
ОСНОВАНИЕ ДИНАМИКИ РЫНОЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОМ ОПИСАНИИ НА СОВРЕМЕННЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ БИРЖАХ С ПОЗИЦИЙ ТЕОРИЙ ЦЕННОСТИ И ПОЛЕЗНОСТИ (ЧАСТЬ 2)

Левин Борис Аркадьевич, канд. экон. наук

ФГБУ информационно-аналитического центра (ИАЦ) ФАПРИД, ул. Гиляровского, 31, стр. 1, 2, Москва, Россия, 107996; e-mail: boris_levin_boris@mail.ru

Цель: в продолжение [9, 10] в статье осуществляется дальнейшее обоснование биржевых волн и их суперпозиции в процессах рыночного взаимодействия с учетом турбулентности в долговременном периоде на основе аналогии закономерности образования природных волн в различных средах. *Обсуждение:* мировую биржевую торговлю будут постоянно «лихорадить» финансовые и другие потрясения и неустойчивости [3]. В предыдущих материалах [9, 10] было доказано, что основная причина развивающихся биржевых кризисов – это естественное увеличение скоростей биржевого обмена типа «купли – продажи» акций или других аналогичных производных инструментов. Скорость обменных биржевых операций и процесс турбулентности привели к тому, что брокеры-трейдеры одновременно оказались в роли биржевых покупателей и биржевых продавцов. Возникли непредсказуемые ценовые изменения в виде дополнительных ценовых «скачков», вплоть до минусовых значений, которые привели к неуправляемым нарушениям устойчиво проявляемых ранее биржевых тенденций горизонтальных трендов. В результате происходят потери существенной части прибыли, что так часто приводит к неминуемому разорению трейдеров или брокеров. Поэтому продолжение моделирования биржевых процессов в условиях турбулентности в длительный период базировалась и на доказательстве происхождения и развития природно-возникающих волновых процессов. Обоснование природных процессов возникновения таких явлений и на биржах даст возможность моделировать и прогнозировать биржевые процессы при изменениях биржевой среды. *Результаты:* моделируются волновые процессы в условиях турбулентности при биржевых взаимодействиях в разных временных интервалах с учетом принципов экономической

динамики применением математической интерпретации классических теорий полезности и ценности товара. Доказывается природное единство происхождения и развития волновых процессов в различных средах, в т.ч. и волновые процессы, возникающие в биржевом пространстве в условиях турбулентности за счет воздействия колебательных движений во временном экономическом периоде, определяемом в результате влияния детерминант спроса или/и предложения на материализованную субстанцию, заполняемую акциями или другими производными инструментами. Это позволяет понять природу процессов, происходящих в рыночной среде при проявляемых в них ценовых турбулентностях, и получить новое научное обоснование их в пространственно-временном описании при изменении современных условий.

Ключевые слова: модель простейших биржевых торгов, рыночное взаимодействие в пространстве-времени, турбулентность на биржах, биржевые колебания цен, теория полезности, теории ценности, материализованная среда биржи, товарно-эфирная среда.

Первая часть статьи – в номере 7 за 2020 г.

DOI: 10.17308/meps.2020.11/2464

Введение

Кризисы мировой экономики в последнее время усугубляются различными экономическими санкциями между странами, а также мировой пандемией. Доказательством этого являются скачки на мировых биржах, часто слабо прогнозируемые и представленные только как свершившиеся рис. 1. Российский фондовый индекс РТС 23.01-13.09.2020 г. [3].

