УДК 65.012.122: 519.17

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ РЕСУРСОВ В УСЛОВИЯХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОСТИ И С УЧЕТОМ НЕДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ ДАННЫХ[1]

Павлов Дмитрий Алексеевич, канд. физ.-мат. наук, доц.
Кирий Владимир Александрович, канд. физ.-мат. наук, доц.

Кубанский государственный аграрный университет им. И.Т. Трубилина, ул. Калинина, 13, Краснодар, Россия, 350044; e-mail: dp.logic@gmail.com

Цель: разработка эффективных методов и моделей для решения определенного ряда проблем сетевого распределения ресурсов на предприятии с учетом условий многокритериальности и присутствия недетерминированности данных. *Обсуждение*: предлагается многокритериальная оптимизационная модель для решения задач производственного менеджмента, связанная с проблемой эффективного распределения ресурсов на предприятии. Представлена общая многокритериальная постановка задачи оптимизации распределения производственных ресурсов в теоретико-графовой интерпретации с учетом недетерминированности в виде интервальных данных. Обозначен ряд проблем, возникающих при решении задачи с недетерминированными данными, когда в случае интервальных данных нахождение оптимального решения связано с выбором наиболее целесообразного решения из множества несравнимых альтернатив. *Результаты*: разработана эффективная методика решения определенного класса проблем сетевого распределения производственных ресурсов с учетом недетерминированных данных. Результаты построенной модели позволят минимизировать затраты при распределении ресурсов и могут быть использованы при разработке автоматизированного средства контроля и управления производственными процессами предприятия.

Ключевые слова: распределение ресурсов, распределение производственных задач, структура производственных процессов, многокритериальная дискретная оптимизация.

DOI: 10.17308/meps.2020.11/2465

Введение

В работе предлагается многокритериальная оптимизационная модель для решения задач производственного менеджмента [8], связанных

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта 18-010-00891 А.

с проблемой эффективного распределения ресурсов и учетом структурных особенностей системы. К таким задачам относятся: распределение производственных ресурсов [2], формирование групп исполнителей производственных задач [11].

Общая идея этих задач состоит в наилучшем распределении ресурсов среди элементов производственной системы, при котором достигаются оптимальные показатели экономических критериев. Распределение ресурсов происходит путем формирования групп исполнителей производственных процессов с учетом возможных отношений подчиненности в формируемых группах. Сложность этих задач состоит в том, что они сводятся к комбинаторному выбору решений, которые с учетом большого количества переборных вариантов являются трудноразрешаемыми. Проблема усложняется в связи с тем, что выбор решения необходимо проводить с учетом разнородных экономических требований, задаваемых в виде критериев. В результате говорят, что проблема рассматривается в многокритериальной постановке, при которой выбор рационального решения происходит из множества несравнимых альтернатив.

При моделировании экономических задач часто параметры системы задаются в виде недетерминированных данных, что наилучшим способом отражает адекватность и реальность ситуации и является результатом экспертного оценивания параметров системы. В качестве недетерминированных данных рассматриваются интервальные значения, задаваемые в виде числовых границ с нижними и верхними оценками. Проблема распределения производственных задач в условиях многокритериальности с учетом недетерминированности данных является более сложной задачей. В работе рассматривается некоторый класс задач, для которых представлена теоретико-графовая постановка задачи и предложены эффективные алгоритмы их решения.

Разработка адекватной модели для решения рассматриваемых задач позволит сократить расходы на эксплуатацию системы и создать средства автоматизированного контроля и управления производственными процессами предприятия.

Рассмотрим задачу оптимального формирования групп исполнителей производственных задач. Суть ее заключается в том, чтобы в определенной структуре информационно-производственных связей распределить задачи по группам исполнителей с учетом заданных критериев и структурой отношений подчиненности в группах.

При моделировании информационно-производственных отношений больших систем они, как правило, содержат определенного вида иерархию связей производственной структуры предприятия. Сетевой моделью таких конструкций наилучшим образом являются предфрактальные графы [4, 5], где ранг соответствует уровню иерархии этого графа. Вершинами предфрактального графа являются исполнители производственных задач, а ребрами – информационно-производственные связи между ними, которые оцениваются определенным набором разнородных оценок, заданных в виде числовых интервалов или интервальных весов. Интервальный вес может обозначать диапазон оценок, определяющий, например, стоимость коммуникаций между двумя исполнителями, выраженную в баллах. В этом случае говорят, что математическая модель этой задачи базируется на предфрактальном графе интервальными весами.

