
ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА ФОРМИРОВАНИЯ ДОХОДНОСТИ ФОНДОВЫХ АКТИВОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭНТРОПИЙНЫХ МЕР РИСКА

Коротких Вячеслав Владимирович, канд. экон. наук, доц.
Лукин Илья Александрович, асп.

Воронежский государственный университет, Университетская пл., 1, Воронеж,
Россия, 394018; e-mail: korotkikh@econ.vsu.ru; lukin@econ.vsu.ru

Цель: исследование механизмов и аппарата формирования доходности фондовых активов с использованием энтропийных мер риска. *Обсуждение:* в работе в предположении, что энтропия большей объясняющей и предсказательной способностями по сравнению с коэффициентом бета из модели CAPM, мы исследовали теоретическую возможность построения и эмпирического использования энтропийного варианта модели CAPM. В ее основе лежит суждение, что в качестве измерителя риска коэффициент бета целесообразно заменить дифференциальной энтропией. *Результаты:* результаты эмпирических расчетов показали, что функция энтропии аналогично дисперсии убывает с ростом числа активов в портфеле. Эффективные портфели в координатах «энтропия – доходность» формируют множество эффективных портфелей вдоль ветви параболы. На примере дифференциальных функций энтропии по Шеннону и по Реньи показано, что энтропия в качестве измерителя риска сочетает в себе преимущества классических измерителей риска (коэффициент бета и стандартное отклонение). Она улавливает риск вне зависимости от состояния рынка и может использоваться для иллюстрации эффекта диверсификации.

Ключевые слова: риск, диверсификация, портфель, дифференциальная энтропия.

DOI: 10.17308/meps.2019.3/1000

1. Вступление

В общем случае энтропия используется для описания уровня неопределенности или в качестве одной из мер изменчивости случайной величины. В настоящем исследовании мы будем рассматривать энтропию как меру неопределенности процессов формирования доходности активов на фондовом рынке. В соответствии с предположениями современной теории портфеля нам следует полагать, что доходности стационарны и нормально распреде-

лены, однако зачастую это не так [8]. Энтропийный подход не накладывает подобных ограничений. Целью данного исследования является разработка математического аппарата моделирования процессов фондового рынка, использующего энтропию в качестве меры риска. В классической модели CAPM анализируются равновесные рыночные состояния, которые описываются ожидаемой доходностью и параметром бета, в общем случае характеризующим соотношение изменчивостей доходностей рыночного портфеля и исследуемых инвестиционных возможностей. Когда случайная величина подчиняется нормальному закону, энтропия обусловлена только дисперсией, таким образом, эти меры риска могут быть идентичными. Ниже мы продемонстрируем, что существуют значимые различия между дисперсией (как следствие и коэффициентом бета) и энтропией доходности актива или портфеля активов. Мы покажем, что энтропия представляет собой эффективный инструмент измерения риска в анализе инвестиционных возможностей. В работе представлены результаты сравнительного анализа энтропийных и традиционных мер риска по их объясняющей способности. В исследовании продемонстрирован эффект диверсификации с помощью энтропии и дисперсии. По результатам установлено, что для высокодиверсифицированных портфелей объясняющая способность энтропии в 1,5 раза выше, чем у коэффициента бета в модели CAPM.

Особое внимание уделяется сравнительному анализу энтропии и дисперсии для различных фаз рыночного цикла. Установлено, что объясняющая способность энтропии значительно выше на растущем рынке и ниже на падающем рынке. Результаты, полученные для различных фаз рыночного цикла, показали, что различные меры риска демонстрируют похожие зависимости между риском и доходностью. В частности, энтропийным мерам риска могут быть свойственны те же противоречия, что и традиционным измерителям риска на разных фазах рыночного цикла.

В рамках исследования проведен сравнительный анализ предсказательной способности энтропийных мер риска и коэффициента бета из модели CAPM.

2. Данные

В эмпирической части исследования мы использовали дневные доходности 150 активов, входящих в S&P500, за период с 1990 до 2016 года. Мы выбрали дневные доходности для иллюстрации того факта, что их распределение не подчиняется нормальному закону. На это, в частности, указывается в работах Erdos and Ormos [8] и Erdos et al. [9], где продемонстрированы основные сложности моделирования процесса ценообразования фондовых активов, когда они не подчиняются нормальному закону. Вычисление дневных доходностей дает возможность сравнения различных мер риска.

3. Методология

Энтропия – это математическое понятие, которое используется преимущественно для описания стохастического процесса, генерируемого неко-

торой системой в ходе ее функционирования. Впервые термин «энтропия» (от греч. *ἐντροπία* – «превращение») был использован Р. Клаузиусом [4] в термодинамике для измерения уровня теплопередачи при обратимых процессах в изолированных системах. В статистической механике используется другая интерпретация энтропии, а именно как меры неопределенности системы после наблюдения ее макросвойств (давление, температура, объем). В этом качестве энтропия продвигается в исследованиях Л. Больцмана [3]. Он определил структурную энтропию как разнообразие состояний, в которых могут находиться элементы системы. Он выявил тесную взаимосвязь между термодинамическими и статистическими аспектами энтропии: уравнение термодинамической энтропии и структурной энтропии отличаются только наличием во втором постоянный Больцмана.

