УДК 004.93'12

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ СОСТАВНОЙ ТРАЕКТОРИИ СБАЛАНСИРОВАННОГО РОСТА РЕГИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Баева Нина Борисовна, канд. экон. наук, доц.

Воронежский государственный университет, Университетская пл., 1, Воронеж, Россия, 394018; e-mail: baeva@amm.vsu.ru

Цель: разработка моделей и методов формирования траектории сбалансированного развития региональной экономической системы (РЭС). *Обсуждение*: рассматриваются технологии формирования и анализа моделей экономического роста региональной экономики, описанные в виде модели динамического межотраслевого баланса в предположении возможного изменения развития РЭС. Объектом анализа является матрица прироста фондоемкости. *Результат*: доказана теорема о рациональной корректировке матрицы приростной фондоемкости, необходимость в которой вызвана возможным наличием нулевых строк и столбцов вследствие неучастия ряда отраслей в процессе модернизации оборудования. Предложена формула корректировки нулевых элементов, на основе которой разработаны и проанализированы варианты составной траектории, обеспечивающие сбалансированный рост основных показателей региональной экономики.

Ключевые слова: составная траектория, сбалансированный рост РЭС, матрицы приростной фондоемкости.

DOI: 10.17308/meps.2016.5/1426

Введение

Данная работа посвящена построению составной траектории для сбалансированного роста экономической системы [2, 4, 5, 9-12]. В качестве модели экономического роста выбирается динамический межотраслевой баланс, в котором матрица прямых затрат не изменяется во времени, а вектор конечного продукта пропорционально зависит от валового выпуска. Если при данных условиях не корректировать матрицу приростной фондоемкости, то траектории развития некоторых отраслей на рассматриваемом промежутке времени могут оказаться убывающими, причем возможно убывание даже с начального момента времени.

Таким образом, для получения составной траектории развития необходимо в момент начала убывания траектории некоторым образом внести изменения в начальные условия. Такие изменения достигаются корректировкой матрицы приростной фондоемкости. Необходимые теоретические модели и алгоритмы решения будут введены далее. Кроме того, будут описаны и функциональные возможности разработанных алгоритмов для построения составной траектории сбалансированного роста экономической системы на основе модели динамического межотраслевого баланса [1, 3, 6, 7, 8].

Модель экономического роста региона

В качестве модели экономического роста использовалась модель динамического межотраслевого баланса [1, 2, 3, 4, 5].

Рассмотрим данную модель в общем виде как систему дифференциальных уравнений:

$$A(t)X(t)+K(t)\dot{X}(t)+Y(t)=X(t),\quad t\in\left[t_0,t\right],\quad X(t_0)=X_0, \qquad (1)$$

$A(t)$ – матрица коэффициентов прямых затрат; $K(t)$ – матрица приростных фондоемкостей; $X(t)$ – вектор валового выпуска в момент времени t; $\dot{X}(t)$ – величина прироста (производственная); $Y(t)$ – конечный продукт.

Запишем (1) в координатной форме:

$$\sum_{1}^{n} a_{ij}(t)k_{ij}(t)+\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(t)\dot{x}(t)+y_i(t)=x(t),\quad i=\overline{1,n} \qquad (2)$$

Напомним, что коэффициенты прямых материальных затрат $a_{ij}(t)=\dfrac{x_{ij}(t)}{x_j(t)}$ означают, какое количество продукции i-ой отрасли, которое необходимо для производства единицы продукции j-ой отрасли.

Коэффициенты матрицы приростной фондоемкости K показывают, какое количество продукции i-ой отрасли должно быть вложено в j-ую отрасль для увеличения производственной мощности этой отрасли на единицу.

Будем полагать, что матрица прямых затрат A и матрица приростных фондоемкостей K не зависят от времени, а вектор конечного продукта пропорционален величине валового выпуска X, т.е. $A(t)=A$, $K(t)=K$, $Y(t)=\alpha X(t)$, где α – диагональная матрица, на диагонали которой расположены коэффициенты α_i, показывающие долю конечного продукта в валовом выпуске для отрасли i.

При данных предположениях получаем следующую формулу решения для задачи (1):

$$X(t)=e^{K^{-1}(E-A-\alpha)(t-t_0)}X_0. \qquad (3)$$

Матрица K может оказаться необратимой вследствие возможного присутствия в ней нулевой строки и нулевого столбца. Для исправления ситуации предлагаем процедуру ее корректировки.

Методы корректировки матрицы приростной фондоемкости

Рассмотрим матрицу приростной фондоемкости K. Пусть 1 – номер нулевого столбца матрицы K. Требуется таким образом ввести поправки α_i, чтобы определитель $\det K \in (\varepsilon - \delta, \varepsilon + \delta)$.

Обозначим через $K_{\{i,j\}}$ матрицу K с вычеркнутым столбцов 1 и строкой M. Тогда справедлива лемма 1.

