
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ РАЗВИТИИ

Кузнецов Сергей Борисович, канд. физ.-мат. наук, доц.

Сибирский институт Управления Российской академии народного хозяйства и государственного управления, ул. Нижегородская, 6, Новосибирск, 630102; e-mail: sbk@ngs.ru

Цель: основной задачей работы является получение условий, при которых возникает плоская волна в возобновляемых факторах производства. *Обсуждение:* основным инструментом изучения поведения факторов производства было использование математического аппарата векторного анализа. При получении результатов были применены широко используемые в исследовательской деятельности описательный и научно-абстрактный метод, а также системный анализ. *Результаты:* результатом работы является получение дифференциального уравнения, описывающего экономические циклы, возникающие при развитии возобновляемых факторов производства. Найдены условия, при которых решение полученного уравнения является плоской волной. Найден характер поведения развития факторов производства в зависимости от их размера. Практической значимостью работы является возможность определения уровня государственного финансирования и нахождения пропорций, в которых требуется финансирование возобновляемых факторов производства.

Ключевые слова: возобновляемые факторы производства, цикличность экономики, динамический ротор, плоская волна.

DOI:

1. Введение

Причины колебаний, возникающих в экономическом развитии, объясняют по-разному. Д. Риккардо и Ж. Б. Сэй [11] отрицали существование экономических кризисов. Они утверждали, что частичные кризисы – это результат нарушения пропорций между отраслями производства, которые сами собой исчезнут под влиянием движения рыночной экономики.

Кризисы перепроизводства Дж. Кейнс и Э. Хансен [6, 15] объясняли недостаточной склонностью населения к потреблению. Они считали, что стимулирование совокупного спроса – условие выхода из кризиса.

Ряд ученых видят причину цикличности в экономике в недостатках кредитно-денежной системы. Хесус Уэрта де Сото [16] доказывает, что банковская политика частичного резервирования депозитов до востребования

приводит к кредитной экспансии. В экономике появляются необеспеченные деньги, удлиняющие цепочку производства и создающие экономический рост, но повышающие цены на блага [10]. Когда достигается предел резервирования, население начинает изымать депозиты из банков, в результате возникает сжатие кредита, которое приводит к рецессии. Согласно «эффекту Рикардо» («эффект гармошки»), рост безработицы приводит к росту сбережений, выводящих экономику из кризиса [14].

Процессы развития глобализации приводят к быстрому распространению кризисных явлений. Скорость погружения в кризис и широта охвата отраслей экономики зависят от множества случайных факторов [3]. В настоящее время не существует единого мнения о причинах и способах выхода из кризисов, поэтому часто указывают, что причина цикличности в экономике определена противоречивым и сложным характером разнообразных сил и факторов.

Как правило, ученые рассматривают четыре разновидности экономических циклов: краткосрочные с периодом 3-4 года циклы Китчина, среднесрочные с периодом 6-11 лет циклы Жюгляра и с периодом 15-25 лет циклы Кузнеця, долгосрочные с периодом 50-60 лет волны Кондратьева.

Краткосрочные циклы связаны с тем, что в ожидании экономического роста создаются складские запасы товарно-материальных ценностей в большем объеме, чем это реально необходимо. Так возникает дисбаланс товарно-материальных ценностей, если надежд на экономический рост нет, то происходит снижение цен на товары и небольшой экономический спад. С инвестиционной точки зрения при увеличении объемов инвестиций в основные фонды происходит превышение товарно-материальных ценностей над потребностью и спрос на инвестиции падает, что приводит к замедлению роста экономики [25].

Временной лаг запаздывания в циклах Китчина К. Жугляр дополнил временными задержками в принятии инвестиционных решений и временем создания производственных мощностей [2, 24].

В современном подходе к циклам Кузнеця предполагается, что они являются следствием технологических и инфраструктурных изменений. Основой циклического развития является массовое обновление технологий, которые определяют рост экономики. Длинные циклы цен на недвижимость также совпадают с циклом Кузнеця [21].

Н. Д. Кондратьев в 1922-1928 гг. обнаружил и исследовал длинные волны, возникающие в развитии экономики [7, 20]. Опираясь на статистический материал по экономическому развитию США и Великобритании, он показал 50-60-летние циклы цен и всего производства. Эти циклы связывают со сменой технологических основ производства. Экономист Й. Шумпетером [18] развил учение Н.Д. Кондратьева и назвал эти волны кондратьевскими или К-волнами. Он показал связь К-волн с полученной им теорией инновации.

Р. Эллиотт выдвинул предположение, что волны, возникающие на товарных и финансовых рынках, являются плоскими [12].

Согласно исследованиям В.М. Шавшукова [17] в современном экономическом развитии циклы Китчина и Жюгляра не работают, а циклы Кондратьева идеально укладываются в процессы глобализации экономики.

Наиболее известными и часто используемыми моделями экономического цикла являются модели: модель Самуэльсона-Хикса [26], AD-AS модель [6] и модель реального делового цикла [1, 23].

Важным современным направлением является разработка стохастических моделей экономического роста [19]. В этих работах моделируемые экономические показатели, как правило, показывали тенденцию к росту. В работах российских ученых А.В. Вороновского и Л.Ф. Вьюненко [4] показано, что в стохастических моделях роста возможна смена тенденций поведения макропоказателей, т.е. эти модели способны моделировать кризисные явления.

