УДК 656.025:519.17

МЕТОДИКА ОРГАНИЗАЦИИ И ПЛАНИРОВАНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ КРАТЧАЙШИХ МАРШРУТОВ В КРУПНОМАСШТАБНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ С УЧЕТОМ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ПОДХОДА[1]

Павлов Дмитрий Алексеевич, канд. физ.-мат. наук, доц.
Лойко Валерий Иванович, д-р техн. наук, проф.

Кубанский государственный аграрный университет им. И.Т. Трубилина, ул. Калинина, 13, Краснодар, Россия, 350044; e-mail: dp.logic@gmail.com

Цель: разработать эффективный алгоритм выделения максимальных кратчайших маршрутов для задачи организации и планирования перевозок в крупномасштабной транспортной сети. *Обсуждение*: исследуются методы решения задачи, связанной с оптимизацией пассажирских и грузовых перевозок в транспортно-логистических системах. При решении подобных задач, как правило, приходится учитывать различные требования, предъявляемые к системе, которые часто противоречат друг другу, что приводит к проблеме выбора в условиях многокритериальности. В работе предлагается математическая модель исследуемой задачи в многокритериальной постановке. В качестве сетевой модели транспортной сети предлагается использовать предфрактальные графы, имеющие ряд преимуществ перед классическими» графами. На предфрактальных графах задаются условия, позволяющие выделить допустимое множество решений, на котором строится векторно-целевая функция с заданными критериями, по которым оптимизируется задача. Поиск решения изучаемой задачи осуществляется с помощью специально построенных алгоритмов. Приводится и обосновывается алгоритм решения исследуемой задачи, позволяющий оптимизировать критерий, направленный на выделение маршрутов, охватывающих как можно большее количество транспортных узлов на своем пути или выделить максимальные (по включению) кратчайшие маршруты. Даются оценки приведенного решения по остальным критериям. Качество работы алгоритма оценивается его вычислительной сложностью. Сравниваются оценки приведенно-

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта 17-06-00282 А

го алгоритма на «классических» графах и предфрактальных графах. *Результаты*: для задачи организации и планирования транспортных грузоперевозок построен эффективный алгоритм, позволяющий находить максимальные по включению маршруты в крупномасштабных транспортных сетях.

Ключевые слова: крупномасштабная транспортная сеть, предфрактальные и фрактальные графы, многокритериальная дискретная оптимизация, покрытие графа.

DOI:

1. Введение

При решении задач, связанных с оптимизацией пассажирских или грузовых перевозок в транспортно-логистических системах, в большинстве случаев следует учитывать условия, позволяющие одновременно оптимизировать задачу по нескольким критериям [1, 10]. Как правило, оптимальное управление транспортом в этих задачах еще и усложняется, когда транспортная сеть рассматривается в крупных масштабах (страны, региона) [2]. В работах [6, 7] рассматривалась математическая модель задачи планирования и организации транспортных маршрутов в крупномасштабной транспортной сети в многокритериальной постановке. В качестве сетевой модели транспортной сети использовались предфрактальные графы [4, 5], преимущество использования которых заключается в сокращении вычислительной сложности работы алгоритмов на последних [6]. Математическая постановка этой задачи сводится к нахождению покрытия предфрактального графа простыми пересекающимися цепями в многокритериальной постановке [7].

На взвешенном предфрактальном графе $G_L=(V_L,E_L)$, где каждому ребру $e^{(l)}\in E_L$ соответствует число $w(e^{(l)})\in(\theta^{l-1}a,\theta^{l-1}b)$, называемое весом, $l=\overline{1,L}$ – ранг ребра, $a>0$, и $\theta<\frac{a}{b}$, выделяется решение (покрытие), содержащее все узлы исходной транспортной сети $x=(V_L,E_x)$, $E_x\subseteq E_L$. Множество всех допустимых решений (МДР) обозначим $X=\{x\}$.