Лемма 1

Для того чтобы $\det K$, принадлежащая промежутку $[\varepsilon - \delta, \varepsilon + \delta]$, достаточно, чтобы $\alpha_i \in \Omega, \forall i$, где множество Ω определяется как $\Omega = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$, где

$$\overline{\alpha} = \frac{\varepsilon}{\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n} \det K_{\{i_1,l\}} - \sum_{2i_2=1}^{n} \det K_{\{i_2,l\}}\right] - \left[\sum_{2i_1=1}^{n} \det K_{\{i_1,l\}} - \sum_{2i_2-1=1}^{n} \det K_{\{i_2,l\}}\right]} + \frac{\delta}{\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n} \det K_{\{i_1,l\}} - \sum_{2i_2=1}^{n} \det K_{\{i_2,l\}}\right] - \left[\sum_{2i_1=1}^{n} \det K_{\{i_1,l\}} - \sum_{2i_2-1=1}^{n} \det K_{\{i_2,l\}}\right]}$$

$$\underline{\alpha} = \frac{(\varepsilon - \delta)}{\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n} \det K_{\{i_1,l\}} - \sum_{2i_2=1}^{n} \det K_{\{i_2,l\}}\right]} + \frac{\left[\sum_{2i_1=1}^{n} \det K_{\{i_1,l\}} - \sum_{2i_2-1=1}^{n} \det K_{\{i_2,l\}}\right]}{\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n} \det K_{\{i_1,l\}} - \sum_{2i_2=1}^{n} \det K_{\{i_2,l\}}\right]}.$$

Доказательство:

Запишем $\det K$ в следующем виде:

$$\det K = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} * \alpha_i * \det K_{\{i,l\}} = \sum_{2i-1=1}^{n} \alpha_i * \det K_{\{i,l\}} - \sum_{2i=1}^{n} \alpha_i * \det K_{\{i,l\}},$$

$i = 1, 2, .., n$.

Обозначим $\gamma_i = \det K_{\{i,l\}}$, причем $\gamma_{i_1} >> 0$, а $\gamma_{i_2} < 0$. И пусть $\overline{\alpha} = \max \alpha_i$ и $\underline{\alpha} = \min \alpha_i$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\varepsilon - \delta = \underline{\alpha} * \left[\sum_{2i_1-1=1}^{n} \gamma_{i_1} - \sum_{2i_2=1}^{n} \gamma_{i_2}\right] - \overline{\alpha} * \left[\sum_{2i_1=1}^{n} \gamma_{i_1} - \sum_{2i_2-1=1}^{n} \gamma_{i_2}\right] \le$$

$$\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n} \alpha_i \gamma_{i_1} - \sum_{2i_2=1}^{n} \alpha_i \gamma_{i_2}\right] - \left[\sum_{2i_1=1}^{n} \alpha_i \gamma_{i_1} - \sum_{2i_2-1=1}^{n} \alpha_i \gamma_{i_2}\right] \le$$

$$\overline{\alpha} * \left[\sum_{2i_1-1=1}^{n} \gamma_{i_1} - \sum_{2i_2=1}^{n} \gamma_{i_2}\right] - \underline{\alpha} * \left[\sum_{2i_1=1}^{n} \gamma_{i_1} - \sum_{2i_2-1=1}^{n} \gamma_{i_2}\right] = \varepsilon + \delta$$

Выпишем в явном виде $\overline{\alpha}$ и $\underline{\alpha}$:

$$\begin{cases} \underline{\alpha} * \left[\sum_{2i_1-1=1}^{n} \gamma_{i_1} - \sum_{2i_2=1}^{n} \gamma_{i_2}\right] - \overline{\alpha} * \left[\sum_{2i_1=1}^{n} \gamma_{i_1} - \sum_{2i_2-1=1}^{n} \gamma_{i_2}\right] = \varepsilon - \delta \\ \overline{\alpha} * \left[\sum_{2i_1-1=1}^{n} \gamma_{i_1} - \sum_{2i_2=1}^{n} \gamma_{i_2}\right] - \underline{\alpha} * \left[\sum_{2i_1=1}^{n} \gamma_{i_1} - \sum_{2i_2-1=1}^{n} \gamma_{i_2}\right] = \varepsilon + \delta \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Обозначим $\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n} \gamma_{i_1} - \sum_{2i_2=1}^{n} \gamma_{i_2}\right] = C_1$, $\left[\sum_{2i_1=1}^{n} \gamma_{i_1} - \sum_{2i_2-1=1}^{n} \gamma_{i_2}\right] = C_2$. Перепишем систему:

$$\underline{\alpha} = \frac{(\varepsilon - \delta) + \overline{\alpha} * C_2}{C_1}$$

$$\overline{\alpha} * C_1 - C_2 * \frac{(\varepsilon - \delta) + \overline{\alpha} * C_2}{C_1} = \varepsilon + \delta$$

$$\overline{\alpha} * C_1 - \frac{\overline{\alpha} * (C_2)^2}{C_1} = (\varepsilon + \delta) + \frac{C_2 * (\varepsilon - \delta)}{C_1}$$

$$\overline{\alpha} * ((C_1)^2 - (C_2)^2) = C_1 * (\varepsilon + \delta) + C_2 * (\varepsilon - \delta)$$

$$\overline{\alpha} = \frac{C_1 * (\varepsilon + \delta) + C_2 * (\varepsilon - \delta)}{(C_1)^2 - (C_2)^2}$$

$$\overline{\alpha} = \frac{\varepsilon}{C_1 - C_2} + \frac{\delta}{C_1 + C_2}$$

$$\underline{\alpha} = \frac{(\varepsilon - \delta)}{C_1} + \frac{C_1}{C_2}\left[\frac{\varepsilon}{C_1 - C_2} + \frac{\delta}{C_1 + C_2}\right]$$