Перспективным оказалось приложение аппарата энтропийного моделирования в задачах теории информации, речь идет о так называемой информационной энтропии Шеннона [21]. Система информационного обеспечения функционирует подобно стохастической кибернетической системе, сообщения в которой можно рассматривать как случайную величину. В этом контексте энтропия характеризует количество информации в сообщении или, другими словами, количество информации, отсутствующей до получения сообщения. Чем более непредсказуемо (неопределенно) сообщение от системы, тем больше ожидаемое количество информации, содержащейся в сообщении. Как следствие, большая неопределенность сообщений системы означает большую энтропию. Поскольку энтропия отражает количество информации в сообщении, она измеряет максимальную степень сжатия сообщения без потери информации.

Широкое применение энтропия получила в теории количественного анализа в финансах. Philippatos и Wilson [18], сравнивая свойства энтропии и дисперсии, показали, что энтропия является более общей мерой и обладает рядом преимуществ по сравнению с дисперсией. В исследовании Kirchner и Zunckel [13] указывается на то, что в финансах энтропия является более предпочтительным инструментом при измерении степени снижения риска за счет диверсификации. Примечательно, что авторы пришли к такому выводу, действуя в рамках ограничения по нормальности. Dionisio и др. [5] также обращает внимание на то, как энтропия идентифицирует эффекты диверсификации. Авторский коллектив указывает на то, что энтропия является более общей мерой неопределенности, нежели дисперсия, поскольку полностью использует информацию о распределении. Взаимная информация и условная энтропия удобны при сравнении с систематическим риском и риском специфическим, оцениваемыми по линейной модели CAPM. Исследуя проблему прогнозируемости доходностей фондовых активов, Maasoumi and Racine [14] пришли к выводу, что энтропия имеет ряд преимуществ и в этой связи способна к эффективной идентификации нелинейных зависимостей в рядах доходностей. Nawrocki and Harding [16] предложили на обсуждение взвешенную энтро-

пию как меру инвестиционного риска, рассматривая дискретный случай.

Все вышеуказанные результаты, полученные научным сообществом, явно указывают на то, что энтропия может претендовать на роль измерителя риска. Однако также они свидетельствуют о том, что в ее приложении есть определенные трудности. Одной из главных задач нашего исследования является показать, что энтропийные меры риска, с одной стороны, более точны и, с другой стороны, имеют вычислительную сложность, сопоставимую с вычислительной сложностью классических мер риска.

3.1. Дискретная функция энтропии

Существует два основных типа энтропийных функций: дискретная и дифференциальная.

Пусть X^* – дискретная случайная величина, которая принимает значения o_1, o_2, o_3 с соответствующими вероятностями $p_i = \Pr(X^* = o_i)$, $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Тогда обобщенная функция энтропии [19] случайной величины X^* имеет вид:

$$H_\alpha(X^*) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_{i=1}^n p_i^\alpha \right), \quad (1)$$

где α – порядок энтропии $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1$. Порядок энтропии отражает вес, придаваемый значениям случайной величины. Содержательный смысл параметра α можно описать как чувствительность функционала к отклонению состояния системы от равновесного: чем больше α , тем быстрее уменьшается энтропия при отклонении системы от равновесного состояния. Смысл ограничения $\alpha \geq 0$ заключается в том, чтобы при приближении системы к равновесному (более вероятному) состоянию обеспечивалось возрастание энтропии. Это требование является естественным для понятия «энтропия». Наиболее распространены случаи $\alpha \rightarrow 1$ и $\alpha = 2$.

Рассмотрим предельный случай $\alpha \rightarrow 1$ обобщенной энтропии. Используя правило Лопиталю, получим, что H_α сходится к энтропии Шеннона:

$$H_1(X^*) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i) \quad (2)$$

Случай $\alpha = 2$ получил название энтропии столкновений (квадратичная энтропия) и в литературе также упоминается как частный случай энтропии Реньи:

$$H_2(X^*) = -\log_2 \left(\sum_{i=1}^n p_i^2 \right). \quad (3)$$

Функция $H_\alpha(X)$ является невозрастающей по α и в обоих рассмотренных случаях принимает положительные значения:

$$0 < H_2(X^*) \leq H_1(X^*). \quad (4)$$

3.2. Дифференциальная функция энтропии

Пусть X – непрерывная случайная величина, принимающая действительные значения с вероятностями, определяемыми функцией плотности $f(x)$. Тогда по аналогии с (1) дифференциальную энтропию определим как:

$$H_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \int f(x)^\alpha dx. \quad (5)$$

