УДК 336.767

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С ПОМОЩЬЮ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ С ВРЕМЕННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ (CTAR)

Светуньков Сергей Геннадьевич, д-р экон. наук, проф.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, ул. Политехническая, 29, Санкт-Петербург, Россия, 195251; e-mail: sergey@svetunkov.ru

Цель: статья, подготовленная по результатам гранта РФФИ № 19-010-00610/19 «Теория, методы и методики прогнозирования экономического развития авторегрессионными моделями комплексных переменных», посвящена вопросам моделирования и прогнозирования экономической динамики с помощью методов комплекснозначной экономики. *Обсуждение*: в современном экономическом прогнозировании активно используют модели авторегрессии. Поскольку довольно часто речь идет о прогнозировании системы показателей, то используют векторную авторегрессию. Промежуточное положение между простой авторегрессией и векторной авторегрессией занимает комплексная авторегрессия. Свойства комплексной авторегрессии, у которой одна из составляющих является показателем времени, обсуждаются в этой статье. *Результаты*: автором предложена новая модель для кратко- и среднесрочного прогнозирования, обладающая новыми свойствами, отличающими ее от других авторегрессионных моделей. Она может быть включена в арсенал инструментария современной экономической прогностики.

Ключевые слова: комплекснозначная экономика, комплексная авторегрессия, экономическое прогнозирование.

DOI: 10.17308/meps.2020.9/2427

Введение

Задачи экономического прогнозирования весьма разнообразны и многочисленны. Они касаются как различных задач макроуровня [6, 7], так и частных задач микроуровня [4]. Это предопределяет направление научных исследований в направлении расширения методов и моделей экономического прогнозирования. Одной из интересных сфер расширения инструментальной базы современной экономической прогностики является применение для этого моделей и методов теории функций комплексной переменной [5]. Одной из проблем, сдерживающих развитие комплекснозначной экономики, является слабая проработка статистического инструментария обработки комплексной случайной переменной [8, 9, 10, 12]. Вызвано это тем, что в основе математической статистики комплексной случайной величины лежит предположение о том, дисперсия этой величины должна быть вещественной [11]. Доказательство неверности этого предположения позволило устранить главную проблему и получить инструментарий для использования комплекснозначной экономики в полную мощь [1].

Уже несколько десятилетий для краткосрочного прогнозирования экономических показателей экономисты используют авторегрессионные модели (AR) и их разновидности, к которым относят модели экспоненциального сглаживания (ES) и скользящей средней (MA). Их различное сочетание позволяет получить разные модели прогнозирования, которые в некоторых случаях точнее прогнозируют экономическую динамику, нежели исходные модели. Так, например, одной из самых популярных моделей в экономическом прогнозировании является модель ARIMA – модель синтеза авторегрессии (AR) и скользящей средней (MA) в приращениях.

Цифровизация научного процесса вооружила экономистов новой высокопроизводительной вычислительной техникой и новыми программными продуктами, позволяющими с минимальными затратами сил и времени решать сложные статистические задачи. Это привело к появлению в экономической прогностике работ, в которых предлагаются новые модели прогнозирования и в последнее время все чаще встречаются попытки использования вместо прогнозных моделей типа ARIMA векторные авторегрессии (VAR) [2, 3, 4].

Рассмотрим суть этих моделей прогнозирования на простейшем случае – двумерном векторе. Для вектора, который состоит всего из двух переменных, модель VAR может быть представима в такой форме:

$$\begin{vmatrix} y_{rt+\tau} \\ y_{it+\tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{rt} \\ y_{it} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Для того чтобы использовать модель VAR в экономическом прогнозировании, исследователю необходимо найти четыре неизвестных коэффициента. Делается это чаще всего с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Но если прогнозист захочет увеличить число прогнозируемых с помощью VAR показателей, например, до трех взаимосвязанных переменных, ему необходимо будет оценить значения девяти неизвестных коэффициентов. Легко заметить, что количество неизвестных коэффициентов векторных авторегрессий будет равно n2, где n – число переменных в векторной авторегрессии. То есть по мере увеличения размера векторной авторегрессии вычислительные сложности нелинейно возрастают. Именно это ограничивает применение векторных авторегрессий на практике. И здесь в качестве «палочки-выручалочки» выступает комплекснозначная экономика, с помощью которой можно использовать комплексные авторегрессии [4].