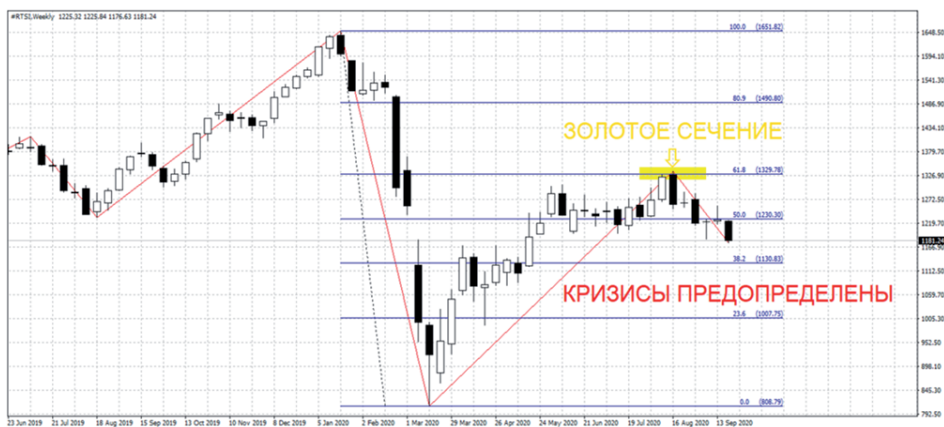


Рис. 1 [1]

В предыдущих материалах статей [14, 15] были представлены:

- (1) математическая модель рыночного-биржевого взаимодействия покупателей и продавцов в пространстве теории полезности с учетом вход-

ного возмущающего воздействия от торгов из пространства теории ценности, когда колебания от торгов передаются в другое пространство теории полезности посредством волновых движений материализованной среды, наполняемой акциями или другими производными инструментами. Рыночное взаимодействие спроса и предложения с учетом реакции от предшествующей процедуры торгов можно представить в виде математической модели: $m_X \cdot \frac{d^2 X}{dq^2} = -c \cdot X - \mu \cdot X' + A \cdot e^{-b \cdot q} \cdot \sin(k_1 \cdot q + \alpha)$, что соответствует решению в виде суммы двух гармонических колебаний: собственного X_1 и возмущающего X_2 , то есть $X = X_1 + X_2 = A_0 \cdot e^{-b \cdot t} \cdot \sin(k_2 \cdot q + \alpha) + A \cdot e^{-b \cdot q} \sin(k_1 \cdot q - \beta)$, в которых возмущающие колебания в зависимости от времени ($A \cdot \sin(k_1 \cdot q - \beta)$) существенно преобладают над собственными колебаниями системы ($A_0 \cdot e^{-b \cdot t} \cdot \sin(k_2 \cdot q + \alpha)$), что окончательно приводит к решению: $X = A \cdot e^{-b \cdot q} \sin(k_1 \cdot q - \beta)$, где амплитуда

$$A = A_0 \cdot e^{-b \cdot q} \cdot \sqrt{\frac{(1 - \sin^2 2\alpha)}{(k^2 - k_1^2) \cdot (1 - \sin 2\alpha) + 4b^2 \cdot k_1^2 \cdot (1 + \sin 2\alpha)}}$$

и начальная фаза $\text{tg} \beta = \frac{2b \cdot k_1 \cdot \cos \alpha + \sin \alpha}{k^2 - k_1^2 \cdot \cos \alpha - \sin \alpha}$ определяются по приведенным формулам;

(2) математическая модель рыночного взаимодействия спроса и предложения в кратковременном периоде с учетом: (1) переходящих из пространства теории ценности колебаний от торгов между покупателями и продавцами; (2) синергетической составляющей (статистически учитываемой гиперболическим распределением Ципфа – Парето в виде $(1/t^{0.5})$, свойственной природно-проявляемым явлениям искусственного интеллекта и пропорциональной величине градиента затухания, то есть $(1/t^{0.5}) \equiv (1/e^{b \cdot q})$). Тогда весь процесс от влияния торгов на рыночное взаимодействие в кратковременный период в целом представим модельным уравнением интегральной суммы $X_{TOPP} = \int_0^{\infty} A \cdot \frac{\sin(p \cdot t - \beta)}{t^{0.5}} \cdot dt$, а для вычисления определенного интеграла в пределах от нуля до бесконечности используется известное разложение подынтегральной функции в знакпеременный ряд¹. Тогда интегрирование приводит к известному интегралу типа Френеля². Образующие максимальные амплитудные значения создаваемых колебаний остаются постоянными при непрерывном уменьшении площадей последовательно образуемых полувольт.

¹ В.И. Смирнов. Курс высшей математики, Т.3. Ч.2: Изд-во «Наука». 1974.

² Таблицы интегралов Френеля: Изд-во Академии наук СССР. 1953, 272 с.