Основания логарифма отличается от использованного в уравнении (1). Во всех дифференциальных функциях энтропии обычно используется натуральный логарифм. Рассмотрим частые случаи ($\alpha = 1$ и $\alpha = 2$):

$$H_1(X) = -\int f(x) \ln f(x) dx, \quad (6)$$

$$H_2(X) = -\ln \int f(x)^2 dx. \quad (7)$$

Важным отличием дискретной энтропии от дифференциальной заключается в том, что в условиях непрерывности область значений функции энтропия задана на множестве действительных чисел:

$$H_\alpha(X) \in \mathbf{R}. \quad (8)$$

В практических расчетах классические меры риска, будь то коэффициент бета в модели CAPM или дисперсия, оцениваются по дневным или месячным данным о доходности. Мы будем придерживаться подобной практики, но поскольку используемые временные ряды представляют собой реализацию непрерывного процесса, наше внимание будет направлено на дифференциальную функцию энтропии.

3.3. Оценивание энтропии

Для вычисления дифференциальной энтропии предварительно необходима оценка функции плотности распределения доходностей. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – наблюдаемые значения непрерывной случайной величины X , а $H_{\alpha,n}(X)$ выборочная оценка дифференциальной энтропии. Тогда, если $f_n(x)$ – выборочная оценка $f(x)$, энтропия примет вид:

$$H_{\alpha,n}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \int_{A_n} f_n(x)^\alpha dx, \quad (9)$$

где A_n – интервал интегрирования, за границами которого можно оставить малые и редкие значения выборочной оценки $f_n(x)$. Пусть $A_n = (\min(x), \max(x))$.

3.3.1. Метод гистограмм

Рассмотрим один из простейших методов оценки функции плотности – метод гистограмм. Пусть $b_n = (\max(x), \min(x))$ – диапазон выборочных значений, который будет разделен на k равных отрезков с границами в точках t_j . Длина отрезка не изменяется $h = \frac{b_n}{k} = t_{j+1} - t_j$. Функция плотности в этом случае может быть оценена по формуле:

$$f_n(x) = \frac{v_j}{nh}, \quad (10)$$

при $x(t_j, t_{j+1})$, где v_j – число попаданий на отрезок j .

Используя уравнения (6), (7), (9), (10), получим уравнения для оценки энтропии Шеннона и энтропии Реньи:

$$H_{1,n}(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k v_j \ln \left(\frac{v_j}{nh} \right) \quad (11)$$

$$H_{2,n}(X) = -\ln \sum_{j=1}^k h \left(\frac{v_j}{nh} \right)^2. \quad (12)$$

Настраиваемым параметром в этом методе является число отрезков (k). В литературе встречаются несколько методов для подбора этого параметра (метод квадратного корня, правило Скотта [20] или правило Фридмана – Диакониса [10]), однако их рассмотрение находится за границами предметной области настоящего исследования.

3.3.2. Ядерная оценка плотности

Ядерные методы оценки функции плотности являются одними из самых распространенных. Суть метода ясна из уравнения:

$$f_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{x - x_i}{h} \right), \quad (13)$$

где $K(\cdot)$ – ядерная функция; h – ширина полосы. В научной литературе представлены несколько функций, которые могут использоваться в роли ядерной. Из практических соображений, а именно с целью снижения времени расчетов, и основываясь на результатах исследования [17] из всего представленного многообразия целесообразно использовать ядерную функцию Епанечникова с индикатором:

$$K(z) = \frac{3}{4} (1 - z^2) I_{\{|z| \leq 1\}}, \quad (14)$$

где I – индикатор.

В исследовании Hardle [11] продемонстрировано, что выбор ядерной функции не является вопросом первой важности, чего не скажешь о выборе параметра h . Для оценки этого параметра обычно используется правило Сильвермана [23]:

$$\hat{h}_{rot} = 1,06 \min \left\{ \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \frac{IQR(x)}{1,34} \right\} n^{-\frac{1}{5}}, \quad (15)$$

где $IQR(x)$ – интерквартильное расстояние.

Поскольку данное правило предполагает нормальный закон распределения случайной величины X , оно дает приближенную оценку оптимального значения параметра ширины полосы h . Несмотря на это, правило Сильвермана можно использовать для получения начального приближения параметра в более сложных вычислительных техниках [24].

Beirlant et al. [2] рассматривает еще ряд дополнительных подходов к оцениванию энтропии, например, перестановки, группировка данных и перекрестные проверки; однако в рамках нашего исследования принято решение сосредоточиться на использовании наиболее распространенных методов.

3.4. Оценивание риска

Пусть задан следующий набор данных:

$$D : \{S, R, R_m, R_f\}. \quad (16)$$

В качестве его элементов выступают множество активов

$S : \{S_1, S_2, \dots, S_l\}$, их доходностей $R : \{R_1, R_2, \dots, R_l\}$, где $R_i = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in})$. Рыночную доходность задает вектор $R_M = (r_{M1}, r_{M2}, \dots, r_{Mn})$, а значения безрисковой ставки доходности $R_F = (r_{F1}, r_{F2}, \dots, r_{Fn})$. Причем l – число активов, а n – размер выборки. Для единообразного представления риска актива будем использовать обозначение $\kappa(S_i)$.