2. Методология исследования

Определим условия возникновения плоской волны в развитии возобновляемых факторов производства. Предположим, что рассматриваемая экономика обладает некоторым объемом физического капитала K , человеческого капитала H и трудовых ресурсов L . Определим вектор $\vec{r} = (L, K, \dot{I})$ факторов производства, заданный в момент времени t . Первая производная этого вектора по времени определяет скорость обновления факторов $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(\vec{r}, t) = (v_L, v_K, v_H)$ или в конечно-разностном понимании модели годовой прирост векторов. Обозначим \bar{I} – объем инвестиций, направляемых на развитие возобновляемых факторов производства. Производная по времени определяет скорость изменения инвестиций $\vec{j} = \frac{d\bar{I}}{dt}$ или годовое изменение инвестирования.

При непропорциональном изменении инвестирования факторов производства появляются диспропорции, которые отражаются на поведении вектора изменения этих факторов. В теоретически возможном поступательном развитии факторов производства возникает импульс, который приводит к своеобразному «закручиванию». Взаимовлияние возобновляемых факторов производства будет еще одной причиной появления вращательного развития. В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда происходит инвестирование в трудовые ресурсы и человеческий капитал в некоторых постоянных пропорциях. Предположим, что были созданы благоприятные условия для развития человеческого капитала. Развитие человеческого капитала в свою очередь начинает создавать условия для развития трудовых ресурсов. Очевидно, что имеет место и обратное влияние. Такое взаимовлияние приводит к нарушению поступательного развития вектора и появлению вихря. Под вихрем (ротором) будем понимать вращательную составляющую поля скоростей, как его определил в XVII веке Р. Декарт.

Из декартового представления получим, что вектор развития факторов производства состоит из двух частей: векторов поступательного развития $\vec{v}_o(\vec{r}, t)$ и вихревого развития $\vec{\omega}(\vec{r}, t) \times \vec{r}$, т.е. $\vec{v} = v_o + \vec{\omega} \times \vec{r}$. Здесь и в дальнейшем $\vec{a} \times \vec{b}$ – векторное произведение.

Рассмотрим уравнение изменения возобновляемых факторов производства, полученное для валовых инвестиций в неоклассической модели роста [9, с. 75-76]

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \frac{\partial |\vec{v}|}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) + (\text{ROT}(\vec{v}) \times \vec{v}) = \vec{j}, \quad (1)$$

где

$$\text{grad}(\varphi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial L}, \frac{\partial \varphi}{\partial K}, \frac{\partial \varphi}{\partial I} \right),$$

$$\text{ROT}_i(\vec{v}) = \left(\frac{\partial v_K}{\partial L} + \frac{v_L}{|\vec{v}|^2} \frac{\partial v_K}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial v_L}{\partial K} + \frac{v_K}{|\vec{v}|^2} \frac{\partial v_L}{\partial t} \right),$$

$$\text{ROT}_K(\vec{v}) = \left(\frac{\partial v_I}{\partial I} + \frac{v_I}{|\vec{v}|^2} \frac{\partial v_L}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial v_I}{\partial L} + \frac{v_L}{|\vec{v}|^2} \frac{\partial v_I}{\partial t} \right),$$

$$\text{ROT}_L(\vec{F}) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial K} + \frac{v_K}{|\vec{v}|^2} \frac{\partial F_i}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial F_K}{\partial I} + \frac{v_I}{|\vec{v}|^2} \frac{\partial F_K}{\partial t} \right).$$

Представим плоскую волну в комплексном виде:

$$\vec{v} = \vec{a} e^{f},$$

где $\vec{a} = (a_L, a_K, a_H)$ – вектор амплитуды волны; $\vec{v} = (v_L, v_K, v_H)$ – скорость обновления факторов; i – мнимая единица; $f = \vec{k} \cdot \vec{r} - \theta t$; $\vec{k} = (k_L, k_K, k_H)$ – вектор волнового числа; θ – круговая частота.

В трехмерном пространстве возобновляемых факторов производства найдем аналитическое представление поверхности, на которой фаза волны постоянна в каждый момент времени. Для изучаемого аргумента зафиксируем значение фазы $f = \vec{k} \cdot \vec{r} - \theta t$, где скалярное произведение векторов имеет вид $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_L L + k_K K + k_H H = \text{const}$. Это соотношение определяет плоскость в трехмерном пространстве.

«Поверхность, на которой в данный момент времени волна имеет одну и ту же фазу, называют фазовым фронтом, или фазовой поверхностью. Волновым вектором является такой вектор, длина которого численно равна волновому числу $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$, а направление совпадает с направлением фазовой нормали. Число λ – длина волны. Волна, у которой фазовый фронт представляет собой плоскость, называется плоской волной» [5, с.43].

Сформулируем понятия потенциальности и пропорциональности некоторого экономического векторного показателя, как это сделано в векторном анализе. Эти понятия являются справедливыми, для таких векторных показателей как вектор инвестиций, вектор возобновляемых факторов производства, вектор предельных производительностей и т.п.

Если вектор экономического показателя $\vec{F}(\vec{r}, t)$ представим как градиент некоторой скалярной функции $\Phi(\vec{r}, t)$, то поле показателя $\vec{F}(\vec{r}, t)$ называется потенциальным и для него выполняется равенство:

$$\bar{F}(\bar{r}, t) = \text{grad}(\hat{O}(\bar{r}, t)).$$

Векторный показатель $\bar{F}(\bar{r}, t)$ имеет свойство пропорциональности по отношению к скорости факторов производства, если отношение компонент скоростей показателя $\bar{F}(\bar{r}, t)$ совпадает с отношением скоростей развития факторов производства:

$$\frac{v_K}{v_I} = \frac{\frac{\partial F_K}{\partial t}}{\frac{\partial F_I}{\partial t}}, \quad \frac{v_K}{v_L} = \frac{\frac{\partial F_K}{\partial t}}{\frac{\partial F_L}{\partial t}}, \quad \frac{v_L}{v_I} = \frac{\frac{\partial F_L}{\partial t}}{\frac{\partial F_I}{\partial t}}.$$

В работе [9, с.77-79] был получен результат, согласно которому плоская волна появляется из условия параллельности любых двух векторов из $\bar{\omega}$, \bar{k} , \bar{a} или их линейной зависимости.