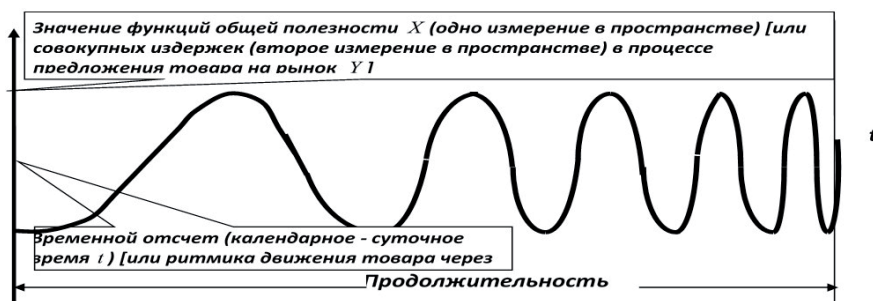


Рис. 2

Описанное свойство способствует (при возникшем условии сохранения амплитуды колебаний) существенному изменению частот колебательного процесса, чтобы выполнить определяемые в процессе интегрирования условия.

Математическое моделирование волновых процессов в биржевом пространстве при влиянии детерминант спроса/предложения во времени на материализованную субстанцию акций и других производных инструментов

Рассматриваемое рыночное взаимодействие (практически более явно выраженное) в долговременном периоде, возникающее в другом «пространстве-времени», которое существует параллельно и совместно с пространством – временем, что в модельном описании характеризуется совмещением координатных направлений: «общая полезность товара плюс совокупные издержки в процессе предложения товара на рынок», при котором временной отсчет реализуется путем традиционного календарно-суточного измерения (часы, минуты и т.д.). Одновременно в «пространстве-времени» справедливы положения и принципы теории полезности [1, 13] и поэтому проявляются общеизвестные законы спроса и предложения, установление закономерностей которых было бы невозможно без природной их устойчивости в сравнительно длительных временных лагах в масштабе измерения времени (календарного). Именно эти особенности и позволяют выявить колебательные (релаксационные) свойства, возникающие от попеременных воздействий детерминант то спроса, то предложения, что модельно соответствует практически параллельному переносу (перемещению на плоскости в простейшем случае) кривых спроса и соответственно предложения (в единой плоскости с минимум двумя координатными осями: (1) «общей полезности в соответствии с дифференциальными свойствами цен спроса (со знаком плюс) и одновременно совокупных издержек в соответствии с дифференциальным параметром цен предложения (со знаком минус)»; (2) временной отсчет реализуется отсчетом текущего (суточного) времени (рис. 3, 4).

Тогда при отсутствии силового динамического воздействия, что мо-

дельно реализуется дифференциальными уравнениями первого порядка, моделирование возможно осуществить в два этапа: (1) моделируется отдельно влияние детерминант спроса и соответственно предложения и (2) осуществляется идеализация процесса путем введения упорядоченного по времени воздействия спроса и далее предложения, а затем итеративного повторения воздействий во времени, поскольку [11] влияние детерминант или одной детерминанты спроса способствует далее стимуляции воздействия детерминант или одной детерминанты предложения, то есть процесс попеременно начинает проявлять причинно-следственные свойства с позиции попеременного влияния детерминант. Именно таким образом маржинализм и объясняет развитие производства. Последнее обстоятельство также характеризует процесс детерминантного влияния как циклический.