Методология исследования

Предлагается общая теоретико-графовая постановка исследуемых задач с учетом неопределенности, заданной в виде числовых интервалов.

Рассмотрим предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный множеством затравок $\mathrm{H} = \{H = (W, Q)\}$, $|W| = n$, $|Q| = q$. В графе G_L множеству ребер $e^{(l)} \in E_L$ сопоставим некоторый набор из *M* интервальных весов $w(e^{(l)}) = [\underline{w}, \overline{w}]$, в результате чего граф G_L назовем интервально-взвешенным, где $w(e^{(l)}) = [\underline{w}, \overline{w}] \subseteq [\theta^{l-1}a, \theta^{l-1}b]$, $l = \overline{1, L}$ – ранг ребра, причем $a > 0, b > 0, \quad \theta \in (0,1)$.

Допустимым решением задачи или покрытием графа G_L назовем остовный подграф $x = (V_L, E_x)$, $E_x \subseteq E_L$, каждая компонента связности которого изоморфна типовому подграфу τ_k – простой цепи заданной длины, обозначаемых отношения подчиненности в выделяемых группах. Множеством допустимых решений (МДР) назовем совокупность всех решений $X = X(G_L) = \{x\}$, которые определены типовыми подграфами τ_k.

На МДР задана векторно-целевая функция (ВЦФ):

$$F(x) = (F_1(x), ..., F_M(x), F_{M+1}(x), F_{M+2}(x)), \tag{1}$$

$$F_i(x) = \sum_{C \in x} \sum_{e \in C} w(e) \to \min, i = \overline{1, M}, \tag{2}$$

$\sum_{C \in x} \sum_{e \in C} w(e)$ – общая сумма весов x;

$$F_{M+1}(x) = |x| \to \min, \tag{3}$$

где $|x|$ – количество типовых подграфов из x;

$$F_{M+2}(x) = \hbar \to \min, \tag{4}$$

где – $\hbar$ количество различных типовых подграфов из x.

Экономическая интерпретация критерия (2) заключается в минимизации общей стоимости расходов при выделении групп исполнителей производственных задач, в случае, когда весам ребер соответствуют стоимости коммуникаций между исполнителями. Критерий (3) отвечает за уменьшение времени обработки задачи. Критерий (4) отвечает за равномерное распределение задач среди исполнителей.

Требуется найти на МДР *X* такое решение x_0, принимающее экстремальные значения на ВЦФ (1) для критериев (2)-(4).

Основные трудности при решении задач с интервальными данными связаны с накоплением ошибок в исходном результате. Точность решения этих задач связана с неопределенностью в задании исходных данных, округлением в результате проведения операций с интервальными данными и приближенным характером применяемого численного метода.

Поиск допустимых решений $X = \{x_i\}, i = \overline{1, m}$ по критериям $F_i(x), i = \overline{1, M}$ (2) предполагает использование метода граничного суммирования [6, 7]. В нем для нахождения суммы двух числовых интервалов $w_1(e) = [\underline{w}_1(e), \overline{w}_1(e)]$, $w_2(e) = [\underline{w}_2(e), \overline{w}_2(e)]$ применяют сумму нижних и верхних оценок:

$$w_1(e) + w_2(e) = [\underline{w}_1(e) + \underline{w}_2(e), \overline{w}_1(e) + \overline{w}_2(e)]. \tag{5}$$

В результате применения (5) к критериям $F_i(x), \quad i = \overline{1, M}$ (2) получаем выражение:

$$F_i(x) = [\sum_{e \in E_x} \underline{w}(e), \sum_{e \in E_x} \overline{w}(e)] \to \min, \; i = \overline{1, M}, \tag{6}$$

где каждый из M критериев вычисляется по своему набору весов. Наборы весов $i = \overline{1, M}$ считаем несравнимыми, иначе эти критерии можно представить с помощью линейной свертки к одному весовому критерию.

Так как критерии (3)-(4) являются топологическими и не учитывают веса ребер, то нахождение решений по ним с учетом интервальных весов не будет отличаться от случая с вещественными весами [2].