Делая обратную подстановку, получаем:

$$\overline{\alpha} = \frac{\varepsilon}{\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n} \det K_{\{i_1,l\}} - \sum_{2i_2=1}^{n} \det K_{\{i_2,l\}}\right] - \left[\sum_{2i_1=1}^{n} \det K_{\{i_1,l\}} - \sum_{2i_2-1=1}^{n} \det K_{\{i_2,l\}}\right]} + \frac{\delta}{\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n} \det K_{\{i_1,l\}} - \sum_{2i_2=1}^{n} \det K_{\{i_2,l\}}\right] + \left[\sum_{2i_1=1}^{n} \det K_{\{i_1,l\}} - \sum_{2i_2-1=1}^{n} \det K_{\{i_2,l\}}\right]}$$

$$\underline{\alpha} = \frac{(\varepsilon - \delta)}{\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n} \det K_{\{i_1,l\}} - \sum_{2i_2=1}^{n} \det K_{\{i_2,l\}}\right]} + \frac{\left[\sum_{2i_1=1}^{n} \det K_{\{i_1,l\}} - \sum_{2i_2-1=1}^{n} \det K_{\{i_2,l\}}\right]}{\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n} \det K_{\{i_1,l\}} - \sum_{2i_2=1}^{n} \det K_{\{i_2,l\}}\right]}$$

Таким образом, для того, чтобы $\det K$ попадал в необходимый нам промежуток, нужно, чтобы поправки α_i были ограничены сверху и снизу полученными значениями $\overline{\alpha}$ и $\underline{\alpha}$.

Прежде чем перейти к доказательству леммы в случае m нулевых столбцов, для более ясного понимания рассмотрим случай с двумя столбцами.

$$\det K = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} * \alpha_i * \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+1} * \alpha_j * \det K_{\{i,j;l_1,l_2\}}$$

Обозначим, как и выше, $\gamma_{i,j} = \det K_{\{i,l;\ l_1,l_2\}}$, причем $\gamma_{i_1 j_1} >> 0$, а $\gamma_{i_2 j_2} < 0$ и перепишем равенство в виде:

$$\det K = \left[\sum_{2i-1=1}^{n} \alpha_i - \sum_{2i=1}^{n} \alpha_i\right] * \left[\sum_{2j-1=1}^{n} \alpha_j - \sum_{2j=1}^{n} \alpha_j\right] * \gamma_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

Выпишем слагаемые для $2i-1=1..n$:

$$\sum_{2i-1=1}^{n-1}\alpha_i*\left[\sum_{2j-1=1}^{n-1}\alpha_j-\sum_{2j=1}^{n-1}\alpha_j\right]*\gamma_{i,j}=\sum_{2i-1=1}^{n}\alpha_i\sum_{2j-1=1}^{n-1}\alpha_j*\gamma_{i,j}-\sum_{2i-1=1}^{n}\alpha_i\sum_{2j=1}^{n-1}\alpha_j*\gamma_{i,j}=$$

$$\sum_{2i_1-1=1}^{n}\alpha_{i_1}\sum_{2j_1-1=1}^{n-1}\alpha_{j_1}*\gamma_{i_1,j_1}+\sum_{2i_2-1=1}^{n}\alpha_{i_2}\sum_{2j_2-1=1}^{n-1}\alpha_{j_2}*\gamma_{i_2,j_2},\quad i,j=1,2,\dots$$

Обозначим $\overline{\alpha}=\max(\alpha_i,\alpha_j)$ и $\underline{\alpha}=\min(\alpha_i,\alpha_j)$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\underline{\alpha}^2\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n}\sum_{2j_1-1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2-1=1}^{n}\sum_{2j_2=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]-\overline{\alpha}^2\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n}\sum_{2j_1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2-1=1}^{n}\sum_{2j_2-1=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]\le$$

$$\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n}\alpha_{i_1}\sum_{2j_1-1=1}^{n-1}\alpha_{j_1}*\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2-1=1}^{n}\alpha_{i_2}\sum_{2j_2-1=1}^{n-1}\alpha_{j_2}*\gamma_{i_2,j_2}\right]-$$

$$\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n}\alpha_{i_1}\sum_{2j_1=1}^{n-1}\alpha_{j_1}*\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2-1=1}^{n}\alpha_{i_2}\sum_{2j_2=1}^{n-1}\alpha_{j_2}*\gamma_{i_2,j_2}\right]\le$$

$$\overline{\alpha}^2\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n}\sum_{2j_1-1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2-1=1}^{n}\sum_{2j_2=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]-\underline{\alpha}^2\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n}\sum_{2j_1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2-1=1}^{n}\sum_{2j_2-1=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]$$