В качестве меры риска в академической среде принято использовать стандартное отклонение и коэффициент бета. Введем для них следующие обозначения K_σ и K_β . Тогда оценка риска актива i с использованием данных мер можно представить:

$$\hat{\kappa}_\sigma(S_i) = \sigma(R_i - R_F), \quad (17)$$

$$\hat{\kappa}_\beta(S_i) = \beta_i = \frac{\text{cov}(R_i - R_F, R_M - R_F)}{\text{var}(R_M - R_F)}. \quad (18)$$

Наша гипотеза заключается в том, что неопределенность, присутствующая в данных, может быть интерпретирована как риск актива, по этой причине энтропия может быть использована в качестве инструмента при измерении риска. Поскольку функция дифференциальной энтропии может принимать отрицательные значения, для содержательной интерпретации мы будем потенцировать энтропию. Измеритель риска на базе энтропии получим по уравнению:

$$\hat{\kappa}_H(S_i) = \exp[H_n(R_i - R_F)]. \quad (19)$$

Данная функция κ_H может принимать неотрицательные вещественные значения $\kappa_H \in [0, +\infty)$.

3.5 Объясняющая способность

С целью сравнения эффективности методов оценки риска будем использовать критерий объясняющая способность (точность аппроксимации).

Пусть V – объясняемая переменная, принимающая значения $v = (v_1, v_2, \dots, v_l)$, U – объясняющая переменная со значениями $u = (u_1, u_2, \dots, u_l)$. Для измерения объясняющей способности будем использовать статистику линейной регрессионной модели: $V = a_0 + a_1 U + \varepsilon$.

Параметры модели (a_0, a_1) оцениваются по МНК. Имеем $\hat{v}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 u_i$. Объясняющую способность будем оценивать по коэффициенту детерминации:

$$R^2(v, u) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 u_i))^2}{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2}. \quad (20)$$

Интерес представляет изучение того, каким образом различные меры риска влияют на ожидаемую доходность актива. Введем функцию $\eta(\kappa)$. Пусть объясняющая переменная U будет отражать риск актива:

$$u_\kappa = (\hat{\kappa}(S_1), \hat{\kappa}(S_2), \dots, \hat{\kappa}(S_l)), \quad (21)$$

а объясняемая переменная характеризует премию за риск:

$$v_\mu = (E[R_1 - R_F], E[R_2 - R_F], \dots, E[R_l - R_F]), \quad (22)$$

где κ – функция риска, $E[\]$ – математическое ожидание. С учетом вве-

денных обозначений оценку объясняющей способности будем осуществлять по функции:

$$\hat{\eta}(\kappa) = R^2(v_\mu, u_\kappa). \quad (23)$$

4. Обсуждение результатов

Изложение эмпирических результатов осуществим в четыре этапа. На первом этапе рассмотрим потенциал использования энтропии в портфельном анализе. На втором – произведем оценку объясняющей способности предлагаемых моделей. На третьем – сопоставим специфику различных мер риска в условиях повышательной и понижающей рыночной динамики. На четвертом – используя различные меры риска, оценим и сравним прогностическую способность всех исследуемых мер риска.

4.1. Диверсификация в портфельном анализе

Данный этап эмпирического исследования должен ответить на вопрос, может ли энтропия использоваться для иллюстрации эффекта диверсификации. Мы генерировали случайные портфели с равными долями и различным числом активов, на основе 150 активов из S&P500. Риск портфеля оценивался с использованием стандартного отклонения, энтропии Шеннона и энтропии Реньи. Поскольку коэффициент бета характеризует только систематический риск, принято решение исключить его из анализа. Обе энтропийные меры оценивались по гистограммному методу, на 175 отрезках для энтропии Шеннона и на 50 – для энтропии Реньи.

На рис. 1 представлен эффект диверсификации, иллюстрируемый энтропийными мерами и стандартным отклонением. Для 10 активов, случайным образом отобранных в портфель, диверсификация позволила снизить риск почти на 40%, что подтверждается всеми используемыми измерителями риска.