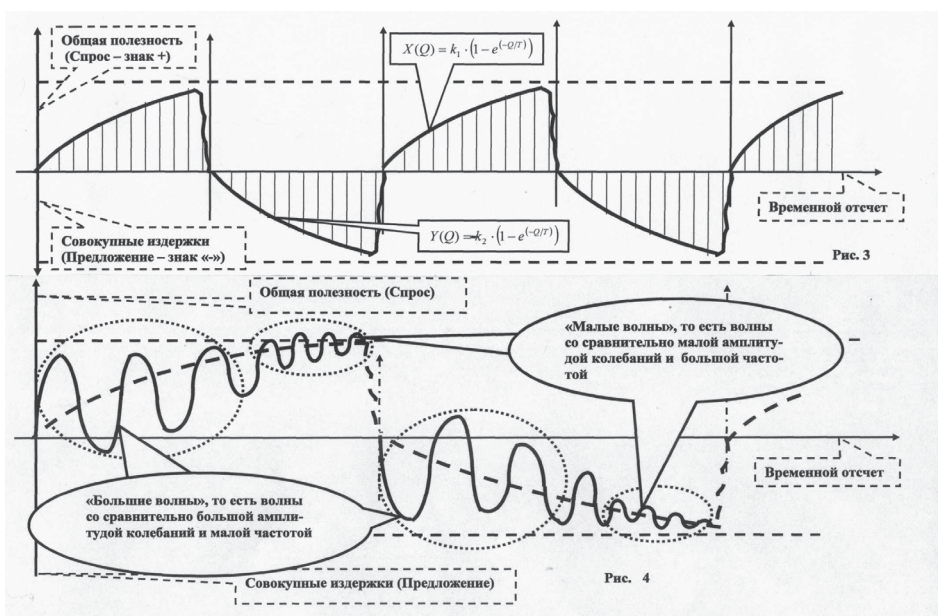


Рис. 3, 4

Переходя далее к математическому моделированию отдельного влияния детерминант спроса или предложения в определенные промежутки времени, сопровождаемые параллельным переносом кривой спроса или предложения (то есть при отсутствии силовых динамических воздействий как на спрос, так и на предложение), в моделях должны быть учтены только изменения первых производных по времени, не связанных с силовыми динамическими проявлениями. В таком случае соответствие между зависимыми параметрами общей полезности X от изменения во времени первой производной $dX/dt = p_D$, где p_D – цена спроса (при условии: $d^2X/dt^2 = 0$) будет характеризовать фактор параллельного переноса кривой спроса. Аналогичная закономерность проявляется и по отношению к зависимому параметру совокупных издержек Y по времени $dY/dt = p_S$, где p_S – цена предложения

(при условии $d^2Y/dt^2 = 0$) как к фактору, характеризующему параллельный перенос кривой предложения. Тогда, записывая зависимость входного воздействия детерминанты спроса в виде $k_1 \cdot X(t)$ и соответственно входного воздействия детерминанты предложения в виде $k_2 \cdot Y(t)$, позволяет получить простейшие закономерности не силовых динамических изменений координатных параметров в долговременном, маршалловском периоде в виде:

$$k_1 \cdot X(t) = X + T \cdot (dX/dt) \text{ и } k_2 \cdot Y(t) = Y + T \cdot (dY/dt).$$

Решения полученных дифференциальных уравнений принципиально характеризует аperiodические звенья «черного ящика» как в теории управления³, так и в кибернетике⁴, включая и экономическую⁵, со свойственным асимптотическому приближению предельных значений к указанным постоянным величинам входных воздействий:

$$X(t) = k_1 \cdot (1 - e^{(-t/T)}) \text{ и } Y(t) = k_2 \cdot (1 - e^{(-t/T)}),$$

где T – параметр в виде коэффициента пропорциональности, связанный со скоростью изменения соответственно общей полезности или совокупных издержек, а входные воздействия как в модели изменения общей полезности, так и в модели изменения совокупных издержек могут быть подвержены процедуре статистической нормировки с приведением входных воздействий к единому для обоих случаев единичному объединяющему воздействию (без нарушения какой-либо общности рассуждений). Последнее соответствует представлениям коэффициентов пропорциональности по входам «черных ящиков» кибернетических систем в нормированном виде: $k_1 \cdot [1]$ и $k_2 \cdot [1]$. График изменения полученной фактически релаксационной функции приведен на рис. 3, на котором одновременно показана и смена периодических релаксаций при изменении с течением времени превалирующего влияния либо детерминанты (детерминант) спроса, либо детерминанты (детерминант) предложения в достаточно долговременном экономическом периоде времени.

Совместное, но попеременное во времени воздействие на товар спроса и предложения способствует образованию на рынке конкурентных рыночных цен и создает предпосылки для материализации рыночной среды, назовем ее эфирно-товарной средой, которая наполняется объемами товара или акций и согласно устойчиво проявляемым законам спроса и предложения, динамически реагируют на ценовые колебания. Воздействие колебаний на материализованную эфирно-товарную среду создают условия для ориентированного волнового, потокового, товарно-акцизного движения, завершаемого в целом вместе с совместно уходящими за пределы рыночного пространства покупателями с купленными ими объемами товаров-фьючерсов

³ Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.