Выпишем в явном виде $\overline{\alpha}$ и $\underline{\alpha}$:

$$\left\{\begin{array}{l}
\underline{\alpha}^2\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n}\sum_{2j_1-1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2-1=1}^{n}\sum_{2j_2=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]-\overline{\alpha}^2\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n}\sum_{2j_1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2-1=1}^{n}\sum_{2j_2=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]- \\
\overline{\alpha}^2\left[\sum_{2i_1=1}^{n}\sum_{2j_1-1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2=1}^{n}\sum_{2j_2=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]+\underline{\alpha}^2\left[\sum_{2i_1=1}^{n}\sum_{2j_1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2=1}^{n}\sum_{2j_2-1=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]=\varepsilon-\delta \\
\overline{\alpha}^2\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n}\sum_{2j_1-1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2-1=1}^{n}\sum_{2j_2=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]-\underline{\alpha}^2\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n}\sum_{2j_1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2-1=1}^{n}\sum_{2j_2-1=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]- \\
\underline{\alpha}^2\left[\sum_{2i_1=1}^{n}\sum_{2j_1-1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2=1}^{n}\sum_{2j_2=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]-\overline{\alpha}^2\left[\sum_{2i_1=1}^{n}\sum_{2j_1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2=1}^{n}\sum_{2j_2-1=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]=\varepsilon+\delta
\end{array}\right.,$$

$i,j=1,2,\dots$

Сгруппируем элементы при $\overline{\alpha}^2$ и $\underline{\alpha}^2$:

$$\left\{\begin{array}{l}
\underline{\alpha}^2\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n}\sum_{2j_1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2-1=1}^{n}\sum_{2j_2=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}+\sum_{2i_1=1}^{n}\sum_{2j_1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2=1}^{n}\sum_{2j_2-1=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]- \\
\overline{\alpha}^2\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n}\sum_{2j_1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2-1=1}^{n}\sum_{2j_2-1=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}+\sum_{2i_1=1}^{n}\sum_{2j_1-1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2=1}^{n}\sum_{2j_2=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]=\varepsilon-\delta \\
\overline{\alpha}^2\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n}\sum_{2j_1-1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2-1=1}^{n}\sum_{2j_2=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}+\sum_{2i_1=1}^{n}\sum_{2j_1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2=1}^{n}\sum_{2j_2-1=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]- \\
\underline{\alpha}^2\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n}\sum_{2j_1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2-1=1}^{n}\sum_{2j_2-1=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}+\sum_{2i_1=1}^{n}\sum_{2j_1-1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2=1}^{n}\sum_{2j_2=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]=\varepsilon+\delta
\end{array}\right.$$

Обозначим $\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n}\sum_{2j_1-1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2-1=1}^{n}\sum_{2j_2=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}+\sum_{2i_1=1}^{n}\sum_{2j_1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2=1}^{n}\sum_{2j_2-1=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]=C_1$ и $\left[\sum_{2i_1-1=1}^{n}\sum_{2j_1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2-1=1}^{n}\sum_{2j_2-1=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}+\sum_{2i_1=1}^{n}\sum_{2j_1-1=1}^{n-1}\gamma_{i_1,j_1}-\sum_{2i_2=1}^{n}\sum_{2j_2=1}^{n-1}\gamma_{i_2,j_2}\right]=C_2$. Тогда решение системы, найденной выше, запишется:

$$\overline{\alpha}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{C_1-C_2}+\frac{\delta}{C_1+C_2}},\ \underline{\alpha}=\sqrt{\frac{(\varepsilon-\delta)}{C_1}+\frac{C_1}{C_2}\left[\frac{\varepsilon}{C_1-C_2}+\frac{\delta}{C_1+C_2}\right]}.$$

Рассмотрим случай $m>1$ нулевых столбцов матрицы K. Пусть

$S=(s_1,\dots,s_m)$, где $s_i\in\{\{-1,1\}\{-1,1\}\}$ для $\forall i=\overline{1,m}$. Обозначим $\{S\}$ – совокупность всех возможных векторов S. Введем $a_k\alpha_{i_k}=\sum_{2i_k-1=1}^{n-k+1}\alpha_{i_k}$, $b_k\alpha_{i_k}=\sum_{2i_k=1}^{n-k+1}\alpha_{i_k}$. Введем также функцию $\tilde f:\{S,\alpha_k\}\to\{\alpha_k,1\}$, $\tilde{\tilde f}:\{S,\alpha_k\}\to\{\alpha_k,1\}$,

$$\tilde f=\tilde f(S,\alpha_k)=\begin{cases}\alpha_k,\ \prod_{j=1}^{m}s_j=1\\ 1,\ \prod_{j=1}^{m}s_j=-1\end{cases}$$

$$\tilde f=\tilde f(S,\alpha_k.\alpha_{i_k})=\begin{cases}\alpha_k\alpha_{i_k},\ \prod_{j=f_1}^{m}s_j=1\\ 1,\ \prod_{j=1}^{m}s_j=-1\end{cases}$$

$$\tilde{\tilde f}=\tilde{\tilde f}(S,\alpha_k)=\begin{cases}1,\ \prod_{j=1}^{m}s_j=-1\\ -\alpha_k,\ \prod_{j=1}^{m}s_j=-1\end{cases}$$

$$\tilde{\tilde f}=\tilde{\tilde f}(S,\alpha_k.\alpha_{i_k})=\begin{cases}1,\ \prod_{j=1}^{m}s_j=1\\ -\alpha_k\alpha_{i_k},\ \prod_{j=f_1}^{m}s_j=-1,\end{cases}$$

тогда $\det K=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}*\alpha_i*\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+1}*\alpha_j*\det K_{\{i,j;l_1,l_2\}}$ можно записать в виде:

$$\det K=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}*\alpha_i*\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+1}*\alpha_j*\det K_{\{i,j;l_1,l_2\}}=$$

$$\sum\nolimits_{\{S\}}*\prod_{j=1}^{m}\tilde f(S,a_k,\alpha_{i_k})\tilde{\tilde f}(S,b_k,\alpha_{i_k})*\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}},$$

где $S\in(-1,-1),(1,-1),(-1,1),(1,1)$.