Из существования плоской волны для уравнения (1) можно заключить, что при определенных условиях это уравнение является моделью экономического цикла. Моделируя параметры $\bar{\omega}$, \bar{k} , \bar{a} , имеем возможность получать краткосрочные, среднесрочные и длинные циклы в экономике.

3. Обсуждение результатов

Основываясь на результатах работы [9], получим условия возникновения плоской волны вне зависимости от поведения вихревой составляющей вектора прироста возобновляемых факторов производства.

3.1. Связь между потенциальностью инвестиций и стационарным развитием факторов производства

Утверждение 1. При стационарном развитии факторов производства, а также при условии отсутствия вихря и потенциальности инвестиций ($\bar{I} = \text{grad}U$) на всех линиях развития имеет место равенство $\frac{dU}{dt} - \frac{|\bar{v}|^2}{2} = \text{const}$.

Доказательство. По условию утверждения поле инвестиций потенциально, т. е.: $\bar{I} = \text{grad}U$, в этом случае уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \frac{\partial |\bar{v}|}{\partial t} + (\text{ROT}(\bar{v}) \times \bar{v}) = \text{grad} \left(\frac{dU}{dt} - \frac{|\bar{v}|^2}{2} \right). \quad (2)$$

В качестве потенциала инвестиций можно взять $U = \frac{1}{2} \frac{d|\bar{r}|^2}{dt}$. Рассмотрим какой-нибудь экономический объект, находящийся в данный момент времени в точке D_0 и проследим его развитие до точки D . Кривая D_0D представляет собой линию развития этого объекта. Составляя интеграл по этой линии от обеих частей равенства (2), получим:

$$\int_{D_0}^D \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \frac{\partial |\bar{v}|}{\partial t} \cdot d\bar{r} + \int_{D_0}^D (\text{ROT}(\bar{v}) \times \bar{v}) \cdot d\bar{r} = \int_{D_0}^D \text{grad} \left(\frac{dU}{dt} - \frac{|\bar{v}|^2}{2} \right) \cdot d\bar{r}.$$

Но в каждой точке линии развития касательная к ней имеет тоже направление, что и вектор скорости обновления факторов производства \bar{v} , т. е. имеет место равенство: $d\bar{r} \times \bar{v} = 0$.

На линии развития D_0D нетрудно получить равенство:

$$(\text{ROT}(\bar{v}) \times \bar{v}) \cdot d\bar{r} = -\text{ROT}(\bar{v}) \cdot (d\bar{r} \times \bar{v}) = 0.$$

Таким образом, уравнение (1) примет вид:

$$\int_{D_0}^D \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \frac{\partial |\vec{v}|}{\partial t} \cdot d\vec{r} = \int_{D_0}^D \text{grad} \left(\frac{dU}{dt} - \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \cdot d\vec{r} = \frac{dU(D)}{dt} - \frac{|\vec{v}(D)|^2}{2} - \frac{dU(D_0)}{dt} + \frac{|\vec{v}(D_0)|^2}{2}.$$

По условию утверждения имеем стационарное развитие факторов производства, т. е. скорость обновления факторов производства не зависит от времени. Исходя из этого, получим:

$$\frac{dU(D)}{dt} - \frac{|\vec{v}(D)|^2}{2} = \frac{dU(D_0)}{dt} - \frac{|\vec{v}(D_0)|^2}{2} = \text{const}.$$

Следствие. Предположим, что потенциал инвестиций имеет вид $U = \frac{1}{2} \frac{d|\vec{r}|^2}{dt}$. При стационарном развитии факторов производства и условии отсутствия вихря характер поведения модуля скорости изменения факторов производства совпадает с характером поведения обратной величины квадратного корня от модуля этих факторов производства сдвинутую на константу, т.е. $|\vec{v}| \approx \tilde{N} + \frac{C}{\sqrt{|\vec{r}|}}$.

Доказательство. Уравнение $\frac{dU}{dt} - \frac{|\vec{v}|^2}{2} = \text{const}$ переписать в виде $yy'' + \frac{1}{2}(y')^2 = \text{const}$, где $y = |\vec{r}|$. Сделаем замену переменных $y = u^{2/3}$. После небольших преобразований получим $u^{1/3}u'' = \text{const}$. Из последнего уравнения имеем равенство $|\vec{v}| = c \sqrt{1 + \frac{C_0}{|\vec{r}|}}$, где c, C_0 – константы. Получили, что характер поведения модуля скорости изменения факторов подобен характеру поведения обратной величины от корня из модуля факторов производства плюс некоторая константа.

3.2. Моделирование поведения модуля прироста факторов производства России и Австрии

В качестве иллюстрации полученного следствия сравним поведение $|\vec{v}| \approx C + \frac{C}{\sqrt{|\vec{r}|}}$ и реального изменения модуля прироста факторов производства на примере Австрии и России. Статистические данные для Австрии взяты с сайта Евростат и представлены в млрд евро [23]. Для расчетов по анализу экономики России использовались данные с сайта Федеральной службы государственной статистики в млрд руб. [13] Ось абсцисс является временной осью, на оси ординат представлены изменения модуля прироста факторов производства и его приближения. Согласно следствию, приближение работает при стационарном развитии факторов производства и условии отсутствия вихря. Другими словами, экономику Австрии нужно рассматривать вне кризисных проявлений. Рассмотрены два временных участка с 2002 по 2007 год и с 2011 по 2015 год. Период 2008-2010 выброшен из рассмотрения, так как в этот период наблюдается сильное влияние вихревой составляющей вектора развития возобновляемых факторов производства.