Когда ребрам поставлены в соответствие интервальные веса при нахождении оптимального решения, возникает проблема выбора из множества недоминируемых решений [8, 9]. Одной из важных проблем интервального анализа является процедура сравнения интервалов. Назовем решение x_1 предпочтительнее решения $x_2 \;\; (x_1 \prec x_2), \;\; x_1, x_2 \in X,$ при выполнении критерия (6), если будет справедливо неравенство $w(x_1) \le w(x_2)$. При выполнении $w(x_1) \subset w(x_2)$ или $w(x_2) \subset w(x_1)$, где $x_1, x_2 \in X$, интервалы называются несравнимыми. В случае совпадения соответствующих решений $x_1, x_2 \in X$, $w(x_1) = w(x_2)$, интервалы называются эквивалентными.

Паретовским множеством называется решение $\tilde{x} \in X$, состоящее из векторно несравнимых альтернатив, где $x \prec \tilde{x}$, $x \in X$.

Подмножество $X^0 \subseteq \tilde{X}$ минимальной мощности называется полным множеством альтернатив, в котором представлено по единственному представителю из каждого класса эквивалентности.

Решением задач с интервальными данными является паретовское множество или полное множество альтернатив и состоит из совокупности этапов. Вначале находится МДР, далее строится множество векторно-несравнимых альтернатив и на окончательном этапе выбирается «компромиссный оптимум» x_0 с использованием методов теории выбора и принятия решений [6].

Для решения рассматриваемой задачи с интервальными данными предложен эффективный алгоритм α^{int}. Под эффективностью понимается свойство, связанное с временем вычисления алгоритма, которое не слишком сильно зависит от размера входных данных задачи. Этот класс алгоритмов называется полиномиальным [10].

В качестве элементов покрытия в алгоритме используются простые цепи типа $\tau_k, k=1,2,3$, соответствующие длинам входящих в них ребер: одно, два и три ребра. Алгоритм α^{int} выделяет покрытие L-ранговыми цепями типа τ_k для заданного набора весов. Алгоритм строит покрытия x_i^*, используя все заданные наборы весов $i=\overline{1,M}$.

Алгоритм α^{int} представляет собой последовательную обработку каждой из n^{L-1} подграф-затравки [4], на которых выполняется процедура покрытия затравки цепями (ППЗЦ).

Различие алгоритма α^{int} для каждого типа $\tau_k, k=1,2,3$ состоит в процедуре ПЗЦ. Для выделения покрытия типа τ_1 в качестве процедуры ПЗЦ используется алгоритм Эдмондса, позволяющий находить совершенное паросочетание минимального веса (СПМВ) [12] на рассматриваемой подграф-затравке.

Для покрытия подграф-затравки цепями типа τ_2 с помощью алгоритма Эдмондса строится СПМВ M_1, в котором рассматривается ребро $m_j \in M_1, j \in J$ с максимальным интервалом. У ребра m_j последовательно просматриваются все инцидентные ребра и выбирается одно имеющее минимальный интервал. В результате образуется цепь длины три $\tilde{n}_3$. В случае, когда у ребра m_j несколько инцидентных ребер, рассматривается каждая из образованных цепей в отдельности и выбирается цепь $\tilde{n}_3^*$, имеющая минимальную сумму интервальных весов. В $\tilde{n}_3^*$ удаляется ребро из M_1 с максимальным интервалом. В результате проделанных конструктивных операций получаем цепь длины два $\tilde{n}_2$. Повторив эти процедуры для всех оставшихся ребер из M_1, получим покрытие подграф-затравки типа τ_2.

При покрытии подграф-затравки цепями типа τ_3 дважды используется выделение СПМВ. При первом нахождении M_1 на подграф-затравке G все ребра $m_j \in M_1, j \in J$ запоминаются и стягиваются в вершину, в результате получаем граф G'. Далее на G' повторяем процесс нахождения СПМВ M_2. Восстановив исходный граф G, выделяется покрытие τ_3 – цепями длины три.

ОБЩАЯ СХЕМА АЛГОРИТМА

ЭТАП 1. Для набора весов $i=\overline{1,M}$ выделить покрытия для каждой $s=1,2,...,n^{L-1}$ подграф-затравки $G_L=(V_L,E_L)$ цепями типа $\tau_k, k=1,2,3$, используя процедуру ПЗЦ.

ЭТАП 2. Для набора весов $i=\overline{1,M}$ объединить покрытия, найденные на этапе 1. В результате объединения будут составлять покрытия предфрактального графа $G_L=(V_L,E_L)$.

