wiley, 1997.
2. Handbook of Optimization in Complex Networks. Theory and Applications / M.T. Thai, P.M. Pardalos (eds.) // *Springer*, 2012.
3. Емеличев В.А. *Лекции по теории графов*: учеб. пособие. Москва, Наука, 1990.
4. Емеличев В.А., Перепелица В.А. Сложность дискретных многокритериальных задач // *Дискретная математика*, 1994, вып. 1, с. 3-33.
5. Кочкаров А.М. *Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход*. Нижний Архыз, Изд. центр «CYGNUS», 1998.
6. Кочкаров Р.А. *Многозвешенные предфрактальные графы с недетерминированными весами. Приложение в экономике, строфизике и сетевых коммуникациях*. Москва, ЛЕНАНД, 2017.
7. Павлов Д.А. Моделирование крупномасштабной транспортной сети предфрактальными графами // *Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета*. Краснодар, КубГАУ, 2017, no. 131(131), с. 1035-1045.
8. Павлов Д.А., Яхонтова И.М. Математическая модель задачи организации маршрутов в крупномасштабных транспортных сетях с применением методов многокритериальной оптимизации // *Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета*. Краснодар, КубГАУ, 2017, no. 133(133), с. 1220-1230.
9. Перепелица В.А. Многокритериальные модели и методы для задач оптимизации на графах // *LAP LAMBERT Academic Publication*, 2013.
10. Э. Майника. *Алгоритмы оптимизации на сетях и графах.* Москва, Мир, 1981.
11. Экономика пассажирского транспорта: учеб. пособие / Под общей ред. проф. В.А. Персианова. Москва, КНОРУС, 2012.

OPTIMIZATION OF OPERATING COSTS AT THE PLANNING OF ROUTES IN LARGE-SCALE TRANSPORT NETWORKS

Pavlov Dmitry Alekseevich, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.
Loyko Valery Ivanovich, Dr. Sc. (Tehn.), Full Prof.
Kovalyova Ksenia Aleksandrovna, Cand. Sc. (Econ.), Assoc. Prof.

Kuban State Agrarian University. I.T. Trubilina, Kalinina, 13, Krasnodar, Russia, 350044; e-mail: dp.logic@gmail.com

Purpose: the authors develop an effective algorithm for the route planning task in a large-scale transport network, which optimizes operating costs. *Discussion*: the authors use the prefractal graphs as a network model of a large-scale transport network in this work. The authors constructed a mathematical model in the graph-theoretic formulation of the problem under study, taking into account the multicriteria approach. The mathematical model reduces to the problem of covering the prefractal graph by simple intersecting chains. The authors constructed and justified an algorithm that optimizes passenger and administrative costs in the operation of the transport system, called operational costs. *Results*: the presented algorithm has several times less computational complexity in comparison with the classical approach when solving this problem using graphs. The authors justified the optimality of the found solution based on the selected criterion and gave the estimates for the remaining criteria.

Keywords: large-scale transport network, prefractal and fractal graphs, multi-criteria discrete optimization, covering of a graph.

References

1. Bell M.G.H., Yasunori Iida. Transportation network analysis. Wiley, 1997.
2. Handbook of Optimization in Complex Networks. Theory and Applications / M.T. Thai, P.M. Pardalos (eds.) *Springer*, 2012.
3. Emelichev V.A. *Lektsii po teorii grafov* [Lectures on graph theory] ucheb. posobie. Moscow, Nauka, 1990. (In Russ.)
4. Emelichev V.A., Perepelitsa V.A. Slozhnosty diskretnykh mnogokriterialynykh zadach [Complexity of discrete multicriteria problems]. *Diskretnaya matematika,* 1994, vyp. 1, pp. 3-33. (In Russ.)
5. Kochkarov A.M. *Raspoznavanie fraktalynykh grafov. Algoritmicheskij podkhod* [Fractal graph recognition. Algorithmic approach]. Nizhnij Arkhyz, Izd. tsentr «CYGNUS», 1998. (In Russ.)
6. Kochkarov R.A. *Mnogozveshennye predfraktal'nye grafy s nedeterminirovannymi vesami. Prilozhenie v ehkonomike, strofizike i setevykh kommunikatsiyakh* [A lot of pre-fractal graphs weighted graphs with non-deterministic weights. Application in Economics, astrophysics and network communications]. Moscow, LENAND, 2017. (In Russ.)
7. Pavlov D.A. Modelirovanie krupnomasshtabnoj transportnoj seti predfraktalynymi grafami [Modeling large-scale transportation network pre-fractal graphs graphs]. *Politematicheskij setevoj ehlektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta*. Krasnodar, KubGAU, 2017, no. 131(131), pp. 1035-1045. (In Russ.)

8. Pavlov D.A., Yahontova I.M. Matematicheskaya modely zadachi organizatsii marshrutov v krupnomasshtabnykh transportnykh setyakh s primeneniem metodov mnogokriterialynoj optimizatsii [Mathematical model of the organization problem for routes in large-scale transport networks using multi-criteria optimization methods]. *Politematicheskij setevoj ehlektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta*. Krasnodar, KubGAU, 2017, no. 133(133), pp. 1220-1230. (In Russ.)

9. Perepelitsa V.A. Mnogokriterialynye modeli i metody dlya zadach optimizatsii na grafakh [Multicriteria models and methods for optimization problems on graphs]. *LAP LAMBERT Academic Publication*, 2013. (In Russ.)

10. E. Majnika. *Algoritmy optimizatsii na setyakh i grafakh* [Optimization algorithms on networks and graphs]. Moscow, Mir, 1981. (In Russ.)

11. Ekonomika passazhirskogo transporta: ucheb, posobie [Economy of passenger transport] / Pod obtsched red. prof. V.A. Persianova. Moscow, KNORUS, 2012. (In Russ.)