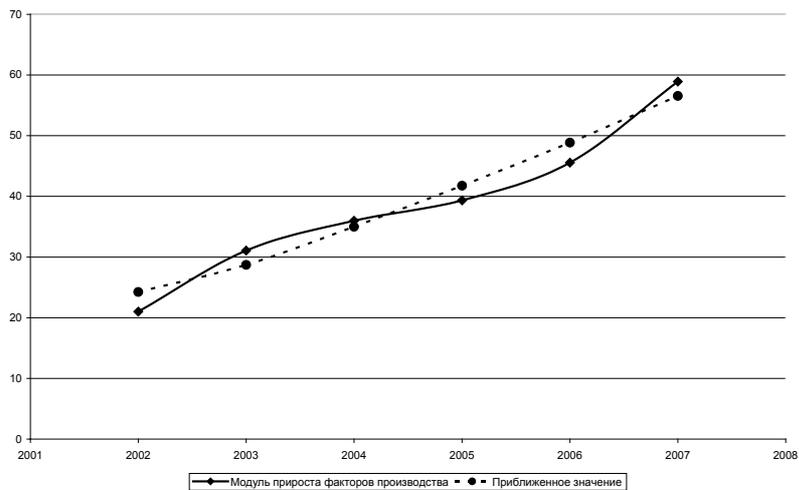


Рис. 1. Поведение показателей Австрии до кризиса 2008 года

На рис.1 представлен период поступательного развития экономики. Моделирование проходило с $S = 376$ и $s = -1000$. Коэффициент корреляции соответствовал 0,9.

Второй временной участок соответствует вхождению экономики Австрии в кризис и наличию вихревой составляющей в развитии факторов производства. Отклонение показателей друг от друга уже более существенное. Коэффициент корреляции соответствовал 0,75.

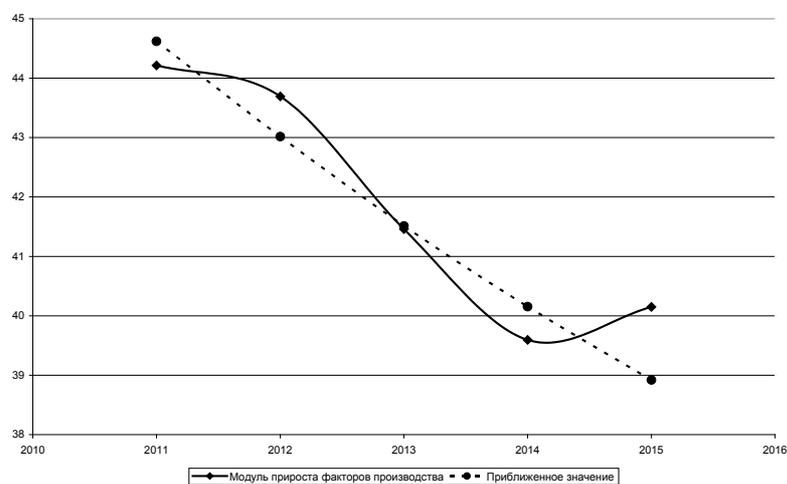


Рис. 2. Поведение показателей Австрии после кризиса 2008 года

Возобновляемые факторы производства экономики России обладали заметной вихревой составляющей, что отражалась во взлетах и падениях модуля прироста в период с 2000 по 2015 год (рис. 3).

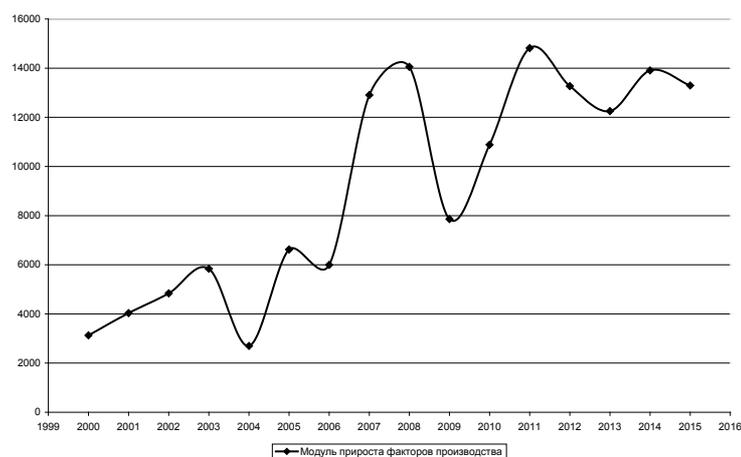


Рис. 3. Поведение модуля прироста факторов производства России.

Стабильное развитие экономики с минимальной вихревой составляющей наблюдается только в начале века в период с 2000 по 2003 год (рис. 4).