$$y_{rt+\tau} + iy_{it+\tau} = (a_0 + ia_1)(y_{rt} + iy_{it}). \qquad (2)$$

В векторной форме комплексная авторегрессия может быть записана так:

$$\begin{vmatrix} y_{rt+\tau} \\ y_{it+\tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{rt} \\ y_{it} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Легко заметить, что для использования комплексной авторегрессии необходимо оценить только два коэффициента модели, то есть число оцениваемых коэффициентов этой модели в два раза меньше, чем у модели векторной авторегрессии. Это является важным преимуществом комплексной авторегрессии.

Мы не будем рассматривать векторные авторегрессии разного порядка, а обратим внимание на комплекснозначные авторегрессии, как малоизученный класс моделей прогнозирования. Новой моделью из этого ряда будет являться комплексная авторегрессионная модель, в которой одной из факторных, а следовательно, и вычисляемых переменных, является время:

$$y_{t+\tau} + i(t+\tau) = (a_0 + ia_1)(y_t + it). \qquad (4)$$

Здесь τ – прогнозный период, характеризующий лаг авторегрессии.

Назовем эту модель, как это принято в современной прогностике, по заглавным буквам – CTAR. Свойства этой модели являются объектом исследования данной научной статьи.

Методология исследования

Прежде всего обратим внимание на то, что в модели (4) прогнозируется не только экономический показатель y_t, но и период прогноза τ. В моделях авторегрессии время выступает как индекс упорядочивания показателей, но не как активный элемент, учитываемый в прогнозировании. В модели (4) время выступает и как определяющий фактор, и как зависимая переменная. Это совершенно новое свойство у прогнозной модели, и этому свойству следует уделить особое внимание.

Известно, что любая комплекснозначная функция может быть представима как система двух действительных функций – для вещественной и мнимой частей комплекснозначной функции. Применительно к модели (4) это свойство будет записано так:

$$\begin{cases} \hat{y}_{t+\tau} = a_0 y_t - a_1 t, \\ (\widehat{t+\tau}) = a_0 t + a_1 y_t. \end{cases} \qquad (5)$$

В левой части системы показано, что некоторые расчетные величины получаются как регрессии от показателя, наблюдаемого в настоящий момент времени и само значение времени. Первое уравнение системы (5) представляет собой ординарную двухфакторную регрессию, переменными которой являются сам показатель и время, в которое этот показатель наблюдался. А вот второе уравнение является чрезвычайно интересным – прогнозный интервал $(\widehat{t+\tau})$ в нем определяется как зависимость от текущего времени t и значения прогнозируемого показателя в предшествующий момент времени y_t. На первый взгляд, это кажется невероятным – время, которое представляется нам объективной шкалой отсчета, становится вдруг, как в теории относительности Эйнштейна, нелинейным. На самом деле это не так. Речь ведь идет о системе, в которой одновременно вычисляются два элемента – сам показатель и соответствующее ему время $(t \hat{+} \tau)$, при наступлении которого показатель примет это значение. Если рассматривать комплексную плоскость, по горизонтальной оси которой располагаются действительные значения показателя, а по вертикальной оси – мнимая составляющая, к которой отнесено время, то любое комплексное число y_t+it, будет представлять собой точку на этой комплексной плоскости, а ее координатами будут y_t и t. Поэтому, вычисляя комплексное число y_t+it, мы просто определяем местоположение точки на плоскости. Ничего сакрального.

