УДК 336.781.5

ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ПРОЦЕССОВ НАКОПЛЕНИЯ КАПИТАЛА И ПОГАШЕНИЯ КРЕДИТА

Пронин Лев Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доц.

Санкт-Петербургский государственный экономический университет, ул. Садовая, 21, Санкт-Петербург, Россия, 191023; e-mail: lepronin@yandex.ru

Цель: в работе рассматриваются процессы непрерывного погашения кредита и непрерывного накопления капитала под непрерывный простой процент. Решается задача максимизации накопленной суммы на прямолинейных траекториях с ограничением общей суммы вкладов. Подобная задача – минимизации суммы платежей при погашении кредита – решалась в статье [9] на более широком классе траекторий. Обнаруживаются связи между процессами погашения кредита и накопления капитала. *Обсуждение*: особенностью работы является то, что процессы накопления и погашения рассматриваются как непрерывные, что облегчает их исследование с помощью простых и сложных непрерывных ставок. Кроме того, как и в предыдущих работах, предполагается, что деньги имеют как временную, так и безвременную стоимость. *Результаты*: показано, что обе задачи могут быть представлены в виде задач линейного программирования и могут решаться также и симплекс-методом. Для обеих задач строятся двойственные по отношению к ним. Выясняется экономический смысл их решений. Как показывают примеры, результаты работы могут быть легко переведены в практическую плоскость.

Ключевые слова: финансовые потоки, траектории, экстремали, процентная ставка, накопление капитала, погашение кредита, двойственность.

DOI: 10.17308/meps.2020.5/2361

Введение

В данной статье, так же как и в работах автора [7-10], подтверждается полезность применения непрерывных методов для исследования финансовых операций. На практике платежи могут совершаться настолько часто, что они фактически сливаются в непрерывный поток. Моделирование дискретного потока непрерывным позволяет, во-первых, применять к нему непрерывные простые и непрерывные сложные ставки и, во-вторых, использовать в полной мере аппарат математического анализа. В данной работе применяются также методы линейного программирования и теории двойственности, изложенные в [4] и [6]. Общие правила выполнения финансовых операций, использованные в статье, можно найти в работах [1], [2], [3], [5], [11], [12].

Задачи. Рассмотрим две задачи оптимизации.

1) Задача минимизации номинальной суммы платежей, которые поступают по линейному закону с плотностью $a(t) = \alpha + \beta t$, для погашения кредита K_0, выданного на срок T под непрерывную простую процентную ставку p. Математическая формулировка (1) задачи:

$$\begin{cases} S(\propto;\beta) = \int_0^T (\alpha + \beta t)dt \to min \\ \int_0^T (\alpha + \beta t)\big(1 + p(T-t)\big)dt \geq K_0(1+pT) = K_T \\ \alpha + \beta t \geq 0;\ 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (1)$$

Эта задача была рассмотрена в статье [9] на более широком классе степенных траекторий. Результаты:

$$\alpha^* = \frac{6K_0(1+pT)}{T(3+2pT)};\ \beta^* = -\frac{6K_0(1+pT)}{T^2(3+2pT)};\ S^* = \frac{3K_0(1+pT)}{3+2pT}. \quad (2)$$

При этом оптимальная траектория $a^*(t) = \propto^* + \beta^* t$ проходит через точку *(T; 0)*. В частности, из (2) следует, что первоначальная плотность платежей может быть снижена за счет увеличения срока *T*, и что оптимальная номинальная сумма платежей не может превосходить величину кредита более чем в 1,5 раза при любых сроках и ставках. Более подробный анализ был проведен в работе [9].

Покажем, что эта задача может быть представлена в виде задачи линейного программирования относительно переменных *α* и *β*. Действительно, после интегрирования в формулах (1) получаем:

$$\begin{cases} S(\alpha;\beta) = \alpha T + \beta\frac{T^2}{2} \to min \\ \alpha T\left(1 + \frac{pT}{2}\right) + \beta T^2\left(\frac{1}{2} + \frac{pT}{6}\right) \geq K_T \\ \alpha + \beta T \geq 0 \\ \alpha \geq 0 \\ \beta \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Кстати, ее решение симплекс-методом приводит к тем же результатам.

Составим двойственную к ней задачу максимизации с целевой функцией $f(x_1; x_2)$.

$$\begin{cases} f(x_1;x_2) = x_1 K_T \to max \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ T\left(1 + \frac{pT}{2}\right)x_1 + x_2 \leq T \\ T^2\left(\frac{1}{2} + \frac{pT}{6}\right)x_1 + Tx_2 \geq \frac{T^2}{2} \end{cases} \quad (4)$$

В силу основного равенства теории двойственности из (2) и (4) вытекает:

$$\frac{3K_0(1+pT)}{3+2pT} = x_1^* K_T. \qquad (5)$$

Отсюда выводим значение эффективности ресурса K_T:

$$x_1^* = \frac{3K_0}{3+2pT}. \qquad (6)$$

Ее величина показывает, на сколько единиц изменяется сумма платежей при изменении K_T на единицу. Значение параметра α^* приобретает тогда смысл эффективности ресурса времени. Нетрудно получить и значение x_2^*.