Для того чтобы переписать систему (4) в общем виде, введем следующие фильтрующие функции. Назовем первую пару фильтрующих функций – функциями фильтрования по корректирующему параметру, а вторую пару – функциями фильтрования по уменьшенному определителю.

$$\tilde{g}(S)=\begin{cases}1, \prod_{j=1}^{m} s_j=1 \\ 0, \prod_{j=1}^{m} s_j=-1\end{cases} \text{ и } \tilde{\tilde{g}}(S)=\begin{cases}0, \prod_{j=1}^{m} s_j=1 \\ 1, \prod_{j=1}^{m} s_j=-1\end{cases}$$

$$\tilde{q}(S)=\begin{cases}1, \det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}=1 \\ 0, \det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}=-1\end{cases} \text{ и } \tilde{\tilde{q}}(S)=\begin{cases}0, \det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}=1 \\ 1, \det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}=-1\end{cases}.$$

Воспользовавшись введенными функциями, перепишем системы уравнений следующим образом:

$$\begin{cases}
\underline{\alpha}^2\sum_{\{S\}}*\left(\max\left(\tilde{g}(S)*\tilde{q}(S)*\tilde{\tilde{g}}(S)*\tilde{\tilde{q}}(S)\right)\right)* \\
\prod_{j=1}^{m}\tilde{f}\left(S,a_j,\alpha_{i_j}\right)\tilde{\tilde{f}}\left(S,b_j,\alpha_{i_j}\right)*\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}+ \\
\overline{\alpha}^2\sum_{\{S\}}*\left(\max\left(\tilde{g}(S)*\tilde{q}(S)*\tilde{\tilde{g}}(S)*\tilde{\tilde{q}}(S)\right)\right)* \\
\prod_{j=1}^{m}\tilde{f}\left(S,a_j,\alpha_{i_j}\right)\tilde{\tilde{f}}\left(S,b_j,\alpha_{i_j}\right)*\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}=\varepsilon-\delta \\
\underline{\alpha}^2\sum_{\{S\}}*\left(\max\left(\tilde{g}(S)*\tilde{q}(S)*\tilde{\tilde{g}}(S)*\tilde{\tilde{q}}(S)\right)\right)* \\
\prod_{j=1}^{m}\tilde{f}\left(S,a_j,\alpha_{i_j}\right)\tilde{\tilde{f}}\left(S,b_j,\alpha_{i_j}\right)*\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}+ \\
\overline{\alpha}^2\sum_{\{S\}}*\left(\max\left(\tilde{g}(S)*\tilde{q}(S)*\tilde{\tilde{g}}(S)*\tilde{\tilde{q}}(S)\right)\right)* \\
\prod_{j=1}^{m}\tilde{f}\left(S,a_j,\alpha_{i_j}\right)\tilde{\tilde{f}}\left(S,b_j,\alpha_{i_j}\right)*\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}=\varepsilon+\delta
\end{cases}, i, j=1,2,\dots,n$$

Переобозначив через C_1 и C_2 выражения, стоящие соответственно при $\overline{\alpha}$, $\underline{\alpha}$, мы можем решить эту систему уравнений, как показано выше.

Докажем, опираясь на приведенные выше леммы, следующую теорему.

Теорема о рациональной корректировке матрицы приростной фондоемкости

Пусть $\{l_1,\dots,l_m\}$ номера нулевых столбцов матрицы K. Для того чтобы $\det K\in(\varepsilon-\delta,\varepsilon+\delta)$, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_i\in\Omega,\forall i$, где множество Ω определяется как $\Omega=\left[\overline{\alpha},\underline{\alpha}\right]$, где

$$\overline{\alpha} = \sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{C_1 - C_2} + \frac{\delta}{C_1 + C_2}}\ ,\ \underline{\alpha} = \sqrt[m]{\frac{(\varepsilon - \delta)}{C_1} + \frac{C_1}{C_2}\left[\frac{\varepsilon}{C_1 - C_2} + \frac{\delta}{C_1 + C_2}\right]}$$

$$C_1 = \sum_{\{S\}} * \left(\max\left(\tilde{g}(S) * \tilde{q}(S) * \tilde{\tilde{g}}(S) * \tilde{\tilde{q}}(S)\right)\right) *$$

$$\prod_{j=1}^{m} \tilde{f}\left(S, a_j, \alpha_{i_j}\right) \tilde{\tilde{f}}\left(S, b_j, \alpha_{i_j}\right) * \det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}$$

$$C_2 = \sum_{\{S\}} * \left(\max\left(\tilde{g}(S) * \tilde{\tilde{g}}(S) * \tilde{\tilde{q}}(S) * \tilde{q}(S)\right)\right) *$$

$$\prod_{j=1}^{m} \tilde{f}\left(S, a_j, \alpha_{i_j}\right) \tilde{\tilde{f}}\left(S, b_j, \alpha_{i_j}\right) * \det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}$$