Второе важное замечание, которое следует сделать относительно второго уравнения системы (5), это то, что прогнозируемое время, при котором исследуемый показатель принимает значение $y_{t+\tau}$, оказывается нецелым.

Действительно, второе уравнение системы (5) может быть представлено так:

$$\hat{\tau} = (a_0 - 1)t + a_1 y_t \,. \qquad (6)$$

Отсюда со всей очевидностью следует, что целочисленным период прогноза τ может быть в чрезвычайно редких случаях, например, в случае, когда все составляющие правой части равенства (6) являются целыми. Получить с помощью МНК по статистическим данным целые значения двух коэффициентов регрессии – это большая редкость. Значительно чаще мы будем сталкиваться с тем, что τ будет нецелым. Это означает, что модель (4) обладает новыми свойствами, которые до сих пор не встречались у других прогнозных моделей.

Сделаем одно важное отступление, указав на любопытное свойство модели CTAR (4), на котором из-за отсутствия возможности мы не будем подробно останавливаться. Это свойство можно заметить, если представить модель CTAR в такой форме:

$$[y_{t+\tau} + i(t+\tau)] - (y_t + it) = [(a_0 + ia_1) - (1+i)](y_t + it) \,. \qquad (7)$$

Период τ есть не что иное, как некоторое приращение времени, которое можно так и записать $\tau=\Delta t$. Отсюда получим знакомую и удобную для дальнейшего исследования форму записи:

$$(y_{t+\Delta t} - y_t) + i\Delta t = [(a_0 + ia_1) - (1+i)](y_t + it) \,. \qquad (8)$$

Или:

$$\frac{\Delta y_t}{\Delta t} + i = [(a_0 + ia_1) - (1+i)]\frac{(y_t + it)}{\Delta t} \,. \qquad (9)$$

И в том случае, когда $\lim \Delta t \to 0$ можно получить из модели CTAR дифференциальное уравнение, которое можно использовать в самых разных целях моделирования экономической динамики в непрерывном времени. И в том числе можно подобную модель подставлять в модели экономической динамики с непрерывным временем типа Солоу. Мы не будем останавливаться на этом вопросе, поскольку он требует дополнительных исследований, выходящих за рамки данной статьи. Просто заметим такую возможность, которая открывается при использовании в экономическом прогнозировании и моделировании модели CTAR. Вернемся к авторегрессии CTAR (4), рассматривая ее как модель для экономического прогнозирования.

Для использования этой модели в прогнозировании необходимо найти значения комплексного коэффициента авторегрессии. Чтобы получить искомые значения, следует использовать метод наименьших квадратов, разработанный для комплексной случайной переменной [4]. Применительно к рассматриваемому случаю он сводится к необходимости решения простого уравнения [1]

$$\sum_t (y_{t+\tau} + i(t+\tau))(y_t + it) = (a_0 + ia_1)\sum_t (y_t + it)^2 \tag{10}$$

относительно неизвестного комплексного коэффициента пропорциональности (a_0+ia_1).

Здесь τ – целое число, означающее лаг комплексной авторегрессии или же период, на который выполняется прогноз.

После вычисления комплексного коэффициента авторегрессии на имеющихся данных можно подставить его расчетное значение в (4) и выполнить необходимые действия.

Поскольку, как было ранее показано, расчетное значение $(t \hat{+} \tau)$ чаще всего будет нецелым, то возникает проблема интерпретации ситуации нецелого лага и использования прогнозного комплексного показателя на практике.

Как правило, экономические показатели, из которых формируются временные ряды, наблюдаются в дискретном времени и между ними имеются равные временные промежутки, чаще всего равные единице. Нецелое значение лага (периода прогноза) τ означает, что вычисляется показатель, лежащий внутри равномерного интервала. Для использования полученных расчетных значений в целях экономического прогнозирования необходимо вычислить прогнозное значение для целого, а не для дробного момента времени. Здесь можно использовать довольно простую процедуру.