2) Задача максимизации конечной суммы накоплений за срок *T* по простой ставке *p*, если взносы поступают по линейному закону с плотностью $b(t) = \gamma + \delta t$, и их общая номинальная сумма ограничена величиной *B*. Функцию плотности мы будем называть также траекторией накопления.

Математическая формулировка (7) задачи:

$$\begin{cases} R(\gamma;\delta) = \int_0^T (\gamma + \delta t)\big(1 + p(T-t)\big)dt \to max \\ \int_o^T (\gamma + \delta t)\, dt = B \\ \gamma + \delta t \ge 0; 0 \le t \le T \end{cases} \qquad (7)$$

После интегрирования в (7) вновь получается задача линейного программирования:

$$\begin{cases} R(\gamma;\delta) = \gamma T\left(1 + \frac{pT}{2}\right) + \delta T^2\left(\frac{1}{2} + \frac{pT}{6}\right) \to max \\ \gamma T + \delta \frac{T^2}{2} = B \\ \gamma \ge 0 \\ \text{г} + \delta T \ge 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Кстати, как станет понятно ниже, знак равенства в первом ограничении (8) можно заменить на « ≤ » и определить знак второй переменной: $\delta \le 0$. Эту задачу можно решать либо симплекс-методом, либо, что проще, по образцу статьи [9] средствами математического анализа.

Сводим задачу к функции одной переменной:

$$\delta = \frac{2(B-\gamma T)}{T^2}; R(\gamma) = B + \frac{BpT}{3} + \gamma\frac{pT^2}{6} \to max. \qquad (9)$$

Очевидно, производная $\frac{dR}{d\gamma} = \frac{pT^2}{6}$ положительна. Отсюда следует, что сумма накоплений растет с ростом параметра γ. Так как по условию (7) площадь под траекторией остается неизменной и равной *B*, делаем вывод, что наибольшая величина суммы накоплений достигается, когда правый конец траектории проходит через точку *(T:0)*, т. е. должно выполняться условие $\gamma + \delta T = 0$ (см. рис.).

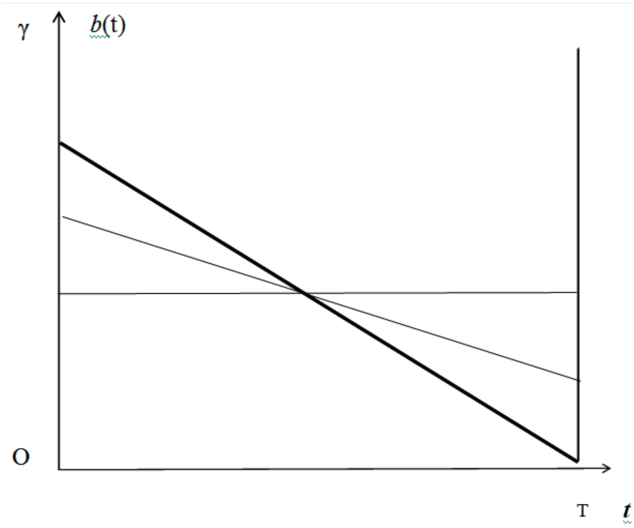

Рис. Линейные траектории накопления

Здесь толстая линия изображает экстремаль. Тонкие линии изображают промежуточные плотности.

Теперь нетрудно получить решение задачи:

$$\gamma^* = \frac{2B}{T}; \;\; \delta^* = -\frac{2B}{T^2}; \;\; R^* = B(1 + \frac{2pT}{3}). \qquad (10)$$

Составим двойственную задачу минимизации с целевой функцией $g(y_1; y_2)$:

$$\begin{cases} g(y_1; y_2) = By_1 \to min \\ y_1 \le 0 \\ y_2 \ge 0 \\ Ty_1 + y_2 \ge T\left(1 + \frac{pT}{2}\right) \\ \frac{T^2}{2} y_1 + Ty_2 \le T^2 (\frac{1}{2} + \frac{pT}{6}) \end{cases} \qquad (11)$$

Используя (10), (11) и основное равенство двойственности: $By_1^* = B(1 + \frac{2pT}{3})$, находим эффективность ресурса *B*:

$$y_1^* = 1 + \frac{2pT}{3}. \qquad (12)$$

Понятно, что обе исходные задачи (3) и (8) (погашения и накопления) не являются двойственными в классическом определении. Однако некоторые свойства двойственности проявляются. Так, если положить, что

$$S(\alpha^*; \beta^*) = R(\gamma^*; \delta^*) \text{ т. е. } \frac{3K_0(1+pT)}{3+2pT} = B\left(\frac{3+2pT}{3}\right), \qquad (13)$$

то, очевидно, выполняется основное неравенство:

$$R(\gamma; \delta) \le S(\alpha; \beta) \qquad (14)$$

для любых допустимых *α, β, γ, δ*. Заметим, что этот вывод верен, и если ставки и сроки накопления и погашения различаются.