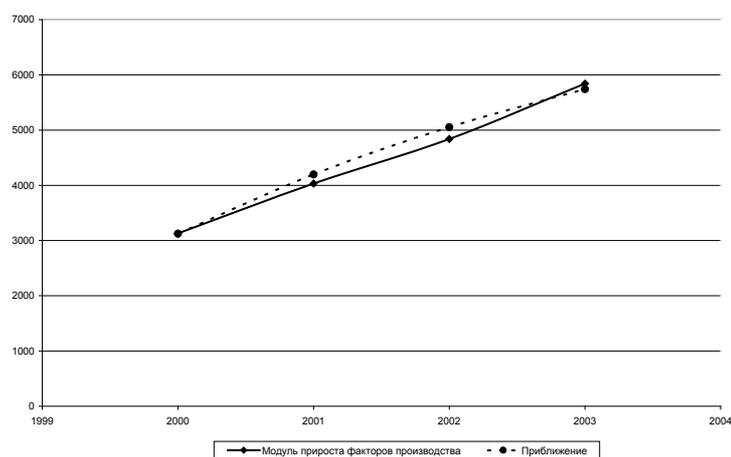


Рис. 4. Поведение показателей России

На рис. 4 представлен период стабильного развития экономики России. Моделирование проходило с $C = 8850$ и $c = -200000$. Коэффициент корреляции соответствовал 0,94.

Из следствия можно заключить, что экономики с большим объемом возобновляемых факторов производства не могут развивать большую скорость развития и наоборот. При увеличении объема факторов производства уменьшается темпы развития экономики, что показало поведения экономик «азиатских тигров». В какой-то мере это справедливо для экономики Китая, которая сделала уникальный прорыв в начале XXI века и показывает замедление развития производства в последние периоды. Но для экономики Китая это только одна из причин и их осуждение не входит в данное исследование.

3.3. Условия возникновения плоской волны

Утверждение 2. Рассмотрим произвольное поле скоростей возобновляемых факторов производства в частности и вихревое. Предположим потенциальность поля инвестиций и также обладание свойством пропорциональности относительно скорости изменения факторов производства, тогда поведение вихря $\bar{\Omega}$ определяется из дифференциального уравнения:

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} + \bar{\Omega}DIV(\bar{v}) - (\bar{\Omega} \cdot \nabla_t)\bar{v} = -|\bar{v}| \frac{\partial|\bar{v}|}{\partial t} ROT \left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|^2} \right),$$

где $ROT(\bar{v}) = \bar{\Omega}$, $DIV(\bar{v}(\bar{r}, t)) = \frac{\partial v_L}{\partial L} + \frac{\partial v_K}{\partial K} + \frac{\partial v_H}{\partial H} + \frac{v_L}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial v_L}{\partial t} + \frac{v_K}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial v_K}{\partial t} + \frac{v_H}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial v_H}{\partial t}$,
 $(\bar{\Omega} \cdot \nabla_t)\bar{v} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \Omega_L \frac{\partial \bar{v}}{\partial L} + \Omega_K \frac{\partial \bar{v}}{\partial K} + \Omega_H \frac{\partial \bar{v}}{\partial H}$.

Доказательство. Исходя из уравнения (2) и условий утверждения имеем вихревое поле скоростей факторов производства, а поле инвестиций потенциально, т. е.: $\bar{I} = gradU$.

В этом случае можно получить дифференциальное уравнение, определяющее изменение вихря $\bar{\Omega}$. К обеим частям уравнения (2) применим операцию динамического ротора и получим:

$$ROT \left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \frac{\partial|\bar{v}|}{\partial t} + grad \left(\frac{|\bar{v}|^2}{2} \right) \right) + ROT(ROT(\bar{v}) \times \bar{v}) = ROT \left(grad \left(\frac{dU}{dt} \right) \right). \quad (3)$$

Первое слагаемое может быть преобразовано к виду [8, с. 295]:

$$ROT \left(GRAD \left(\frac{|\bar{v}|^2}{2} \right) \right) = ROT \left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \frac{\partial|\bar{v}|}{\partial t} + grad \left(\frac{|\bar{v}|^2}{2} \right) \right) = |\bar{v}| \frac{\partial|\bar{v}|}{\partial t} ROT \left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|^2} \right),$$

где $GRAD(\varphi) = \left(\frac{v_L}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial \varphi(\bar{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\bar{r}, t)}{\partial L}, \frac{v_K}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial \varphi(\bar{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\bar{r}, t)}{\partial K}, \frac{v_H}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial \varphi(\bar{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\bar{r}, t)}{\partial H} \right)$

Второе слагаемое может быть представлено [8, с. 286]:

$$ROT(\bar{\Omega} \times \bar{v}) = \frac{d\bar{\Omega}}{dt} - \bar{v}DIV(\bar{\Omega}) + \bar{\Omega}DIV(\bar{v}) - (\bar{\Omega} \cdot \nabla_t)\bar{v}.$$

Компонента вектора правой части уравнения (3), которая соответствует, например, человеческому капиталу, имеет вид:

$$ROT_H \left(grad \left(\frac{dU}{dt} \right) \right) = \frac{v_L}{|\bar{v}|^2} j_K - \frac{v_K}{|\bar{v}|^2} j_L,$$

где $\frac{d\bar{I}}{dt} = (j_L, j_K, j_H)$.

Из условия пропорциональности поля инвестиций имеем: $\frac{v_K}{v_L} = \frac{j_K}{j_L}$.

Аналогично для остальных факторов производства получим нулевую правую часть уравнения (3). После преобразований равенство (3) примет вид:

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} + \bar{\Omega}DIV(\bar{v}) - (\bar{\Omega} \cdot \nabla_t)\bar{v} = -|\bar{v}| \frac{\partial|\bar{v}|}{\partial t} ROT \left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|^2} \right), \quad (4)$$

где $(\bar{\Omega} \cdot \nabla_t)\bar{v} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{\Omega}}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial L} \Omega_L + \frac{\partial \bar{v}}{\partial K} \Omega_K + \frac{\partial \bar{v}}{\partial H} \Omega_H$.