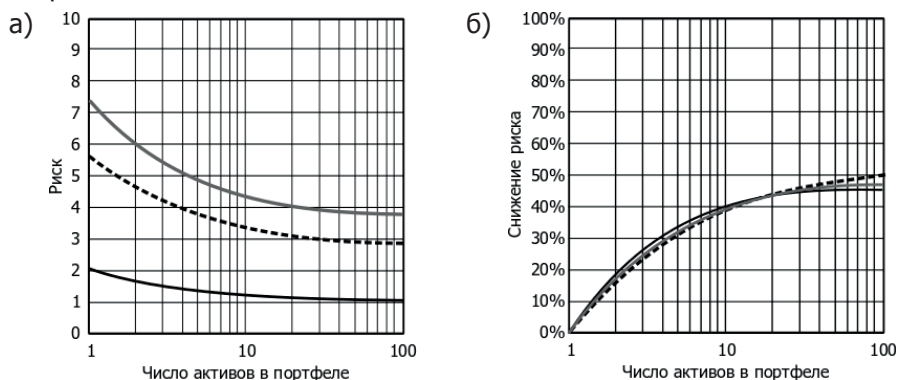


Рис. 1. Эффект диверсификации на примере различных мер риска: по Шеннону (серая сплошная линия), по Реньи (черная пунктирная линия), стандартное отклонение доходности (черная сплошная линия)

Данный график позволил заключить, что энтропия ведет себя похожим, но полностью идентичным образом тому, как ведет себя стандартное

отклонение. Это, безусловно, говорит в пользу энтропии как измерителя риска.

Интересный результат был получен в ходе исследования того, как ведут себя активы по отдельности и в составе портфелей в координатах «риск–доходность». Для этого были сгенерированы портфели с равными долями в составе которых 2, 5 и 10 активов. Сравнить индивидуальные характеристики риска активов с их характеристиками риска в рамках портфеля можно, используя рис. 2.

Результаты, полученные для стандартного отклонения и энтропии (см. рис. 2), достаточно близки, а эффективные портфели располагаются на кривой, постулируемой в теории Марковица [15]. Отличный от этого результат был получен для коэффициентов бета. Мы выявили следующую закономерность: чем больше активов в портфеле, тем ближе их координаты к началу отсчета.

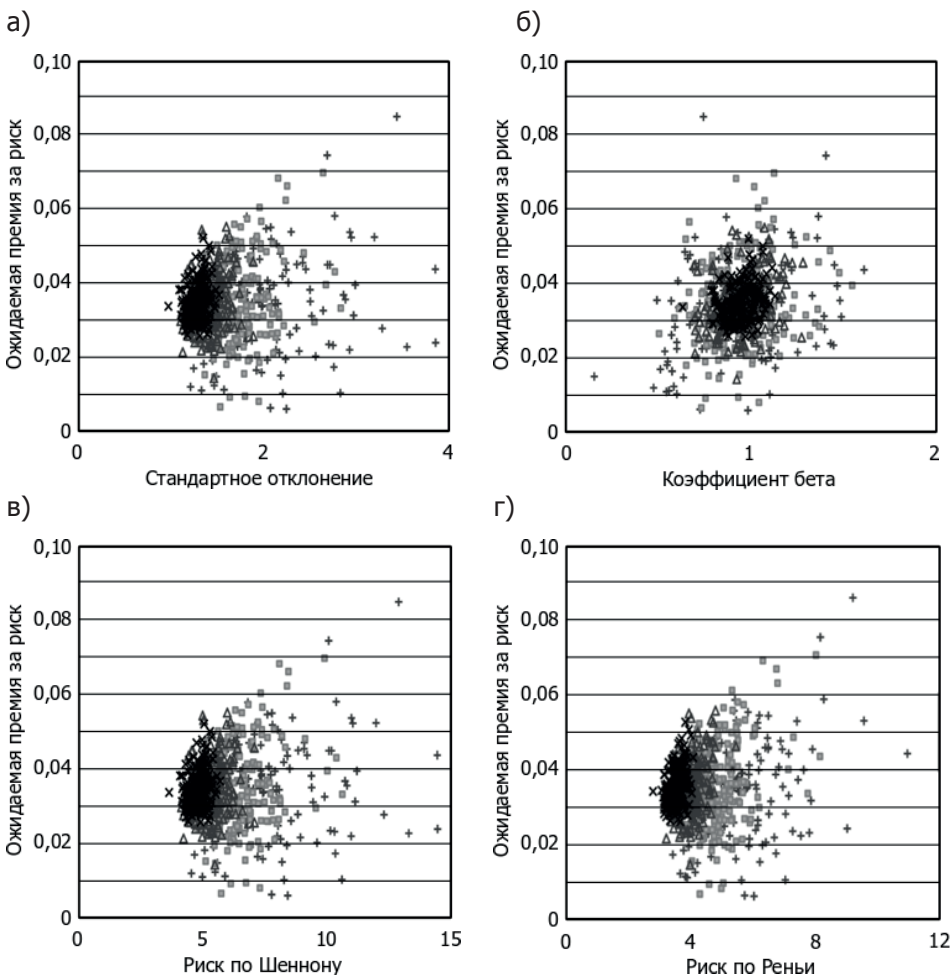


Рис. 2. Множество портфельных решений в координатах «риск–доходность», где “+” – один актив; “□” – три актива; “Δ” – пять активов; “x” – десять активов).

В продолжение исследования мы оценили объясняющую способность для различных комбинаций активов и различного числа активов в портфеле. Влияние эффекта диверсификации на объясняющую способность раскрывается на рис. 3.