На $X=\{x\}$ зададим векторно-целевую функцию (ВЦФ):

$$\mathrm{F}(X)=\{F(x)=(F_1(x),F_2(x),F_3(x),F_4(x),F_5(x)),x\in X\} \quad (1)$$

$$F_1(x)=\sum_{e\in E_x} w(e)\to\min, \quad (2)$$

$$F_2(x)=\min_{k=\overline{1,K}} w(C_k)\to\max, \quad (3)$$

где $w(C_k)$ – длина максимальной цепи в *x*, $x\in\{C_1,C_2,\dots,C_k,\dots,C_K\}$, $k=\overline{1,K}$

$$F_3(x)=N(x)\to\min, \quad (4)$$

где $N(x)$ – число максимальных цепей в *x*;

$$F_4(x)=i\to\min, \quad (5)$$

где *i* - число ребер цепи C^i, входящих в различные ранги *x*;

$$F_5(x)=\left|\rho_x(u,v)-\rho_{G_L}(u,v)\right|\to\min, \quad (6)$$

где $\rho_x(u,v)$ – расстояние в *x*, а $\rho_{G_L}(u,v)$ – расстояние в G_L между любой парой вершин $u,v \in V_L$.

Каждый из приведенных критериев (2)-(4) в приложении к транспортным системам имеет содержательную интерпретацию [6] и оптимизирует соответствующее требование, накладываемое на систему.

Для решения данной задачи в работе предлагается алгоритм с оценками оптимизирующий критерий (3) и оцениваемый по остальным критериям. Критерий (3) отвечает за выделение в транспортной сети кратчайших маршрутов, охватывающих как можно больше транспортных узлов, что позволяет увеличить пассажирооборот.

2. Алгоритм выделения наибольших максимальных цепей

Алгоритм β_2 выделяет на предфрактальном графе G_L покрытие $x_2 = J = (V_L, E_J) = \{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_K\} \in X$, где все цепи $C_k = \{v_k, u_k\}$ – простые, $k = \overline{1,K}$.

Цепь называется максимальной, если она полностью не содержится в другой цепи.

Алгоритм β_2 использует в качестве процедуры алгоритм выделения наибольших максимальных цепей (ВНМЦ) на всех подграф-затравках [4] $Z(G_L) \in z_s^{(l)}, l = \overline{1,L}$, $s = \overline{1,n^{l-1}}$ предфрактального графа G_L. В результате выделяется подграф $J_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{J_s^{(l)}}) = \{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_{K_{J_s^{(l)}}}\}$, состоящий из максимальных цепей $C_k = \{u,v\}$, $k = \overline{1,K_J}$ между $u,v \in V_s^{(l)}$ подграф-затравки $z_s^{(l)}$. Множество всех $\{J_s^{(l)}\}, l = \overline{1,L}$, $s = \overline{1,n^{l-1}}$ составляет решение $x_2 = J = (V_L, E_J)$.

АЛГОРИТМ ВНМЦ

Вход: $G = (V, E)$.

Выход: $J = (V, E_J) = \{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_{K_J}\}$.

Шаг 1. Построить множество кратчайших цепей $\{C'_{i_1}, C'_{i_2}, \dots, C'_{i_k}, \dots, C'_{i_{K'}}\}$, соединяющих любые две вершины $u,v \in V$ графа G.

Исключить из $\{C'_{i_1}, C'_{i_2}, \dots, C'_{i_k}, \dots, C'_{i_{K'}}\}$ цепи, полностью входящие в состав других цепей. Полученное множество обозначить $\{C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}, \dots, C_{i_{K^*}}\}$, упорядочив его в порядке невозрастания длины цепей, задав индексы, так чтобы длина i_k-ой цепи была меньше длины i_{k+1}-ой цепи, $k = \overline{1,K^*}$. Полученное множество $\{C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}, \dots, C_{i_{K^*}}\}$ будет состоять из максимальных цепей графа G.

Шаг 2. В порядке вхождения максимальных цепей в множество $\{C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}, \dots, C_{i_{K^*}}\}$ выделять на графе G вершины и ребра, входящие в соответствующую цепь C_{i_k}. Использовать только те цепи C_{i_k}, которые выделяют хотя бы одну еще не выделенную вершину в G.

Шаг 3. Присвоить в заданном порядке номера $C_1, C_2, \dots, C_k, \dots$ цепям из множества $\{C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}, \dots, C_{i_{K^*}}\}$, которые выделяли хотя бы одну вершину и ребро в G.