Решение дифференциального уравнения (4) задает поведение изменения вихрей с течением времени. Уравнение показывает, что вихревые

линии развития факторов производства обладают свойством стагнации. Кроме того, интенсивность вихревого коридора развития будет постоянной величиной во времени.

Найдем условия, при которых плоская волна будет решением системы уравнений (4). Решение уравнения ищем в комплексной форме:

$$\bar{v} = \bar{a} e^{\theta t}. \quad (5)$$

После подстановки равенства (5) в слагаемые левой части равенства (4) имеем: $\bar{\Omega} = ROT(\bar{v}) = (\bar{k} \times \bar{v})j$, $\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = (\bar{k} \times \bar{v})(\theta - \bar{k} \cdot \bar{v})$,

$$\bar{\Omega} DIV(\bar{v}) = (\bar{k} \times \bar{v})(\theta - \bar{k} \cdot \bar{v}), \quad |\bar{v}| \frac{\partial |\bar{v}|}{\partial t} ROT\left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\right) = \theta(\bar{k} \times \bar{v}).$$

Учитывая равенства:

$$\bar{v} \cdot (\bar{k} \times \bar{v}) = \bar{k} \cdot (\bar{v} \times \bar{v}) = 0 \quad \text{и} \quad \bar{k} \cdot (\bar{k} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot (\bar{k} \times \bar{k}) = 0,$$

$$(\bar{\Omega} \cdot \nabla_t) \bar{v} = \theta \frac{\bar{v} \cdot (\bar{k} \times \bar{v})}{|\bar{v}|^2} \bar{v} - \bar{k} \cdot (\bar{k} \times \bar{v}) \bar{v} = (\bar{k} \times \bar{v})(\theta - \bar{k} \cdot \bar{v}).$$

В результате левая часть равенства (4) примет вид:

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} + \bar{\Omega} DIV(\bar{v}) - (\bar{\Omega} \cdot \nabla_t) \bar{v} = (\bar{k} \times \bar{v})(\theta - \bar{k} \cdot \bar{v}).$$

Подставляя равенство (5) в правую часть уравнения (4), имеем:

$$-|\bar{v}| \frac{\partial |\bar{v}|}{\partial t} ROT\left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\right) = -\theta(\bar{k} \times \bar{v}).$$

Равенство (5) является решением системы дифференциальных уравнений (4) при выполнении равенства: $(\bar{k} \times \bar{v})(2\theta - \bar{k} \cdot \bar{v}) = 0$.

По условию ищем решение в виде плоской волны (5), следовательно: $(\bar{k} \times \bar{v}) = (\bar{k} \times \bar{a}) e^{\theta t}$.

$$\text{Дифференциальное уравнение (4) принимает вид: } (\bar{k} \times \bar{a})(2\theta - \bar{k} \cdot \bar{v}) = 0.$$

Плоская волна, представленная равенством (5), будет решением данного уравнения, если выполняется одно из условий:

а) параллельность векторов волнового числа \bar{k} и скорости обновления факторов производства \bar{v} , т. е.: выполнение равенства $\bar{v} = \alpha \bar{k}$. Из равенства $(\bar{k} \times \bar{v}) = (\bar{k} \times \bar{a}) e^{\theta t}$ следует, что достаточно выполнения пропорциональности векторов амплитуды и волнового числа: $\bar{a} = \alpha \bar{k}$;

б) круговая частота определяется из равенства

$$\theta = \frac{1}{2} |\bar{k}| |\bar{v}| \cos(\bar{k}, \bar{v}) = \frac{1}{2} |\bar{k}| |\bar{a}| \cos(\bar{k}, \bar{a}).$$

Выполнение одного из этих условий указывает на существование плоской волны в развитии факторов производства.

4. Заключение

Уравнения (1) и (4) с наложенными на них ограничениями можно рассматривать как два варианта одной модели экономического цикла. Эти уравнения моделируют плоскую волну, которая описывается равенством (5).

Условие пропорциональности означает, что нарушение пропорций

инвестирования в факторы производства приводит к увеличению вихря $ROT(\vec{v}) = \bar{\Omega}$, что будет искажать плоскую волну и приводить к непредсказуемым последствиям. Пропорциональность в нашем случае означает выполнение равенств $\frac{V_K}{V_L} = \frac{j_K}{j_L}$ и $\frac{V_K}{V_H} = \frac{j_K}{j_H}$. Если обозначить I_p^n – объем инвестиций вложенных p – фактор производства в n – году, то пропорциональность можно свести к конечно разностной схеме $\frac{I_K^{n+1}}{I_L^{n+1}} = \frac{I_K^n}{I_L^n}$, $\frac{I_K^{n+1}}{I_H^{n+1}} = \frac{I_K^n}{I_H^n}$. Полученные равенства указывают, что пропорции инвестирования, сложившиеся в прошлом году, необходимо соблюсти в следующем. Если возникает необходимость изменить пропорции, то необходимо менять их постепенно, чтоб не увеличивать вихревую составляющую вектора развития возобновляемых факторов производства.

Следствие из утверждения 1 имеет большее прикладное значение, чем само утверждение. Рост основных фондов и рост заработной платы замедляет развитие экономики, и эта зависимость определяется величиной $C + \frac{C}{\sqrt{|F|}}$.

В работе [9, с.79] было получено, что решением уравнения (1) является плоская волна, если векторы $\vec{\omega}$, \vec{k} , \vec{a} лежат в одной плоскости или в случае ортогональности любых двух из них. Для уравнения (4) плоская волна возникает при параллельности векторов \vec{k} , \vec{a} вне зависимости от поведения вихревой составляющей или в случае, когда удвоенная круговая частота θ равна скалярному произведению векторов \vec{k} , \vec{a} .