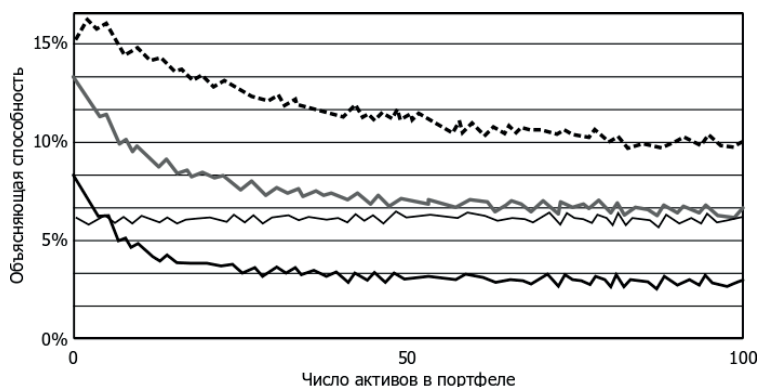


Рис. 3. Зависимость объясняющей способности меры риска от уровня диверсификации. Риск по Шеннону (серая сплошная линия), риск по Реньи (черная пунктирная линия), стандартное отклонение доходности (толстая черная сплошная линия), коэффициент бета (тонкая черная сплошная линия).

Объясняющая способность для стандартного отклонения и энтропии убывает по мере роста числа активов в портфеле; для коэффициента бета такой зависимости выявлено не было. Полученный результат необходимо следует из самой природы рассматриваемых мер. Коэффициент бета измеряет только систематический риск, а стандартное отклонение и энтропия учитывают также и специфический риск, который и позволяет повысить объясняющую способность этих мер у низкодиверсифицированных портфелей. Несмотря на убывание объясняющей способности обеих энтропийных мер, они более предпочтительны по сравнению с бета-коэффициентом. Для высокодиверсифицированных портфелей объясняющая способность энтропии Реньи превысила в 1,5 раза аналогичную характеристику коэффициента бета.

4.2. Объясняющая способность и рыночные тенденции

Мы разделили выборку за 27 лет по преобладающей тенденции на период «растущего» рынка и период «падающего рынка», $P1+$ и $P1-$ соответственно. По данным этих выборочных совокупностей мы исследовали объясняющую способность стандартного отклонения, коэффициента бета, энтропии Шеннона и энтропии Реньи.

Имеем следующие результаты параметрической идентификации на растущем рынке:

$$E(r_i - r_F) = 0,0036_{(0,537)} + 0,0291_{(0,001)} \sigma, R^2 = 0,3389,$$

$$E(r_i - r_F) = 0,0037_{(0,533)} + 0,0569_{(0,001)} \beta, R^2 = 0,3667,$$

$$E(r_i - r_F) = -0,0115_{(0,094)} + 0,0104_{(0,000)} H_1, R^2 = 0,4345,$$

$$E(r_i - r_F) = -0,0127_{(0,073)} + 0,0131_{(0,000)} H_2, R^2 = 0,4235.$$

Для падающего рынка получены следующие результаты параметрической идентификации:

$$E(r_i - r_F) = 0,0647_{(0,000)} - 0,0444_{(0,001)} \sigma, R^2 = 0,3673,$$

$$E(r_i - r_F) = 0,0577_{(0,001)} - 0,1307_{(0,001)} \beta, R^2 = 0,4369,$$

$$E(r_i - r_F) = 0,0818_{(0,004)} - 0,0148_{(0,001)} H_1, R^2 = 0,3961,$$

$$E(r_i - r_F) = 0,0837_{(0,003)} - 0,0194_{(0,001)} H_2, R^2 = 0,3855.$$

Оказалось, что в условиях доминирования различных рыночных тенденций анализируемые меры риска ведут себя схожим образом. Такое поведение обусловлено тем, что энтропийным мерам риска может быть свойственна неоднозначность результатов, характерная для традиционных мер риска. На растущем рынке мы обнаружили достаточно высокую объясняющую способность у всех мер риска: 33,90%, 36,67%, 43,45%, 42,36% – у стандартного отклонения, коэффициента бета, энтропии Шеннона и энтропии Реньи соответственно. Как и при анализе полной выборки, линии регрессии имеют положительный наклон, свидетельствующий о прямой связи риска и доходности.

На участке падающего рынка, напротив, больший риск, независимо от измерителя, не компенсируется большей доходностью, а свидетельствует как раз об убытке. Необходимо отметить, что объясняющая способность коэффициента бета на участке падающего рынка выше, чем у энтропийных мер риска. Однако мы полагаем, что результаты, полученные на полной выборке, более убедительны, поскольку, во-первых, размеры выборки для растущего и падающего рынка существенно разнятся, во-вторых, перед инвестором возникает необходимость решения дополнительной задачи, а именно точно определять характер тенденции на рынке.