⁴ Винер Н. Кибернетика или управление и связь в животном и машине. – М.: Наука, 1967. – 327 с.

⁵ Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. Микроэкономика: В 2-х т. / Под ред. В.М. Гальперина. – СПб.: Экономическая школа, 1996. – Т.1 349 с.

или акций. Именно последнее обстоятельство определяет движение и стимулирование пополнения биржевого рынка следующими, очередными количествами или партиями товара или ценных бумаг извне. Таким образом, рыночное пространство количественно материализуется субстанцией товарной среды в виде своеобразного эфира, на который, кроме рассматриваемых колебательных процессов от осуществляемых торгов, воздействуют и другие внешние сравнительно долговременные колебания при длительном влиянии на них детерминантов спроса и предложения.

Аналогами приведенных циклических движений являются, принципиально не отличающиеся от многочисленных и имеющих место в природе волновые движения и процессы, наполненные соответственно другими материально-эфирными средами (воздухом, газами, водой и т.д.). «Если считать океан бесконечно глубоким и на его поверхности происходят какие-то возмущения, – указывают авторы фейнмановских лекций по физике⁶, – то возникают волны. Вообще говоря, возможны любые возмущения, но синусоидальное движение с очень небольшим возмущением дают волны, напоминающие обычные глубокие океанские волны, идущие к берегу. Вода, разумеется, остается на месте, а движутся сами волны. Что же это за движение – поперечное или продольное? Оно не может быть ни тем, ни другим: ни поперечным, ни продольным. Хотя в каждом данном месте горбы чередуются со впадинами, оно не может быть движением вверх и вниз просто из-за закона сохранения ... Итак, ... при образовании впадины вода из этого места может двигаться в стороны. Так оно и получается на самом деле: частички воды вблизи поверхности будут двигаться приблизительно по окружности. Как-нибудь, когда вы будете нежиться на воде, лежа на круге, и придет гладкий вал, посмотрите на соседние предметы, и вы увидите, что они движутся по окружности. Так что картина получается неожиданная: здесь мы имеем дело со смесью продольных и поперечных волн. С увеличением глубины круги уменьшаются, пока на достаточной глубине от них ничего не остается».

Исследованные модельные волновые движения, относящиеся к материализованной рыночной среде (в силу общности всех волновых процессов), ничем не должны в принципе отличаться от единых реальных закономерностей волновых движений, что и объясняет стратегию краткосрочного прогноза биржевых цен, предложенную Ларри Вильямса⁷ для турбулентных современных рынков.

Переходя далее к выделяемым двум рыночным волновым движениям в виде: (1) волн, возникающих при суммировании процессов торгов между покупателями и продавцом (рис. 2), которые принципиально совпадают с ценовыми колебательными процессами современных биржевых рынков, и

⁶ Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т.4. – М.: Мир, 1965. – С. 231 – 232; 232 – 235.

⁷ Вильямс Л. Долгосрочный прогноз в краткосрочной торговле. - М.: ИК Аналитика, 2001. – 312 с.

(2) нелинейных волновых релаксаций (рис. 3), возникающих как последовательно нарастающие апериодические волны от попеременного влияния то детерминант спроса, то детерминант предложения, следует непременно предусмотреть неперенное сложение (суперпозицию) этих двух волновых движений, что и приводит к весьма устойчивой циклической смене длинных волн на более короткие, которые далее практически мгновенно замещаются сравнительно длинными волнами, образуя, таким образом, бесконечно повторяющуюся и весьма устойчиво существующую, природную последовательность. Аналогичные природные явления можно наблюдать повсеместно на берегу моря или широкой реки, когда волны на более мелкой глубине за счет суперпозиций волновых движений значительно больше, чем аналогичные волны, наблюдаемые в глубоких местах. И чем глубже место образования волн от дна, тем волны становятся меньше, поскольку более мелкие волны, подверженные суперпозиции с волнами большей амплитуды, не «достают» от дна и поэтому не получают дополнительной ударной нагрузки от дна, что и нивелирует далее амплитуду колебаний последних.