Доказательство:

Допустим, что лемма верна для $m-1$ нулевого столбца. Покажем справедливость леммы для m нулевых столбцов. Запишем $\det K$ в следующем виде:

$$\det K = \sum_{i_1=1}^{n} (-1)^{i_1+1} * \dots * \sum_{j_{m-1}=1}^{n-m+2} (-1)^{j_{m+1}} * \alpha_{j_{m-1}} * \det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}.$$

Представим $\det K_{\{i_1,\dots,j_{m-1};l_1,\dots,l_{m-1}\}}$ в виде:

$$\det K_{\{i_1,\dots,j_{m-1};l_1,\dots,l_{m-1}\}} = \sum_{i_m=1}^{n-m+1} (-1)^{i_{m+1}} * \alpha_{i_m} * \det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}$$

В силу верности утверждения для $m-1$ нулевых столбцов верно следующее неравенство:

$$\underline{\alpha}^{m-1} * \sum_{i_1=1}^{n} (-1)^{i_1+1} \dots \sum_{i_{m-1}=1}^{n-m+2} (-1)^{i_{m-1}+1} * \det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}} \le$$

$$\sum_{i_1=1}^{n} (-1)^{i_1+1} * \alpha_{i_1} \sum_{i_2=1}^{n-1} (-1)^{i_2+1} * \alpha_{i_2} * \det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}} \le$$

$$\overline{\alpha}^{m-1} * \sum_{i_1=1}^{n} (-1)^{i_1+1} \dots \sum_{i_2=1}^{n-1} (-1)^{i_2+1} * \det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}$$

Основываясь на том, что мы можем представить $\det K_{\{i_1,\dots,j_{m-1};l_1,\dots,l_{m-1}\}}$ в виде:

$$\det K_{\{i_1,\dots,j_{m-1};l_1,\dots,l_{m-1}\}} = \sum_{i_m=1}^{n-m+1} (-1)^{i_m+1} * \alpha_{i_m} * \det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}} =$$

$$= \left[\sum_{2i_{m_1}-1=1}^{n-m_1+1} \alpha_{i_{m_1}} * \det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}} - \sum_{2i_{m_2}-1=1}^{n-m_2+1} \alpha_{i_{m_2}} * \det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}\right] -$$

$$- \left[\sum_{2i_{m_2}=1}^{n-m_2+1} \alpha_{i_{m_2}} * \det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}} - \sum_{2i_{m_2}-1=1}^{n-m_2+1} \alpha_{i_{m_2}} * \det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}\right]$$

И оценить его снизу:

$$\varepsilon-\delta=\underline{\alpha}*\left[\sum_{2i_{m_1}-1=1}^{n-m_1+1}\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}-\sum_{2i_{m_2}=1}^{n-m_2+1}\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}\right]-$$

$$-\overline{\alpha}*\left[\sum_{2i_{m_2}=1}^{n-m_2+1}\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}-\sum_{2i_{m_2}-1=1}^{n-m_2+1}\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}\right]\le$$

$$\le\left[\sum_{2i_{m_1}-1=1}^{n-m_1+1}\alpha_{i_{m_1}}*\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}-\sum_{2i_{m_2}=1}^{n-m_2+1}\alpha_{i_{m_2}}*\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}\right]-$$

$$-\left[\sum_{2i_{m_2}=1}^{n-m_2+1}\alpha_{i_{m_2}}*\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}-\sum_{2i_{m_2}-1=1}^{n-m_2+1}\alpha_{i_{m_2}}*\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}\right]\le$$

$$\le\overline{\alpha}*\left[\sum_{2i_{m_1}-1=1}^{n-m_1+1}\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}-\sum_{2i_{m_2}=1}^{n-m_2+1}\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}\right]-$$

$$-\underline{\alpha}*\left[\sum_{2i_{m_2}=1}^{n-m_2+1}\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}-\sum_{2i_{m_2}-1=1}^{n-m_2+1}\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}\right]=\varepsilon+\delta$$

Обозначим теперь $\overline{\alpha}=\max(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_{m-1}})$ и $\underline{\alpha}=\min(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_{m-1}})$ и выпишем их в явном виде. Для этого в системе уравнений (6) введем следующие обозначения:

$$D_1=\sum_{\{S\}}*\left(\max\left(\tilde{g}(S)*\tilde{q}(S)*\tilde{\tilde{g}}(S)*\tilde{\tilde{q}}(S)\right)\right)*\prod_{j=1}^{m}\tilde{f}\left(S,a_j,\alpha_{i_j}\right)\tilde{\tilde{f}}\left(S,b_j,\alpha_{i_j}\right)$$

$$D_2=\sum_{\{S\}}*\left(\max\left(\tilde{g}(S)*\tilde{\tilde{g}}(S)*\tilde{\tilde{q}}(S)*\tilde{q}(S)\right)\right)*\prod_{j=1}^{m}\tilde{f}\left(S,a_j,\alpha_{i_j}\right)\tilde{\tilde{f}}\left(S,b_j,\alpha_{i_j}\right)$$