5. Заключение

Энтропия в качестве измерителя риска сочетает в себе преимущества классических измерителей риска (коэффициент бета и стандартное отклонение). Она улавливает риск без какой-либо информации о состоянии рынка и может использоваться для иллюстрации эффекта диверсификации. Оба варианта расчета энтропийной меры риска (по Шеннону и по Реньи) демонстрируют высокую надежность. У энтропийных мер наблюдается зависимость от доминирующей тенденции на рынке, что характерно также и для коэффициента бета.

Список источников

1. Andor G., Dulk M. Harmonic mean as an approximation for discounting intraperiod cash flows // *The Engineering Economist*, 2013, vol. 58, pp 3-18.
2. Beirlant J., Dudewicz E.J., Györfi L., Van der Meulen E.C. Nonparametric entropy estimation: An overview // *International Journal of Mathematical and Statistical Sciences*, 1997, vol. 6, pp. 17-40.
3. Boltzmann L. Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gas-molekülen // *Wissenschaftliche Abhandlungen*, 2012, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 316-402.

4. Clausius R. On a mechanical theorem applicable to heat // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1870, vol. 40, pp. 122-127.
5. Dionisio A., Menezes R., Mendes D.A. An econophysics approach to analyze uncertainty in financial markets: an application to the Portuguese stock market // *The European Physical Journal*, 2006, vol. 50, pp. 161-164.
6. Endovitsky D.A., Davnis V.V., Korotkikh V.V. Adaptive Trend Decomposition Method in Financial Time Series Analysis // *The Journal of Social Sciences Research*, 2018, no. S3, pp. 104-109.
7. Endovitsky D.A., Davnis V.V., Korotkikh V.V. On Two Hypotheses in Economic Analysis of Stochastic Processes // *Journal of Advanced Research in Law and Economics*, 2017, vol. 8, no. 8, pp. 2391-2398.
8. Erdos P., Ormos M. Return calculation methodology: Evidence from the Hungarian mutual fund industry // *Acta Oeconomica*, 2009, vol. 59, pp. 391-409.
9. Erdos P., Ormos M., Zibriczky D. Non-parametric and semi-parametric asset pricing // *Economic Modelling*, 2011, vol. 28, pp. 1150-1162.
10. Freedman D., Diaconis P. On the histogram as a density estimator: L2 theory // *Probability theory and related fields*, 1981, vol. 57, pp. 453-476.
11. Hardle W. et al. *Nonparametric and semiparametric models*: Springer, 2004.
12. Jensen M.C. The performance of mutual funds in the period 1945-1964 // *The Journal of Finance*, 1968, vol. 23, pp. 389-416.
13. Kirchner U., Zunckel C. *Measuring Portfolio Diversification*. arXiv preprint. 2011.
14. Maasoumi E., Racine J. Entropy and predictability of stock market returns // *Journal of Econometrics*, 2002, vol. 107, pp. 291-312.
15. Markowitz H.M. Portfolio selection // *The Journal of Finance*, 1952, vol. 7, pp. 77-91.
16. Nawrocki D.N., Harding W.H. State-value weighted entropy as a measure of investment risk // *Applied Economics*, 1986, vol. 18, pp. 411-419.
17. Ormos M., Zibriczky D. Entropy-Based Financial Asset Pricing // *PLoS ONE*, 2014, vol. 9(12).
18. Philippatos G.C., Wilson C.J. Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios // *Applied Economics*, 1972, vol. 4, pp. 209-220.
19. Renyi A. On Measures of Entropy and Information // *Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley, Calif. University of California Press, 1961, pp. 547-561.
20. Scott D.W. On optimal and data-based histograms // *Biometrika*, 1979, vol. 66, pp. 605-610.
21. Shannon C.E. A Mathematical Theory of Communication // *Bell System Technical Journal*, 1948, vol. 27, pp. 379-423.
22. Sharpe W.F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk // *The Journal of Finance*, 1964, vol. 19, pp. 425-442.
23. Silverman B.W. *Density estimation for statistics and data analysis*: CRC press. Monographs on Statistics and Applied Probability, 1986.
24. Turlach B.A. *Bandwidth selection in kernel density estimation: A review*. CORE and Institut de Statistique, 1993.
25. Wachowiak M.P., Smolikova R., Tourassi G.D., Elmaghraby A.S. Estimation of generalized entropies with sample spacing // *Pattern Analysis and Applications*, 2005, vol. 8, pp. 95-101.
26. Давнис В.В., Коротких В.В., Лукин И.А. Энтропийный анализ портфельных решений // *Современная экономика: проблемы и решения*, 2018, no. 1 (97), с. 20-35.