Заключение

Предполагается материализация рыночной среды в виде эфирно-товарной, которая наполняется объемами товара или акций и согласно устойчиво проявляемым законам спроса и предложения, которая динамически реагирует на ценовые колебания. Воздействие колебаний на материализованную эфирно-товарную среду создают условия для ориентированного волнового, потокового, товарно-акцизного движения, завершаемого в целом вместе с совместно уходящими за пределы рыночного пространства покупателями с купленными ими объемами товаров-фьючерсов или акций. Именно последнее обстоятельство определяет движение и стимулирование пополнения биржевого рынка следующими, очередными количествами или партиями товара или ценных бумаг извне. Таким образом, рыночное пространство количественно материализуется субстанцией товарной среды в виде своеобразного эфира, на который, кроме рассматриваемых колебательных процессов от осуществляемых торгов, воздействуют и другие внешние сравнительно долговременные колебания при длительном влиянии на них детерминантов спроса и предложения.

Аналогами приведенных циклических движений являются принципиально не отличающиеся от многочисленных и имеющих место в природе волновые движения и процессы, наполненные соответственно другими материально-эфирными средами (воздухом, газами, водой и т.д.).

Список источников

1. Аллен Р.Дж.Д. *Математическая экономия*. Москва, Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний*. Москва, Наука, 1981.
3. Виноградов Ю. *Первая ласточка: иностранные инвесторы побежали с корабля*. Доступно: <https://zen.yandex.com/media/alexniroba/pervaiialastochka-inostrannye-investory-pobejaliss-korablia-5f64742cbdfa745d406a0493>

- (дата обращения: 12.10.2020).
4. Вильямс Л. *Долгосрочные прогнозы в краткосрочной торговле*. Москва, «ИК «Аналитика», 2001.
 5. Дьюрелл К. *Азбука теории относительности*. Москва, Мир, 1970.
 6. Джевонс У. Об общей математической теории политической экономии, с. 67-69; Краткое сообщение об общей математической теории политической экономии, с. 70-77 // *В кн. Теория потребительского поведения и спроса*. Вып. 1. Под ред. В.М. Гальперина. Санкт-Петербург, Экономическая школа, 1993.
 7. Лакатос И. *Фальсификация и методология научно-исследовательских программ*. Пер. с англ. Москва, Медиум, 1995.
 8. Левин А.И. *Экономическая динамика: пространственно-временное моделирование*. Калининград, Изд-во КГТУ, 2002.
 9. Левин Б.А. Моделирование поведения трейдеров в биржевых взаимодействиях методом итерации // *Современная экономика: проблемы и решения*, 2020, no. 2, с. 8-15.
 10. Левин Б.А. Основание динамики рыночного взаимодействия в пространственно-временном описании на современных турбулентных биржах с позиций теорий ценности и полезности (ч. 1) // *Современная экономика: проблемы и решения*, 2020, no. 7, с. 37-58.
 11. Маршалл А. *Принципы экономической науки*. Т. II. Москва, Изд. группа «Прогресс», 1993, с. 49-67; 68-81.
 12. Уинфри А.Т. *Время по биологическим часам*. Москва, Мир, 1990.
 13. Хикс Дж., Аллен Р. Пересмотр теории ценности, с. 117-141 // *В кн. Теория потребительского поведения и спроса*. Вып. 1. Под ред. В.М. Гальперина. Санкт-Петербург, Экономическая школа, 1993.
 14. Шноль С.Э. *Биологические часы*. Пер. с англ., под ред. и с приложением. Москва, Мир, 1964.
 15. Шумпетер Й. *История экономического анализа*. Т. 3. Санкт-Петербург, Экономическая школа, 2001.
 16. Lerner Elasticity of Substitution // *Review of Economic Studies*, 1933, Oct., pp. 68-70.

THE BASIS OF THE DYNAMICS IN THE MARKET RELATIONSHIPS OF THE SPACE AND TIME DICRIBSION (SITUATION) ON MODERN TURBULANCE BOURSES WITH THE POSITION VALUE AND TRADE THEORY (PART 2)

Levin Boris Arkadievich, Cand. Sc. (Econ.)