На самом деле, процесс погашения кредита можно условно рассматривать, как процесс накопления к концу срока суммы, погашающей кредит. Воспользуемся результатами (2) первой задачи и положим во второй задаче (8):

$$B = S^* = \frac{3K_0(1+pT)}{3+2pT}, \tag{15}$$

т. е. возьмем минимальную сумму, необходимую для накопления погашающей суммы K_T. Именно эта сумма является максимальной во второй задаче, т. к. в силу (10) и (15),

$$R^* = B\left(1+\frac{2pT}{3}\right) = \frac{3K_0(1+pT)}{3+2pT}\left(1+\frac{2pT}{3}\right) = K_T. \tag{16}$$

Приведем пример возможного применения полученных результатов.

Допустим, что мы планируем через 5 лет открыть дело, для чего понадобится К= 1000000 рублей. Рассчитываем на льготный вклад с возможностью пополнения по ставке $p = 10\%$ годовых со сроком накопления $T = 5$ *лет.* Используем линейную траекторию накопления. Сумму 1 млн рублей можно условно рассматривать как максимально возможную. Тогда, согласно полученным результатам, минимальная номинальная сумма вкладов составит:

$$B = \frac{3K}{3+2pT} = \frac{3\cdot 1000000}{4} = 750000 \text{ руб.}$$

Если бы мы захотели открыть дело немедленно и взяли кредит в 1 млн руб. на тех же условиях, то к концу срока мы истратили бы на его погашение минимально возможную сумму в 1125000 руб. «Плата» за досрочное открытие дела, таким образом, составит 375000 руб. К тому же процентная ставка кредита обычно значительно выше ставки по вкладам. Кроме того, параллельное инвестирование кредита и его погашение несет повышенные риски. Заметим, что в работе [8] было показано, что инвестиционный проект, начинающийся с кредита, является неустойчивым.

Как это принято на практике, составим дискретный план накопления, используя уравнение экстремали:

$$b^*(t) = \frac{2B}{T} - \frac{2B}{T^2}\text{t} = 300000 - 60000\,\text{t}.$$

Будем полагать для краткости, что вклады совершаются один раз в год и в середине каждого года. Тем же способом мы могли бы составить и помесячный план

Таблица

План накопления капитала

Дата вклада	Срок наращения, лет	Величина вклада, руб.	Процент наращения	Конечная стоимость, руб.
Середина 1-го года	4,5	270000	45%	381500
Середина 2-го года	3,5	210000	35%	283500
Середина 3-го года	2,5	150000	25%	187500
Середина 4-го года	1,5	90000	15%	109500
Середина 5-го года	0,5	30000	5%	45000
Итого	-	750000	-	1000000

Очевидным недостатком накопления по экстремальной траектории является неравномерность размеров взносов. Большая часть суммы взносов приходится на первую половину срока накопления. Первоначальную плотность платежей можно уменьшить за счет увеличения срока, что не всегда приемлемо. На практике не обязателен выбор именно экстремальной траектории. Важна свобода выбора траектории наиболее согласованной с возможностями. И во многих случаях выбранная траектория будет более выгодной, чем общепринятая система равномерных платежей.

Подведем итоги. С помощью непрерывных потоков и непрерывных ставок можно планировать многие финансовые операции, заменяя затем для применения на практике непрерывный поток дискретным (как это было показано в примере). Данная методика позволяет получать также качественные результаты. По-видимому, непрерывные потоки доходных и расходных платежей и применяемые к ним непрерывные процентные ставки могут быть использованы и при изучении инвестиционных проектов.