ЭТАП 3. Из множества найденных решений найти предпочтительные альтернативы.

Трудоемкость алгоритма α^{int} покрытия цепями типа τ_k на предфрактальном графе $G_L=(V_L,E_L)$, порожденного затравкой $H=(W,Q)$, не превосходит $O(nN(2n+3/2)), N=n^L$.

Под понятием «трудоемкость» понимается асимптотическая оценка времени работы алгоритма в худшем случае. При сравнении результатов работы алгоритма на предфрактальном и обыкновенном графе трудоемкость алгоритма на первом в n^{2L} меньше, чем на втором.

Результаты

Результатом предложенной модели является разработка эффективного алгоритма α^{int}, позволяющего использовать его в системах автоматизации управления и контроля производственных процессов. Обоснованием алгоритма является следующая теорема.

Теорема. Алгоритм α^{int} выделяет на интервально-взвешенном предфрактальном (n,L)-графе $G_L=(V_L,E_L)$, порожденном затравкой $H=(W,\ Q)$, покрытие x^* цепями типа τ_k, $k=\overline{1,3}$, оптимальное по $F_{M+2}(x^*)$ и с оценкой по $F_i(x^*)$, $i=\overline{1,M}$ и $F_{M+1}(x^*)$:

$$F_i(x^*)\subseteq[\frac{n^L}{k}\theta^{L-1}a;\frac{n^L}{k}\theta^{L-1}b],\ i=\overline{1,M},\ \ k=\overline{1,3}.$$

$$F_{M+1}(x^*)\le\frac{n^L}{2}.$$

Так как критерии $F_{M+1}(x)$ и $F_{M+2}(x)$ являются топологическими, то их оценка совпадает с оценкой для предфрактального графа, взвешенного вещественными числами, представленная в работе [2]. Доказательство по метрическим критериям $F_i(x)$, $i=\overline{1,M}$ строится на основании количества элементов покрытия и учета интервальных весов.

Применительно к задачам сетевого распределения производственных задач алгоритм α^{int} позволяет находить оптимальные распределения по элементам с учетом экономического эффекта (стоимости взаимодействия), надежности и других показателей системы.

Заключение

Предложен метод оптимального распределения задач (ресурсов) по структуре системы в условиях многокритериального подхода и учетом недетерминированных данных. Решение задачи представлено, как дискретная многокритериальная задача о покрытии предфрактального графа типовыми подграфами. В качестве типовых подграфов использовались цепи определенной длины как наиболее общий тип отношений подчиненности и информационных связей в группах. Задача нахождения решений с интервальными весами по векторно-целевой функции (1) не отличается от задачи с вещественными весами по топологическим критериям (3) – (4). Однако в интервальной постановке критерий (2) представляется в виде критерия (6). Решение по критерию (6) для работы с интервальными весами предполагает применение суммирования граничным методом. Для выбора предпочтительных альтернатив предлагается использовать сравнение интервалов.

Использование данной модели имеет широкий ряд приложений в экономических задачах, связанных с проблемами производственного менеджмента при эффективном формировании групп исполнителей производственных задач и распределением производственных ресурсов по элементам производственной сети.

Список источников

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления*. Москва, Мир, 1987.
2. Барановская Т.П. Метод оптимального сетевого распределения производственных задач с учетом сокращения издержек // *Современная экономика: проблемы и решения*, 2018, no. 12 (108), с. 130-137.
3. Гэри М. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.* Москва, Мир, 1982.
4. Кочкаров А.М. *Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход*. Нижний Архыз, CYGNUS, 1998.
5. Кочкаров Р.А. *Многовзвешенные предфрактальные графы с недерминированными весами. Приложения в экономике, астрофизике и сетевых коммуникациях*. Москва, ЛЕНАНД, 2017.
6. Перепелица В.А. *Многокритериальные модели и методы для задач оптимизации на графах*. LAP LAMBERT Academic Publication, 2013.
7. Тебуева Ф.Б. *Дискретная оптимизация и моделирование в условиях неопределенности данных*. Москва, Академия Естествознания, 2007.
8. Чейз Ричард Б. *Производственный и операционный менеджмент*. Москва, Диалектика, Вильямс, 2017.
9. Шарый С.П. *Конечномерный интервальный анализ*. Новосибирск, Институт вычислительных технологий РАН, 2013.
10. Шокин Ю.И. *Интервальный анализ*. Новосибирск, Наука, 1981.
11. Pavlov D.A. *Formation of Effective Leading Project Teams: A Multi-Objective Approach* // ICSEAL-6-2019.
12. Diestel R. *Graph Theory, Electronic Edition*. NY: Springer-Verlag, 2005, p. 422.