Тогда в силу верности утверждения леммы для $m-1$ нулевого столбца справедлива следующая запись:

$$\begin{cases}\underline{\alpha}*D_1*\det K_{\{i_1,\dots,j_{m-1};l_1,\dots,l_{m-1}\}}-\overline{\alpha}*D_2*\det K_{\{i_1,\dots,j_{m-1};l_1,\dots,l_{m-1}\}}=\varepsilon-\delta\\ \overline{\alpha}*D_1*\det K_{\{i_1,\dots,j_{m-1};l_1,\dots,l_{m-1}\}}-\underline{\alpha}*D_2*\det K_{\{i_1,\dots,j_{m-1};l_1,\dots,l_{m-1}\}}=\varepsilon+\delta\end{cases}$$

А используя представление $\det K_{\{i_1,\dots,j_{m-1};l_1,\dots,l_{m-1}\}}$ через $\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}$ будет верна и аналогичная система для случая m нулевых столбцов:

$$\begin{cases}\underline{\alpha}*D_1*\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}-\overline{\alpha}*D_2*\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}=\varepsilon-\delta\\ \overline{\alpha}*D_1*\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}-\underline{\alpha}*D_2*\det K_{\{i_1,\dots,j_m;l_1,\dots,l_m\}}=\varepsilon+\delta\end{cases}$$

Отсюда можем найти решение системы:

$$\overline{\alpha}=\sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{C_1-C_2}+\frac{\delta}{C_1+C_2}},\quad \underline{\alpha}=\sqrt[m]{\frac{(\varepsilon-\delta)}{C_1}+\frac{C_1}{C_2}\left[\frac{\varepsilon}{C_1-C_2}+\frac{\delta}{C_1+C_2}\right]}$$

Таким образом, мы показали справедливость утверждения и для случая m столбцов.

Сущность и способ формирования составной траектории сбалансированного роста региональной системы.

Если предположить, что все параметры X не зависят от времени, то эта функция, определяемая формулой (3), может оказаться невозрастающей на всем промежутке $\left[t_0,\ T\right]$. Поэтому возникает необходимость оценки реального состояния экономической системы, определения момента времени, когда эта оценка должна быть осуществлена, и корректировки исходных параметров с помощью вложения дополнительных средств в систему. Корректируя в необходимые моменты времени матрицу приростных фондоемкостей, можно построить составную траекторию развития сбалансированного роста экономической региональной системы.

Траектория называется составной, если она определена как совокупность кусочно-непрерывных монотонно-возрастающих функций $\underline{\left\langle f_1,\ldots,f_k\right\rangle}$, где каждая из функций f_i определена на отрезке $\left[t_{i-1},\ t_i\right]$, $i=\overline{1,k}$ и является решением модели экономического роста.

В качестве модели экономического роста будем использовать модель динамического межотраслевого баланса (1). Обозначим траекторию, рассчитанную на промежутке времени $\left[t_{i-1},\ t_i\right]$ как $X^i\left(t\right)=f_i\left(t,\ K\left(t\right),A,Y,X0\right)$. Для функции X^i справедливы следующие свойства:

1) X^i непрерывна на интервале $\left[t_{i-1},\ t_i\right]$;

2) X^i дифференцируема на интервале $\left[t_{i-1},\ t_i\right]$;

Каждый из параметров функции $K_t,A,Y,X0$ рассчитывается на основе модели динамического межотраслевого баланса, причем матрица A считается постоянной и не зависит от времени, матрица Y вычисляется как αX, а матрица K_t является постоянной на промежутке времени $\left[t_{i-1},\ t_i\right]$, т.е. для данной функции X^i. Таким образом, в моменты времени t_i корректируется именно матрица приростных фондоемкостей K и пересчитывается вектор валового выпуска X уже с новыми параметрами.

Изменение матрицы K в момент времени t достигается с помощью решения следующей модели:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i(t_1)-X_i(t))\to\max$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}(k_{ij}+\Delta k_{ij})(X_i(t_1)-X_i(t))\le I_j, \quad j=\overline{1,n}\\ \underline{\Delta k_{ij}}\le k_{ij}\le\overline{\Delta k_{ij}}\\ 0\le X_j\left(t\right)\le X_i\left(t_1\right), \quad i=\overline{1,n}\end{cases}$$

где t_1 – некоторый будущий момент времени, до которого строится элемент траектории; ΔK – искомая величина изменения матрицы приростных фондоемкостей; $X_i(t)$ – известная величина валового выпуска в момент времени t; $X_i(t_1)$ – прогнозируемая величина валового выпуска в момент времени t_1 с новой матрицей приростных фондоемкостей $K+\Delta K$, рассчитываемая по формуле (3); I_j – размер инвестиций, направляемых на j-ую отрасль.

Заключение

Анализ показал, что при неизменных параметрах (матрицах прямых затрат и приростных фондоемкостей) в модели динамического межотраслевого баланса траектория для некоторых отраслей может убывать, причем возможно убывание даже с начального момента времени. Понятно, что в такой системе нельзя говорить не то что об экономическом росте, но и вообще о целесообразности ее функционирования в таком регионе, т.е. необходим переход к новому региону.