Главной проблемой перехода к статистическим расчетам с использованием уравнений (1) и (4) является отсутствие статистических данных по человеческому капиталу.

Список источников

1. Аукуционек С.П. *Современные буржуазные теории и модели цикла: критический анализ*. Москва, Наука, 1984.
2. Гринин Л.Е., Малков С.Ю., Коротаев А.В. Математическая модель среднесрочного экономического цикла и современный глобальный кризис // *История и математика: Эволюционная историческая макроэкономика*. Москва, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010, с. 233-284.
3. Вороновский А.В. Некоторые проблемы теории и моделирования макроэкономических рисков // *Вестник С.-Петербур. Ун-та. Серия 5: Экономика*, 2005, вып. 1 с. 101-113.
4. Вороновский А.В., Вьюненко Л.Ф. Построение траекторий развития экономики на основе аппроксимаций условий стохастических моделей экономического
- роста // *Вестник С.-Петербур. ун-та. Серия 5: Экономика*, 2014, вып. 3, с. 123-147.
5. Иванов В.Б. *Теория волн*. Иркутск, Иркут. ун-т, 2006.
6. Кейнс Дж.М. *Общая теория занятости, процента и денег* / Пер. с англ. проф. Н.Н. Любимова; под ред. д.э.н., проф. Л.П. Куракова. Москва, Гелиос АРВ, 2002.
7. Кондратьев Н. *Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения. Избранные труды*. Москва, Экономика, 2002.
8. Кузнецов С.Б. *Динамика обновления факторов производства*. Новосибирск, ЦПИ, Изд-во СИБПРИНТ, 2010.
9. Кузнецов С.Б. Моделирование возникновения циклов в экономике // *Актуальные проблемы экономики и права*, 2016, т. 10, по. 3, с. 69-82.

10. Менгер К. *Основания политической экономии. Исследования о методах социальных наук*. Москва, 2005.
11. Негиши Т. *История экономической теории*. Москва, Аспект-пресс, 2005.
12. Нили Г. *Мастерство анализа волн Эллиотта*. Москва, ИК Аналитика, 2002.
13. Федеральная служба государственной статистики. Доступно: URL: <http://www.gks.ru/> (дата обращения 21.04.2018).
14. Хайек Ф. Глава XI. *Эффект Рикардо. Индивидуализм и экономический порядок* / Пер. с англ. О.Дмитриевой. Челябинск, Социум, 2016.
15. Хансен Э. *Экономические циклы и национальный доход*. Москва, Финансовая академия, 2008.
16. Хесус Уэрта де Сото. *Деньги, банковский кредит и экономические циклы* / пер. с англ. под ред. А. В. Куряева. Челябинск, Социум, 200, с. 163-167.
17. Шавшуков В.М. Иностраные инвестиции в глобальной экономике сквозь призму теории экономического цикла // *Экономические науки*, 2014, no. 8 (117), с. 7-18.
18. Шумпетер Й.А. *Теория экономического развития*. Москва, Директмедиа Паблишинг, 2008.
19. Abel A.V. *A Stochastic Model of Investment, Marginal and the Market Value of the Firm* // *International Economic Review*, 1985, Vol. 26, pp. 305-322.
20. Diebolt C., Doliger C. *Economic Cycles Under Test: A Spectral Analysis. Kondratieff Waves, Warfare and World Security* / Ed. by T.C. Devezas. Amsterdam, IOS Press, 2006, pp. 39-47.
21. Diebolt C., Doliger C. *New International Evidence on the Cyclical Behaviour of Output : Kuznets Swings Reconsidered* // Quality & Quantity. *International Journal of Methodology*, 2008, V. 42(6), pp. 719-737.
22. Eurostat. Доступно: URL: <http://epp.eurostat.ec.europa.eu> (дата обращения 21.04.2018).
23. Gali J., Lopez-Salido J.D., Valles J. Understanding the Effects of Government Spending on Consumption // *Journal of the European Economic Association*, no. 5 (1), 2007, pp. 227-270.
24. Hirooka M. *Innovation Dynamism and Economic Growth. A Nonlinear Perspective*. Cheltenham, UK – Northampton, MA: Edward Elgar, 2006.
25. Korotayev A.V., Tsirel S.V. A Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development, and the 2008–2009 Economic Crisis // *Structure and Dynamics*, 2010, Vol. 4, no. 1, pp. 3-57.
26. Mankiw N.G. Real business cycles: a new Keynesian perspective // *Journal of Economic Perspectives*, 1989, V.3, pp. 79-90.

SIMULATION OF A PLANE WAVE IN ECONOMIC DEVELOPMENT

Kuznetsov Sergey Borisovich, Cand. Sc. (Phys.-math.), Assoc. Prof.

Siberian Institute of Management, Nizhegorodskaya st., 6, Novosibirsk, Russia, 630102;
e-mail: sbk@ngs.ru

Purpose: the author explores and analyzes the conditions under which the plane wave arises in the renewable factors of production. *Discussion:* Vector analysis is the basic tool for studying the behavior of production factors. The authors applied the descriptive and scientific abstract method, and system analysis on receipt of results. *Results:* the author obtained the differential equation describing economic cycles arising from the development of renewable production factors. The production factors development depends on their size found. Scientific novelty of the work is to obtain the conditions of cyclicity, encountered in the development of the factors of production. The practical significance of the work is identifying the state funding level and finding the proportions for different renewable factors of production financing.

Keywords: renewable factors of production, cyclical economy, dynamic rotor, plane wave.