Information and analysis department (IAD) FAPRID, Gilyarovsky st., 31, str. 1, 2, Moscow, Russia, 107996; e-mail: boris_levin_boris@mail.ru

Purpose: follow, in my article ,we will to discuss the basis of the bourse waves and also the superposition of the waves conditions in the processes market relationship with points of the turbulence in the long period on the basis of the same laws of the basis of nature waves in the different conditions. *Discussion:* in the present time, we have to understand, that in the future we will have the bourse became to shake, as soon as possible, by the finance negative trade conditions. As we see, in last article is about we to declared that the main of cause of the present crisis is the reduce of high-altitude bourse change, as we have, in the present time on the bourse, so buy-sell of the futures and others futures conditions. The altitude of the bourse change operations so fast as we can, that traders and also the brokers, became in the new condition's way, so in this way of the turbulence conditions situations. By the way, we have the price change conditions way (as we say follow: the volatility) in the same of the time that also to declare of us to bad also negative bourse trade (down with the bourse trade in the bourse square). So, the declare continuation of the bourse (trade square) models process in the turbulence conditions in the during (the long economy period) based on the wave bourse nature theory. Also, to declare of this bourse waves processes to allow to us the modelling the bourse processes also the bourse waves crisis conditions. *Result:* we have models of the waves processes in the turbulence conditions by the bourse processes in the different time conditions way in the same of the time to declare the economy dynamics with the use of the mathematical conditions way also with the interpretations classical theory of goods values. We also to declare the nature of the new waves processes conditions in different conditions (ways) that we have in the bourse conditions in the conditions of the turbulence, we mean here in the bourse turbulence for the oscillation's movements in the time way period in way out for demand or supply influence on the material substations. It's also to understand the nature of the waves processes in the market's conditions by influence here the price turbulence and to understand the new science basis for the

space-time condition, basis of the bourse explanations by the change of the modern condition.

Keywords: the model of the simple bourse trades, the market relationship in the space-time condition, the turbulence on the bourse, the bourse price oscillations, value theory, utility theory.

References

1. Allen R. J. D. *Mathematical Economics*, 2 nd ed. Moscow, Publishing house of Foreign. lit.,1960.
2. Andronov A.A., Witt A.A., Haikin S.E. *Oscillation Theory*. Moscow, Science, 1981.
3. Vinogradov U. *The first swallow: foreign investors run away from ship*. Available at: <https://zen.yandex.com/media/alexniroba/pervaia-lastochka-inostrannye-investory-pobejali-s-korabliia-5f64742cbdfa745d406a0493> (accessed: 12.10.2020).
4. Williams L. *Long-term secrets to short-term trading*. Moscow, IC Analytics, 2001.
5. Durrell K. *The way of relativities theory*. Moscow, Mir, 1970.
6. Galperin V.M. *The theory of consumer activity and demand*. Sankt-Peterburg, Economy school, 1993.
7. Lakatos I. *The contrafact of the methodology of the science programs. The tr. from English lang*. Moscow, Medium, 1995.
8. Levin A.I. *Economy dynamics: space and time modelling*. KSTU Publisher, Kaliningrad, 2002.
9. Levin B. Modeling the behavior of traders in exchange interactions by iteration. *Modern Economics: Problems and Solutions*, VGU, Voronezh, 2020, no. 2, pp. 8-15.
10. Levin B. The basis of the dynamics in the market relationships of the space and time situation on modern turbulence bourses with the position value and trade theory. *Modern Economics: Problems and Solutions*, Voronezh, 2020, no. 7 (127), pp. 37-58.
11. Marshall A. *The principal of the economy science*. Vol. II. Moscow, The publisher Progress Group, 1993, pp. 49-67, 68-81.
12. Winfrey A.T. *The biology time*. Moscow, Mir, 1990.
13. Galperin V.M. *The theory of consumer activity and demand*. Sankt-Peterburg, Economy school, 1993.
14. Shnol' S.E. *Biological clock*. Moscow, Mir, 1964.
15. Schumpeter I. The history of the economy analysis. Sankt-Peterburg, Economy school, 2001, vol. 3.
16. Lerner Elasticity of Substitution. *Review of Economic Studies*, 1933, pp. 68-70.