Например, пусть с использованием CTAR получено такое прогнозное значение:

$$\hat{y}_{t+\tau} + i(t \hat{+} \tau) = 237{,}12 + i2025{,}73\,.$$

Прогноз выполнялся на 2025 год, но время оказалось нецелым. Как поступить в этом случае? Как получить прогноз на 2025 год, используя эти расчетные значения? Самый простой вариант решения этой задачи таков:

$$\hat{y}_{t+\tau} + i\,(t \hat{+} \tau) = \frac{237{,}12 + i2025{,}73}{2025{,}73\,/\,2025} = 237{,}03 + i2025\,.$$

Таким образом, на 2025 год прогнозируется величина показателя, равная 237,03.

Теперь видно, что модель (4) может использоваться не только в непрерывном времени (9), но и в дискретном времени с целыми числами.

Обсуждение результатов

Поскольку мы исследуем свойства прогнозной модели, впервые вводимой в научный оборот, вполне естественно ожидать, что возникнет ряд менее принципиальных проблем, которые необходимо решить.

Первая из них связана именно с нецелым значением прогнозирования времени. Только что продемонстрированный метод «доведения» расчетных значений дробного лага до целых значений имеет недостаток, устранение которого требует дополнительных исследований, а именно – различные значения прогнозных показателей в том случае, когда приведение к целым значениям времени происходит от большего или от меньшего чисел, внутри которых находится расчетное значение. Эту проблему продемонстрируем на том же примере, который рассматривали ранее.

Пусть с помощью модели CTAR были получены такие прогнозы на 2024 и 2025 годы: для 2024 г. получено *(229,01+i2024,66)*, а для 2025 г. получено *(237,12+i2025,73)*.

Мы ранее воспользовались вторым числом для вычисления прогнозного значения показателя для 2025 года. Было получено значение, равное 237,03. Но ведь второе комплексное число содержит расчетное значение года, равное 2025,73. А это ближе к 2026. Первое комплексное число из этих двух пар содержит расчетный год, равный 2024,66, и это расчетное значение ближе к 2025, чем расчетное число 2025,73. Поэтому можно воспользоваться расчетным комплексным числом для получения прогноза на 2025 год. Получим:

$$\hat{y}_{t+\tau} + i\,(t \hat{+} \tau) = \frac{229{,}10 + i2024{,}66}{2024{,}66\,/\,2025} = 229{,}04 + i2025\,.$$

Значит, прогнозное значение должно быть равно 229,04, что отличается от ранее полученного значения 237,03. Это явление требует своего осмысления. Возможно, что так мы получаем новый подход к оцениванию прогнозных границ и можем утверждать о том, что прогнозное значение исследуемого показателя лежит в пределах от 229,04 до 237,03. Но эта гипотеза требует своего тщательного исследования.

Вторая проблема заключается в необходимости понимания того, какой именно процесс, какой тип динамики описывает модель CTAR. Для ответа на этот вопрос необходимо сравнить свойства CTAR (4) с простой авторегрессией AR:

$$y_{t+\tau} = a y_t\,. \tag{11}$$

Как следует из (5), действительная часть комплекснозначной временной авторегрессии CTAR существенно изменяет свойства модели по сравнению с AR, придавая ей дополнительную нелинейность:

$$y_{t+\tau} = a_0 y_t - a_1 t \,. \tag{12}$$

Для оценки степени этой нелинейности используем следующую процедуру. Из модели CTAR (4) можно легко вычислить коэффициент авторегрессии, если есть два соответствующих значения моделируемого показателя:

$$(a_0 + ia_1) = \frac{y_{t+\tau} + i(t+\tau)}{(y_t + it)} \,. \tag{13}$$

Точно также можно вычислить и коэффициент простой авторегрессии (11):

$$a = \frac{y_{t+\tau}}{y_t} \,. \tag{14}$$

Зная это, можно, например, задать некоторую постоянную величину комплексного коэффициента авторегрессии *$(a_0+ia_1)=const$* и сгенерировать с помощью CTAR (4) ряд значений y_t, а затем для этого сгенерированного ряда с помощью (14) вычислять изменение коэффициента действительной авторегрессии на каждом шаге. Как показали модельные расчеты, коэффициент авторегрессии (14) будет меняться со временем по экспоненте.