Полученное множество цепей $\{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_{K_J}\} \subseteq$
$\{C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}, \dots, C_{i_{K^*}}\}$ в G, составляет покрытие $J = (V, E_J) = \{C_1, C_2, \dots, C_{K_J}\}$ из наибольших максимальных цепей $C_k = \{v_k, u_k\}$ $k = \overline{1, K_J}$.

Теорема 1. Алгоритм ВНМЦ на $G = (V, E)$ строит покрытие $J = (V, E_J) = \{C_1, C_2, \dots, C_{K_J}\}$ из наибольших максимальных цепей C_k, $k = \overline{1, K_J}$.

Теорема 2. Алгоритм ВНМЦ выделяет покрытие $J = (V, E_J)$ на $G = (V, E)$, $|V| = n$ с вычислительной сложностью $O(n^5)$.

Доказательство. Количество операций, требуемых для нахождения кратчайших путей между всеми парами-вершинами графа G, не превышает n^2 операций. Алгоритм ВНМЦ выделяет $\frac{n(n-1)}{2} < n^2$ цепей на графе G. Далее алгоритм исключает часть цепей, целиком содержащихся в других цепях, при этом процесс сравнения займет n^2 операций. В результате вычислительная сложность алгоритма ВНМЦ определяется $O(n^2 n^2 + n^2) < O(n^5)$.

АЛГОРИТМ β_2

Вход: предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$.

Выход: связный остовный подграф $J = (V_L, E_J) = \{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_K\}$.

Шаг 1. Выделить все подграф-затравки $Z(G_L) = \{z_s^{(l)}\}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ предфрактального графа G_L. Пронумеровать ребра G_L., учитывая принадлежность к множеству $Z(G_L)$.

Шаг 2. Применяя алгоритм ВНМЦ на каждой подграф-затравке из $Z(G_L) = \{z_s^{(l)}\}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ графа G_L, построить множество цепей $J_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{J_s^{(l)}}) = \{C_1, C_2, \dots, C_{K_{J_s^{(l)}}}\}$. Процесс выделения осуществить с учетом понижения ранга $l = L, L-1, \dots, 2, 1$ предфрактального графа G_L. На $\{J_s^{(L)} = (V_s^{(L)}, E_{J_s^{(L)}})\}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$, выделить $\{C_1^*\} = \{C_{1,1}, C_{1,2}, \dots, C_{1,k}, \dots, C_{1,K_1}\} = \{J_s^{(L)} = (V_s^{(L)}, E_{J_s^{(L)}})\}$.

Любую цепь $C_{L-l+1,k}$ из $\{C_{L-l+1}^*\} = \{C_{L-l+1,1}, C_{L-l+1,2}, \dots, C_{L-l+1,k}, \dots, C_{L-l+1,K_{L-l+1}}\}$, $l = L, L-1, \dots, 2, 1$, объединить с ребрами цепей, которые выделены на множестве подграф-затравок $\{z_s^{(l-1)}\}$. Полученное множество цепей поместить в $\{C_{L-l+2}^*\}$.

Шаг 3. Совокупность цепей из $\{C_{L-l+1}^*\}$ объединить своим концом с ребром $e \in C_k = \{v_k, u_k\}$, $k = \overline{1, K_{J_s^{(l)}}}$, цепи $C_k \in J_s^{(l-1)}$ подграф-затравки $z_s^{(l-1)}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$. Полученную в результате цепь поместить в $\{C_{L-l+2}^*\}$.

Если ребро e соединяет концы более чем двух цепей из $\{C_{L-l+1}^*\}$, тогда в $\{C_{L-l+2}^*\}$ поместить все цепи, образующиеся в результате объединения.

Если концы v_k, u_k ребра e соединяют концы цепей C_{L-l+1,k_1} и C_{L-l+1,k_2}, тогда в $\{C_{L-l+2}^*\}$ поместить цепь, образованную C_{L-l+1,k_1}, C_{L-l+1,k_2} и e, при условии, что концевые вершины C_{L-l+1,k_1} и C_{L-l+1,k_2} не инцидентны ребру e и концевым вершинам остальных цепей из множества $\{C_{L-l+1}^*\}$. Иначе в

$\{C^*_{L-l+2}\}$ поместить цепи, получающиеся в результате объединения цепей из $\{C^*_{L-l+1}\}$ и ребер цепей, входящих в подграф-затравки $(l-1)$-го ранга.