ENTROPY-BASED MODELLING FINANCIAL ASSET RETURN

Korotkikh Viacheslav Vladimirovich, Cand. Sc. (Econ.), Assoc. Prof.
Lukin Ilia Aleksandrovich, graduate student

Voronezh State University, University sq. 1, Voronezh, Russia, 394018; e-mail: korotkikh@econ.vsu.ru; lukin@econ.vsu.ru

Purpose: investigation of mechanisms and methods of modelling financial asset return based on entropy risk measures. *Discussion:* entropy explains the return both securities and portfolios in a simpler way and, at the same time, with higher explanatory power than the beta of the capital asset pricing model. For asset pricing we define the continuous entropy as an alternative risk measure. Results: our results show that entropy decreases in the function of the number of securities involved in a portfolio in a similar way to the standard deviation, and that efficient portfolios are situated on a hyperbola in the expected «return – entropy» system. Entropy as a novel risk measure combines the advantages of the CAPM's risk parameter (beta) and the standard deviation. It captures risk without using any information about the market, and it is capable of measuring the risk reduction effect of diversification.

Keywords: risk, diversification, portfolio, differential entropy.

References

1. Andor G., Dulk M. Harmonic mean as an approximation for discounting intraperiod cash flows. *The Engineering Economist*, 2013, vol. 58, pp 3-18.
2. Beirlant J., Dudewicz E.J., Gyorfi L., Van der Meulen E.C. Nonparametric entropy estimation: An overview. *International Journal of Mathematical and Statistical Sciences*, 1997, vol. 6, pp. 17-40.
3. Boltzmann L. Weitere Studien uber das Warmegleichgewicht unter Gas-molekullen. *Wissenschaftliche Abhandlungen*, 2012, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 316-402.
4. Clausius R. On a mechanical theorem applicable to heat. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1870, vol. 40, pp. 122-127.
5. Dionisio A., Menezes R., Mendes D.A. An econophysics approach to analyze uncertainty in financial markets: an application to the Portuguese stock market. *The European Physical Journal*, 2006, vol. 50, pp. 161-164.
6. Endovitsky D.A., Davnis V.V., Korotkikh V.V. Adaptive Trend Decomposition Method in Financial Time Series Analysis. *The Journal of Social Sciences Research*, 2018, no. S3, pp. 104-109.
7. Endovitsky D.A., Davnis V.V., Korotkikh V.V. On Two Hypotheses in Economic Analysis of Stochastic Processes. *Journal of Advanced Research in Law and Economics*, 2017, vol. 8, no. 8, pp. 2391-2398.
8. Erdos P., Ormos M. Return calculation methodology: Evidence from the Hungarian mutual fund industry. *Acta Oeconomica*, 2009, vol. 59, pp. 391-409.
9. Erdos P., Ormos M., Zibriczky D. Non-parametric and semi-parametric asset pricing. *Economic Modelling*, 2011, vol. 28, pp. 1150-1162.
10. Freedman D., Diaconis P. On the histogram as a density estimator: L2 theory. *Probability theory and related fields*, 1981,

vol. 57, pp. 453-476.

11. Hardle W. et al. *Nonparametric and semiparametric models*: Springer, 2004.

12. Jensen M.C. The performance of mutual funds in the period 1945-1964. *The Journal of Finance*, 1968, vol. 23, pp. 389-416.

13. Kirchner U., Zunckel C. *Measuring Portfolio Diversification*. arXiv preprint. 2011.

14. Maasoumi E., Racine J. Entropy and predictability of stock market returns. *Journal of Econometrics*, 2002, vol. 107, pp. 291-312.

15. Markowitz H.M. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 1952, vol. 7, pp. 77-91.

16. Nawrocki D.N., Harding W.H. State-value weighted entropy as a measure of investment risk. *Applied Economics*, 1986, vol. 18, pp. 411-419.

17. Ormos M., Zibriczky D. Entropy-Based Financial Asset Pricing. *PLoS ONE*, 2014, vol. 9(12).

18. Philippatos G.C., Wilson C.J. Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios. *Applied Economics*, 1972, vol. 4, pp. 209-220.

19. Renyi A. On Measures of Entropy and Information. *Fourth Berkeley Symposium*

on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley, Calif. University of California Press, 1961, pp. 547-561.

20. Scott D.W. On optimal and data-based histograms. *Biometrika*, 1979, vol. 66, pp. 605-610.

21. Shannon C.E. A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, 1948, vol. 27, pp. 379-423.

22. Sharpe W.F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 1964, vol. 19, pp. 425-442.

23. Silverman B.W. *Density estimation for statistics and data analysis*: CRC press. Monographs on Statistics and Applied Probability, 1986.

24. Turlach B.A. *Bandwidth selection in kernel density estimation: A review*. CORE and Institut de Statistique, 1993.

25. Wachowiak M.P., Smolikova R., Tourassi G.D., Elmaghraby A.S. Estimation of generalized entropies with sample spacing. *Pattern Analysis and Applications*, 2005, vol. 8, pp. 95-101.

26. Davnis V.V., Korotkikh V.V., Lukin I.A. Entropy Analysis in Portfolio Selection. *Modern Economics: Problems and Solutions*, 2018, no. 1 (97), pp. 20-35. (In Russ.)