Если теперь в действительной авторегрессии AR (11) использовать постоянное значение коэффициента пропорциональности *$a=const$*, то сгенерированный ряд, подвергнутый обработке комплексной авторегрессии CTAR, будет давать нелинейное и немонотонное изменение действительной и мнимой части комплексного коэффициента авторегрессии (13).

Из этого следует, что модели комплекснозначной временной авторегрессии CTAR и действительной авторегрессии AR описывают отличающуюся друг от друга динамику, а это означает, что модель CTAR выступает не альтернативой имеющимся моделям AR, а дополняет их, расширяя арсенал инструментов для экономического прогнозирования.

Заключение

Предложенная модель CTAR, как видно из вышеизложенного, обладает всеми свойствами, которые делают ее пригодными для моделирования экономической динамики. Поскольку в статье эта модель представлена впервые для использования ее в научном обороте, то не все ее свойства пока что удалось выявить и исследовать, а также не удалось пока что описать всевозможные варианты ее развития и применения. В статье только в тезисной форме показана возможность использования модели CTAR в непрерывном времени, хотя уже из имеющегося описания такой возможности видно, что с помощью этой модели можно получить самые разные варианты моделей экономической динамики. Представляется, что последующие теоретические исследования модели CTAR и проверка ее свойств на реальных данных позволят определить место и значимость этой прогнозной модели в экономическом прогнозировании.

Список источников

1. Светуньков С.Г. *Основы эконометрики комплексных переменных*. Санкт-Петербург, ООО Медиапапир, 2019.
2. Gelper S.E.C., Wilms I., Croux C. Identifying demand effects in a large network of product categories // *Journal of Retailing*, 2016, no. 92 (1), pp. 25-39.
3. Leeflang P. and Selva J. Cross-demand effects of price promotions // *Journal of Academy of Marketing Science*, 2012, no. 40(4), pp. 572-586.
4. Nuriddinova A.G. Development of Educational Complex as a Factor of Perfection of Labour Marketing // *The Conditions of Knowledge Economy. Proceedings of The 5th Uzbekistan-Indonesia International Joint Conference on Globalization, Economic Development, and Nation Character Building*, 2015, no. 10, pp. 29-30.
5. Svetunkov S. *Complex-Valued Modeling in Economics and Finance*. Springer Science+Business Media, New York, 2012.
6. Toroptsev E.L., Marahovski A.S., Duginsky R.R. Interdistribution Modeling of Transition Processes // *Economic Analysis: Theory and Practice*, 2020, vol. 19, iss. 3, pp. 564-585.
7. Toroptsev E.L., Marahovski A.S., Duginsky R.R. The Problem of Digitalizing a Dynamic Model of Inter-industry Balance // *Economic Analysis: Theory and Practice*, 2020, vol. 19, iss. 5, pp. 946-972.
8. Trampitsch S. *Complex-Valued Data Estimation Second-Order Statistics and Widely Linear Estimators. Masterarbeit*. Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, 2013.
9. Tuelay Adili, Schreier P.J., Scharf L.L. Complex-valued signal processing: The proper way to deal with impropriety // *In IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59(11), pp. 5101-5125, 2011.
10. Wilms Ines and Barbaglia, Christophe Luca and Croux. *Multi-Class Vector Autoregressive Models for Multi-Store Sales Data.* KU Leuven, Faculty of Economics and Business, 2016.
11. Wooding R.A. The multivariate distribution of complex normal variables // *Biometrika*, 1956, vol. 43, pp. 212-215.
12. Yanfei Jia, Xiaodong Yang. Adaptive Complex-Valued Independent Component Analysis Based on Second-Order Statistics // *Journal of Electrical and Computer Engineering*, vol. 2016, Article ID 2467198.