Если ребро e не соединяет цепи из $\{C^*_{L-l+1}\}$, тогда поместить его в $\{C^*_{L-l+2}\}$ как отдельную цепь.

Обработать цепи всех подграф-затравок, получив множество $\{C^*_L\} = \{C_{L,1}, C_{L,2}, \dots, C_{L,k}, \dots, C_{L,K_L}\}$.

Шаг 4. Изменить нумерацию в множестве $\{C^*_L\}$, получить $\{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_K\}$. Построенное множество образует остовный подграф $J = (V_L, E_J)$.

Предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ называется (n, L)-графом, если в результате его порождения каждая вершина замещается n-вершинными затравками одинаковой степени.

Теорема 3. Алгоритм β_2 строит на предфрактальном (n, L)-графе $G_L = (V_L, E_L)$ с затравкой $H = (W, Q)$, $|W| = n$, связный остовный подграф $J = (V_L, E_J) = \{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_K\}$, состоящий из простых цепей C_k.

Теорема 4. Алгоритм β_2 на предфрактальном (n, L)-графе $G_L = (V_L, E_L)$ с затравкой $H = (W, Q)$, где $|W| = n$, $|V_L| = N = n^L$ выделяет покрытие $J = (V_L, E_J)$ с вычислительной сложностью $O(Nn^5)$.

Доказательство. Алгоритм β_2 в качестве процедуры выполняет $k = \dfrac{n^L - 1}{n - 1}$ раз алгоритм ВНМЦ, вычислительная сложность которого равна $O(n^5)$. В результате будет выполнено не более чем $k \cdot O(n^5)$ операций.

Следовательно,

$$O(k \cdot n^5) = O(\frac{n^L - 1}{n - 1} \cdot n^5) = O(n^L \cdot n^5) = O(Nn^5).$$

Теорема 5. Алгоритм β_2 строит покрытие x_2 предфрактального (n, L)-графа $G_L = (V_L, E_L)$ с затравкой $H = (W, Q)$, $|W| = n$, $|Q| = q$, где $x_2 = J = (V_L, E_J) = \{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_K\} \in X$, а C_k – одноранговые кратчайшие цепи, которым по первому критерию соответствует: $F_1(x_2) \in [a(n-1)\dfrac{(na/b)^L - 1}{na/b - 1}; qb\dfrac{(na/b)^L - 1}{na/b - 1}]$.

Доказательство. Алгоритм β_2 строит на G_L с затравкой H, покрытие $x_2 = J = (V_L, E_J) = \{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_K\}$, которое согласно условиям построения максимальных наибольших цепей, принадлежит МДР X для ВЦФ (1)-(6).

Построим верхнюю оценку для $F_1(x)$ ВЦФ (1). Верхней оценкой по весовому критерию (2) является случай, когда найденное покрытие $x \in X$ совпадает с исходным предфрактальным графом $x = G_L$.

Учитывая определения взвешенного предфрактального графа, оценим суммарный вес ребер $w(G_L)$ предфрактального графа G_L. Для этого просуммируем все общие веса каждой подграф-затравки $z_s^{(l)} \in Z(G_L)$ ранга l, $l = \overline{1, L}$, количество которых s, $s = \overline{1, n^{l-1}}$. Общий вес одной из подграф-затравок ранга l, $l=\overline{1,L}$ удовлетворяет неравенству $w(z_s^{(l)})<q(a/b)^{l-1}b,$ в котором $|Q|=q$ – количество ребер в H. Общий вес всех подграф-затравок обозначим $w(G_L)=\sum_l\sum_s w(z_s^{(l)}).$ Тогда верхняя оценка удовлетворяет неравенству $w(G_L)<\sum_l qb(a/b)^{l-1}n^{l-1} <qb\frac{(na/b)^L-1}{na/b-1}.$