PRODUCTION RESOURCES DISTRIBUTION UNDER CONDITIONS OF MULTI-CRITERION AND TAKING INTO ACCOUNT THE NON-DETERMINATION OF DATA

Pavlov Dmitry Alekseevich, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.
Kiriy Vladimir Alexandrovich, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

Kuban State Agrarian University. I.T. Trubilina, Kalinina st., 13, Krasnodar, Russia, 350044; e-mail: dp.logic@gmail.com

Purpose: development of effective methods and models for solving a certain number of problems of network distribution of resources in an enterprise, taking into account the conditions of multi-criteria and the presence of non-determinism of data. *Discussion*: the author proposes a multicriteria optimization model for solving production management problems related to the problem of efficient allocation of resources at the enterprise. The article also presents the general multicriteria formulation of the problem of optimizing the distribution of production resources in graph-theoretic interpretation, taking into account non-determinism in the form of interval data. It also identifies a number of problems that arise when solving a problem with non-deterministic data, when, in the case of interval data, finding the optimal solution is faced with the problem of choosing the most appropriate solution from a set of incomparable alternatives. *Results*: the author presents an effective method for solving a certain class of problems of network distribution of production resources, taking into account non-deterministic data. The results of the model can be useful for an automated support and decision-making system to control and manage the production processes of the enterprise. The use of the model minimizes the cost of resource allocation in production management tasks.

Keywords: formation of groups of performers, distribution of production tasks, structure of production processes, multicriteria discrete optimization.

References

1. Alefeld G. *Vvedenie v intervalnye vychisleniya* [Introduction to interval computing]. Moscow, Mir, 1987. (In Russ.)

2. Baranovskaya T.P. Metod optimal'nogo setevogo raspredeleniya proizvodstvennyh zadach s uchetom sokrashcheniya izderzhek [Method of optimal network distribution of production tasks taking into account cost reduction]. *Sovremennaya ekonomika: problemy i resheniya*, 2018, no. 12 (108), pp. 130-137. (In Russ.)

3. Geri M. *Vychislitelnye mashiny i trudnoreshaemye zadachi* [Computing machines and intractable problems]. Moscow, Mir, 1982. (In Russ.)

4. Kochkarov A.M. *Raspoznavanie fraktalnyh grafov. Algoritmicheskij podhod* [Recognition of fractal graphs. Algorithmic approach]. Nizhnii Arhyz, CYGNUS, 1998. (In Russ.)

5. Kochkarov R.A. *Mnogovzveshennye predfraktal'nye grafy s nederminirovannymi*

vesami. Prilozheniya v ekonomike, astrofizike i setevyh kommunikaciyah [Multiweighted prefractal graphs with non-deterministic weights. Applications in Economics, astrophysics and network communications]. Moscow, LENAND, 2017. (In Russ.)

6. Perepelitsa V.A. *Mnogokriterialnye modeli i metody dlya zadach optimizacii na grafah* [Multi-criteria models and methods for optimization problems on graphs]. LAP LAMBERT Academic Publication, 2013. (In Russ.)

7. Tebueva F.B. *Diskretnaya optimizaciya i modelirovanie v usloviyah neopredelennosti dannyh* [Discrete optimization and modeling under data uncertainty]. Moscow, Akademiya Estestvoznaniya, 2007. (In Russ.)

8. Chejz Richard B. *Proizvodstvennyj i operacionnyj menedzhment* [Production and operational management]. Moscow, Dialektika, Vilyams, 2017. (In Russ.)

9. Sharyj S.P. *Konechnomernyj interval'nyj analiz* [Finite-dimensional interval analysis]. Novosibirs: Institut vychislitel'nyh tekhnologij RAN, 2013. (In Russ.)

10. Shokin Yu.I. *Intervalnyi analiz* [Interval analysis]. Novosibirsk, Nauka, 1981. (In Russ.)

11. Pavlov D.A. *Formation of Effective Leading Project Teams: A Multi-Objective Approach.* ICSEAL-6-2019.

12. Diestel R. *Graph Theory, Electronic Edition*. NY, Springer-Verlag, 2005, p. 422.