PREDICTION OF ECONOMIC DYNAMICS USING COMPLEX-VALUED AUTO-REGRESSION WITH A TIME COMPONENT (CTAR)

Svetun'kov Sergej Gennad'evich, Dr. Sc. (Econ.), Full Prof.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Politekhnicheskaya st., 29, St. Petersburg, Russia, 195251; e-mail: sergey@svetunkov.ru

Purpose: the article, prepared according to the results of the RFBR grant No. 19-010-00610 \ 19 «Theory, Methods, and Techniques of Forecasting Economic Development by Autoregressive Models of Complex Variables,» is devoted to the problems of modeling and forecasting economic dynamics using methods of complex-valued economics. *Discussion*: in modern economic forecasting, autoregressive models are actively used. Since quite often we are talking about predicting a system of indicators, vector autoregression is used. An intermediate position between simple autoregression and vector autoregression is integrated autoregression. The properties of complex autoregression, in which one of the components is an indicator of time, are discussed in this article. *Results*: the author has proposed a new model for short and medium-term forecasting, which has new properties that distinguish it from other autoregressive models. It can be included in the arsenal of tools of modern economic forecasting.

Keywords: complex variable economy, complex autoregression, economic forecasting.

References

1. Svetun'kov S.G. *Fundamentals of econometrics of complex variables*. Saint Petersburg, Mediapapir, 2019. (In Russ.)
2. Gelper S.E.C., Wilms I., Croux C. Identifying demand effects in a large network of product categories. *Journal of Retailing*, 2016, no. 92 (1), pp. 25-39.
3. Leeflang P. and Selva J. Cross-demand effects of price promotions. *Journal of Academy of Marketing Science*, 2012, no. 40 (4), pp. 572-586.
4. Nuriddinova A.G. Development of Educational Complex as A Factor of Perfection of Labour Marketing. *The Conditions of Knowledge. Economy Proceedings of The 5th Uzbekistan-Indonesia International Joint Conference on Globalization, Economic Development, and Nation Character Building*, 2015, pp. 29-30.
5. Svetun'kov S. *Complex-Valued Modeling in Economics and Finance*. Springer Science+Business Media, New York, 2012.
6. Toroptsev E.L., Marahovski A.S., Duginsky R.R. Interdistribution Modeling of Transition Processes. *Economic Analysis: Theory and Practice*, 2020, vol. 19, iss. 3, pp. 564-585.
7. Toroptsev E.L., Marahovski A.S., Duginsky R.R. The Problem of Digitalizing a Dynamic Model of Inter-industry Balance. *Economic Analysis: Theory and Practice*, 2020, vol. 19, iss. 5, pp. 946-972.
8. Trampitsch S. C*omplex-Valued Data Estimation Second-Order Statistics and Widely Linear Estimators. Masterarbeit.* Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, 2013.
9. Tuelay Adili, Schreier P.J., Scharf L.L.

Complex-valued signal processing: the proper way to deal with impropriety. *In IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, vol. 59 (11), pp. 5101-5125.

10. Wilms, Ines and Barbaglia, Luca and Croux, Christophe. *Multi-Class Vector Autoregressive Models for Multi-Store Sales Data*. KU Leuven, Faculty of Economics and Business, 2016.

11. Wooding R.A. The multivariate distribution of complex normal variables. *Biometrika*, 1956, vol. 43, pp. 212-215.

12. Yanfei Jia, Xiaodong Yang. Adaptive Complex-Valued Independent Component Analysis Based on Second-Order Statistics. *Journal of Electrical and Computer Engineering*, vol. 2016.