Построим нижнюю оценку для $F_1(x)$ ВЦФ (1). Нижней оценкой по критерию (2) является случай, когда найденное покрытие $x\in X$ представляет собой остовное дерево минимального веса [3, 9] на G_L. Алгоритм нахождения остовного дерева минимального веса строит покрытие, выделяя остовные деревья $T_s^{(l)}=(V_s^{(l)},E_{T_s^{(l)}})$ $l=\overline{1,L}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$ на каждой подграф-затравке из $Z(G_L)$. В результате $w(T)=\sum_l\sum_s w(T_s^{(l)}),$ где $w(T_s^{(l)})$ – суммарный вес остовного дерева минимального веса $T_s^{(l)}$. По определению взвешенного предфрактального графа G_L, ребро ранга l из $z_s^{(l)}$ оценивается снизу выражением $(a/b)^{l-1}a$. Следовательно, $w(T_s^{(l)})>(N-1)(a/b)^{l-1}a$, где $(N-1)$ – общее число ребер остовного дерева. Суммарный вес остовного дерева минимального веса всех одноранговых подграф-затравок удовлетворяет неравенству $\sum_s w(T_s^{(l)})>a(n-1)(a/b)^{l-1}n^{l-1},$ $l=\overline{1,L}$.

В результате

$$w(T)>\sum_l a(n-1)(a/b)^{l-1}n^{l-1}>a(n-1)\frac{(na/b)^L-1}{na/b-1}.$$

Окончательно имеем, что алгоритм β_2 строит покрытие x_2, оцениваемое сверху и снизу по критерию $F_1(x_2),$ следующим образом: $F_1(x_2)\in[a(n-1)\frac{(na/b)^L-1}{na/b-1};qb\frac{(na/b)^L-1}{na/b-1}]$.

Теорема 6. Алгоритм β_2 на предфрактальном (n,L)-графе $G_L=(V_L,E_L)$, с затравкой $H=(W,Q)$, $|W|=n$, $|Q|=q$, с пересекающимися старыми ребрами, строит связный остовный подграф $J=(V_L,E_J)=\{C_1,C_2,\dots,C_k,\dots,C_K\}$ кратчайшими цепями C_k.

3. Заключение

Построенный алгоритм выделения максимальных по включению маршрутов позволяет эффективно решать задачу о планировании и организации маршрутов в крупномасштабных транспортных сетях.

Представленный алгоритм ориентирован на оптимизацию критерия (3) с оценками по остальным критериям ВЦФ (1)-(6). В приведенной работе акцент делается на выделении хотя бы одного решения из множества альтернатив [8].

Вычислительная сложность алгоритма ВНМЦ на графе в разы больше, чем у алгоритма β_2 при работе на предфрактальном графе.

Список источников

1. Bell M.G.H., Yasunori Iida. *Transportation network analysis*. Wiley, 1997.

2. Handbook of Optimization in Complex Networks. Theory and Applications / M. T. Thai, P. M. Pardalos (eds.) // *Springer*, 2012.

3. Емеличев В.А. *Лекции по теории графов*: учеб. пособие. Москва, Наука, 1990.

4. Кочкаров А.М. *Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход*. Нижний Архыз, Изд. центр «CYGNUS», 1998.

5. Кочкаров Р.А. *Многовзвешенные предфрактальные графы с недетерминированными весами. Приложение в экономике, строфизике и сетевых коммуникациях*. Москва, ЛЕНАНД, 2017.

6. Павлов Д.А. Моделирование крупномасштабной транспортной сети предфрактальными графами // *Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета*, Краснодар, КубГАУ, 2017, no. 07(131), с. 1035-1045.

7. Павлов Д.А., Яхонтова И.М. Математическая модель задачи организации маршрутов в крупномасштабных транспортных сетях с применением методов многокритериальной оптимизации // *Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета,* Краснодар, КубГАУ, 2017, no. 09(133), с. 1220-1230.

8. Перепелица В.А. *Многокритериальные модели и методы для задач оптимизации на графах.* LAP LAMBERT Academic Publication, 2013.

9. Э. Майника. *Алгоритмы оптимизации на сетях и графах*. Москва, Мир, 1981.

10. Экономика пассажирского транспорта: учеб. пособие / Под общей ред. проф. В.А. Персианова. Москва, КНОРУС, 2012.

METHODS OF ORGANIZATION AND PLANNING OF MAXIMUM SHORTEST ROUTES IN LARGE-SCALE TRANSPORT NETWORKS TAKING INTO ACCOUNT A MULTI-CRITERIA APPROACH

Pavlov Dmitry Alekseevich, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.
Loyko Valery Ivanovich, Dr. Sc. (Tehn.), Full Prof.