References

1. Aukutsionek S.P. *Sovremennye burzhuaznye teorii i modeli tsikla: kriticheskij analiz* [Modern bourgeois theories and models of the cycle: critical analysis]. Moscow, Nauka, 1984. (In Russ.)
2. Grinin L.E., Malkov S.Y., Korotaev A.V. Matematicheskaya model srednesrochnogo ekonomicheskogo tsikla i sovremennij globalnyj krizis [Mathematical model of the medium-term economic cycle and the current global crisis]. *Istoriya i Matematika: Evolutsionnaya istoricheskaya makrodinamika*. Moscow, Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2010, pp. 233-284. (In Russ.)
3. Voronovskij A.V. Nekotorye problemy teorii i modelirovaniya makroekonomicheskikh riskov [Some problems of theory and modeling of macroeconomic risks]. *Vestnik S.-Peterb. Un-ta. Seriya 5: Ekonomika*, 2005, Vyp. 1, pp. 101-113. (In Russ.)
4. Voronovskij A.V., Vyyunenko L.F. Postroenie traektorij razvitiya ekonomiki na osnove approksimatsij uslovij stahosticheskikh modelej ekonomicheskogo rosta [Construction of economic development trajectories on the basis of conditions approximations for stochastic models of economic growth]. *Vestnik S.-Peterb. Un-ta. Seriya 5: Ekonomika*, 2014, Vyp. 3, pp. 123-147. (In Russ.)
5. Ivanov V.B. *Teoriya voln* [Wave theory]. Irkutsk, Irkut. un-t, 2006. (In Russ.)
6. Keynes J.M. *The general theory of employment, interest, and money*. Palgrave Macmillan, United Kingdom, 1936..
7. Kondratyev N. *Bolyshie tsikly konyunktury i teoriya predvideniya* [Large cycles of conjuncture and the foresight theory]. *Izbrannye trudy*. Moscow, Ekonomika, 2002. (In Russ.)
8. Kuznecov S.B. *Dinamika obnovleniya faktorov proizvodstva*. Novosibirsk, CPI: Izd-vo SIBPRINT, 2010. (In Russ.)
9. Kuznetsov S.B. Modelirovanie vznikeniya tsiklov v ekonomike [Modeling of cycles emergence in the economy].

- Aktualnyye problemy ekonomiki i prava*, 2016, t. 10, no. 3, pp. 69-82. (In Russ.)
10. Menger K. *Osnovaniya politicheskoy ekonomii. Issledovaniya o metodah sotsialnykh nauk* [The Foundation of political economy. Research on social science methods]. Moscow, 2005. (In Russ.)
 11. Negishi T. *Istoriya ekonomicheskoy teorii* [History of economic theory]. Moscow, Aspekt-press, 2005. (In Russ.)
 12. Nili G. *Masterstvo analiza voln Elliotta* [Mastery of Elliott wave analysis]. Moscow, IK Analitika, 2002. (In Russ.)
 13. Federal'naya sluzhba gosudarstvennoy statistiki. Available at: <http://www.gks.ru/> (accessed: 21.04.2018). (In Russ.)
 14. Hajek F. Glava XI. *Effekt Rikardo Individualizm i ekonomicheskij poryadok* [Ricardo effect Individualism and economic order]. /Per. s angl. O.Dmitrievoy. Chelyabinsk, Sotsium, 2016. (In Russ.)
 15. Hansen E. *Ekonomicheskie tsikly i natsionalnyj dohod* [Economic cycles and national income]. Moscow, Finansovaya akademiya. 2008. (In Russ.)
 16. Hesus Uehrta de Soto. *Denygi, bankovskij kredit i ekonomicheskie tsikly* [Money, Bank credit and economic cycles]. Chelyabinsk, Sotsium, 2008, pp. 163-167. (In Russ.)
 17. Shavshukov V.M. Inostrannye investitsii v globalnoy ekonomike skvozy prizmu teorii ekonomicheskogo tsikla [Foreign investment in the global economy through the prism of the economic cycle theory]. *Ekonomicheskie nauki*, 2014, no. 8 (117), pp. 7-18. (In Russ.)
 18. Shumpeter J.A. *Teoriya ekonomicheskogo razvitiya* [Economic development theory]. Moscow, Direktmedia Publishing, 2008. (In Russ.)
 19. Abel A.B. A Stochastic Model of Investment, Marginal and the Market Value of the Firm. *International Economic Review*, 1985, vol. 26, pp. 305-322.
 20. Diebolt C., Doliger C. *Economic Cycles Under Test: A Spectral Analysis. Kondratieff Waves, Warfare and World Security* / Ed. by T. C. Devezas. Amsterdam, IOS Press. 2006, pp. 39-47.
 21. Diebolt C., Doliger C. New International Evidence on the Cyclical Behaviour of Output : Kuznets Swings Reconsidered. *Quality & Quantity. International Journal of Methodology*, 2008, v. 42(6), pp. 719-737.
 22. Eurostat. Available at: <http://epp.eurostat.ec.europa.eu> (accessed: 21.04.2018).
 23. Gali J., Lopez-Salido J. D., Valles J. Understanding the Effects of Government Spending on Consumption. *Journal of the European Economic Association*, no. 5 (1), 2007, pp. 227-270.
 24. Hirooka M. *Innovation Dynamism and Economic Growth. A Nonlinear Perspective*. Cheltenham, UK – Northampton, MA: Edward Elgar. 2006.
 25. Korotayev A.V., Tsirel S.V. A Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development, and the 2008–2009 Economic Crisis. *Structure and Dynamics*, 2010, vol.4, no. 1, pp. 3-57.
 26. Mankiw N.G. Real business cycles: a new Keynesian perspective. *Journal of Economic Perspectives*, 1989, v. 3, pp. 79-90.