Список источников

1. Блау С.Л. *Финансовая математика*: учебник. Москва, Академия, 2017.
2. Бочаров П.П. *Финансовая математика*: учебник. Москва, Физматлит, 2007.
3. Брусов П.Н., Филатова Т.В., Орехова Н.П. *Справочник по финансовой математике:* учеб. пособие. Москва, ИНФРА-М, 2014.
4. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. *Высшая математика. Математическое программирование*: учебник. Под общ. ред. А.В. Кузнецова. Минск, Выш. шк., 1994.
5. Малыхин В.И. *Финансовая математика*: учебник. Москва, Ленанд, 2017.
6. Пинскер А.Г., Брыжина Э.Ф. *Основы математического программирования*. Ленинград, Издательство ЛГУ, 1974.
7. Пронин Л.Н. О непрерывных финансовых потоках погашения кредита, выданного под сложный процент // *Современная экономика: проблемы и решения*. Воронеж, ВГУ, no. 8 (92), 2017.
8. Пронин Л.Н. Устойчивость инвестиционных проектов // *Вестник ИНЖЭКОНа. Серия: Экономика*. СПб, СПбГИЭУ, 2004, вып. 4(5), с. 144-149.
9. Пронин Л.Н., Рожков Ю.С. О непрерывных финансовых потоках погашения кредита, выданного под простой про-

цент // *Научный журнал «EDUCATIO»*. no. 3(10), ч. 2, с. 21-25. Новосибирск, 2015.

10. Пронин Л.Н., Рожков Ю.С. Об оптимизации равномерных финансовых потоков накопления капитала и погашения кредитов // *Вестник СПбГЭУ. Серия: Экономика*. СПб, СПбГЭУ, 2014, вып. 2 (69), с. 84-88.

11. Саркисов А.С. *Финансовая математика: теория процентов*. Москва, Ленанд, 2019.

12. Четыркин Е.М. *Финансовая математика*: учебник. Москва, ИД Дело, РАНХиГС, 2011.

DUAL TASKS OF CAPITAL ACCUMULATION PROCESSES AND LOAN REPAYMENT

Pronin Lev Nikolaevich, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

Saint-Petersburg State University of Economics, Sadovaya st., 21, St.-Petersburg, Russia, 191023; e-mail: lepronin@yandex.ru

Purpose: the paper deals with the processes of continuous repayment of the loan and continuous accumulation of capital at a continuous simple interest. The problem of maximizing the accumulated amount on straight trajectories with the limitation of the total amount of deposits is solved. A similar problem – minimizing the amount of payments when repaying the loan, was solved in the article [9] on a wider class of trajectories. There are connections between the processes of loan repayment and capital accumulation. *Discussion*: the peculiarity of the work is that the processes of accumulation and repayment are considered as continuous, which makes it easier to study them using simple and complex continuous rates. In addition, as in previous works, it is assumed that money has both temporary and timeless value. *Results*: it is shown that both problems can be represented as linear programming problems and can also be solved by the simplex method. For both problems are constructed dual in relation to them. It turns out the economic meaning of their decisions. As the examples show, the results of the work can be easily translated into practical terms.

Keywords: financial flows, trajectories, extremes, interest rate, capital accumulation, loan repayment, duality.

References

1. Blau S.L. *Financial mathematics*: textbook. Moscow, Academia, 2017. (In Russ.)
2. Bocharov P.P. *Financial mathematics*: textbook. Moscow, Fizmatlit, 2007. (In Russ.)
3. Brusov P.N., Filatova T.V., Orehova N.P. *Handbook of financial mathematics*: textbook. Stipend. Moscow, INFRA-M, 2014. (In Russ.)
4. Kuznescov A.V., Sakovich V.A., Holod N.I. H*igher mathematics. Mathematical programming*: textbook. Minsk, Vyshejshaya School, 1994.
5. Malykhin V.I. *Financial mathematics*: textbook. Moscow, Lenand, 2017. (In Russ.)
6. Pinsker A.G., Bryszyna E.F. *Fundamentals of mathematical programming*. Leningrad, LGU, 1974. (In Russ.)
7. Pronin L.N. On continuous financial flows repayment of the loan under a complex percentage. *Modern economy: problems and solutions*, Voronezh, 2017, no. 8(92), pp. 18-32. (In Russ.)
8. Pronin L.N. Sustainability of investment projects // *SPbSUE: Journal of ENGECON. Series: Economics*. St.-Petersburg, 2004, no. 4(5), pp. 144-149. (In Russ.)
9. Pronin L.N., Rozhkov Yu.S. On continuous financial flows repayment of the loan under a simple percentage. *Journal «EDUCATIO»*. Novosibirsk, 2015, no. 3(10), part 2, pp. 21-25. (In Russ.)
10. Pronin L.N., Rozhkov Yu.S. On the optimization of the flows of capital accumulation and redemption of loans. *SPbSUE Journal*. Series: Economics.

St.-Petersburg, 2014, no. 2(69), pp. 84-88. (In Russ.)

11. Sarkisov A.S. *Financial mathematics. The theory of interest*. Moscow, Lenand, 2019. (In Russ.)

12. Chetyrkin E.M. Financial mathematics: textbook. Moscow, ID Delo RANEPA, 2011. (In Russ.)