Kuban State Agrarian University named after I.T. Trubilin, Kalinina st., 13? Krasnodar, Russia, 350044; e-mail: dp.logic@gmail.com

Purpose: the authors aim to develop the efficient algorithm for the allocation of the shortest possible routes for the task of organizing and planning transportation in a large-scale transport network. *Discussion*: the article deals with the investigation of the methods of solving the problem related to the optimization of passenger and freight traffic in transport and logistics systems. When solving such problems, as a rule, one has to take into account the various requirements imposed on the system, which often contradict each other, which leads to the problem of choice under conditions of multi-criteria. The article proposes a mathematical model of the problem under study in a multi-criteria formulation. As a network model of the transport network, the article proposes to use prefractal graphs that have several advantages over the «classical» graphs. Prefractal graphs has the conditions that allow us to distinguish an admissible set of solutions on which a vector-objective function is built with given criteria; it optimizes the problem. The authors search for a solution to the problem with the use of specially constructed algorithms. The authors present and justify the algorithm for solving the problem. It makes it possible to optimize the criterion aimed at identifying routes covering as many transport hubs as possible on your way or identifying the shortest (by inclusion) shortest routes. The study gives the estimates for the remaining criteria. The quality of the algorithm is estimated by its computational complexity. The article presents the comparison of the reduced algorithm of «classical» graphs and prefractal graphs. *Results*: the authors constructed an efficient algorithm for organizing and planning of freight transportation, which gives the maximum routes for inclusion in large-scale transportation networks.

Keywords: large-scale transportation network, prefractal and fractal graphs, multi-criteria discrete optimization, graph coverage.

References

1. Bell M.G.H., Yasunori Iida. *Transportation network analysis*. Wiley, 1997.

2. Thai M.T., Pardalos P.M. (eds.). *Handbook of Optimization in Complex Networks. Theory and Applications*. Springer, 2012.

3. Emelichev V.A. and others. *Lekcii po teorii grafov:* ucheb. posobie [Lectures on the theory of graphs: study guide]. Moscow, Nauka, 1990. (In Russ.)

4. Kochkarov A.M. *Raspoznavanie fraktal'nykh grafov. Algoritmicheskij podhod* [Fractal graph recognition. Algorithmic approach]. Nizhnij Arhyz, Publ. centre «CYGNUS», 1998. (In Russ.)

5. Kochkarov R.A. *Mnogozveshennye predfraktal'nye grafy s nedeterminirovannymi vesami. Prilozhenie v ekonomike, strofizike i setevyh kommunikaciyah* [Multi-weighted pre-fractal graphs with nondeterministic weights. Application in the economy, astrophysics and network communications]. Moscow, LENAND, 2017. (In Russ.)

6. Pavlov D.A. Modelirovanie krupnomasshtabnoj transportnoj seti predfraktal'nymi grafami [Modeling large-scale transportation network with the use of pre-fractal graphs]. *Polythematic online scientific journal of Kuban State Agrarian University*. Krasnodar, KubGAU, 2017, no. 131(131), pp. 1035-1045. (In Russ.)

7. Pavlov D.A. Yakhontova I.M. Matematicheskaya model' zadachi organizacii marshrutov v krupnomasshtabnyh transportnyh setyah s primeneniem metodov mnogokriterial'noj optimizacii [Mathematical model of the problem of organization of routes in large-scale transport networks using multi-criteria optimization methods]. *Polythematic online scientific journal* of Kuban State Agrarian University. Krasnodar, KubGAU, 2017, no. 133(133), pp. 1220-1230. (In Russ.)

8. Perepelitsa V.A. *Mnogokriterial'nye modeli i metody dlya zadach optimizatsii na grafakh* [Multicriteria models and methods for optimization problems on graphs]. LAP LAMBERT Academic Publication, 2013. (In Russ.)

9. E. Mainika. *Algoritmy optimizacii na setyakh i grafakh* [Optimization algorithms on networks and graphs]. Moscow, Mir, 1981. (In Russ.)

10. Ekonomika passazhirskogo transporta: ucheb, posobie [Economy of passenger transport: study guide]. Under ed. of prof. V.A. Persianov. Moscow, KNORUS, 2012. (In Russ.)