Для перехода к новому региону необходим анализ ее состояния, контроль, с помощью которого можно выявить несоответствие развития системы и поставленных целей. В случае выявления такого несоответствия контролируемую систему необходимо модернизировать, в частности изменить ее параметры с целью получения стабильного экономического роста. Для этого как нельзя лучше подходит изменение матрицы приростных фондоемкостей.

К сожалению, здесь не обойтись без дополнительных денежных вложений, которые и представляют собой инвестиции для увеличения производственной мощности, отражающиеся в матрице приростных фондоемкостей и позволяющие увеличить валовый выпуск отстающей отрасли. Тем не менее иногда с помощью вложения не слишком большой суммы денег и, главное, перераспределения инвестиций можно получить устойчивый экономический рост всей системы.

Список источников

1. Баева Н.Б., Азарнова Т.В. *Модели производственных процессов, логистики и риска*. Воронеж, Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2005.
2. Баева Н.Б., Куркин Е.В. Модели и методы формирования траекторий эволюционного развития региональной социально-экономической системы // *Современная экономика: проблемы и решения*, 2015, no. 3 (63), с. 8-17.
3. Баева Н.Б., Чембарцев Д.С. Прогнозирование развития региональной экономической системы в условиях неопределенности // *Экономическое прогнозирование: модели и методы: материалы III Международной научно-практической конференции*. Воронеж, 2007, ч. 1, с. 138-143.
4. Бондаренко Ю.В. Модели и методы построения динамических стандартов потребления в региональной экономической системе // *Экономика и менеджмент систем управления*, 2012, т. 4, no. 2, с. 15-21.
5. Дырхеев К.П. Возможности применения линейных и нелинейных моделей для анализа региональной экономической системы // *Вестник Бурятского государственного университета. Экономика и менеджмент*, 2013, no. 1, с. 97-102.
6. Зоидов К.Х. Эволюционально-институционный подход и методология проведения антикризисных мероприятий в переходной экономике // *Экономика и математические методы*, 2004, т. 40, no. 3, с. 16-32.

7. Косов В.В. *Межотраслевой баланс*. Москва, Экономика, 1966.

8. Лагоша Б.А., Шаркович В.Г., Дегтярева Т.Д. *Методы и модели совершенствования организационных структур*. Москва, Наука, 1988.

9. Моисеев В.О., Морозов А.В., Стрекалова Г.Р. Анализ региональных экономических систем с использованием эконометрических моделей // *Вестник Казанского технологического университета*, 2014, т. 17, no. 6, с. 303-306.

10. Полунин Л.В. Методологические особенности российской модели трансформируемой региональной экономической системы // *Социально-экономические явления и процессы,* 2012, no. 10 (44), с. 160-164.

11. Селютина О.Ю. Современные методы и модели изучения региональных экономических систем // *Экономический анализ: теория и практика*, 2011, no. 10, с. 48-56.

12. Хашева З.М., Молчан А.С. Построение модели управления устойчивым развитием региональных социально-экономических систем // *Научный вестник Южного института менеджмента*, 2013, no. 4, с. 67-73.

MODELS AND METHODS OF THE COMPOSITE TRAJECTORY OF THE REGIONAL SOCIAL AND ECONOMIC SYSTEM BALANCED GROWTH

Baeva Nina Borisovna, Cand. Sc. (Econ.), Assoc. Prof.

Voronezh State University, University sq., 1, Voronezh, Russia, 394018;

e-mail: baeva@amm.vsu.ru

Purpose: models and methods development of the trajectory formation of a balanced the regional economic growth (RES). *Discussion*: we consider the formation and analysis models technology of the regional economy growth, described as a dynamic intersectoral balance model on the assumption of possible changes in the RES growth. The analysis object is the matrix of differential capital intensity. *Results*: we prove the theorem on matrix rational adjustment of differential capital intensity, the need for which is caused by the zero rows and columns possible presence due to non-participation of some industries in the process of the equipment modernization. A formula of zero elements adjustments on which developed and analyzed zero elements variants to ensure balanced main indicators growth of the regional economy.

Keywords: composite trajectory, balanced RES growth, the matrix of differential capital intensity.

Reference

1. Baeva N.B., Azarnova T.V. *Modeli proizvodstvennykh protsessov, logistiki i riska*. Voronezh, Izd-vo Voronezh. gos. un-ta, 2005. (In Russ.).

2. Baeva N.B., Kurkin E.V. Modeli i metody formirovaniia traektorii evoliutsionnogo razvitiia regional'noi sotsial'no-ekonomicheskoi sistemy. *Sovremennaia ekonomika: problemy i resheniia*, 2015, no. 3 (63), pp. 8-17. (In Russ.)

3. Baeva N.B., Chembartsev D.S. Prognozirovanie razvitiia regional'noi ekonomicheskoi sistemy v usloviiakh neopredelennosti. *Ekonomicheskoe prognozirovanie: modeli i metody: materialy III Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii*. Voronezh, 2007, ch. 1, pp. 138-143. (In Russ.)

4. Bondarenko Iu.V. Modeli i metody postroeniia dinamicheskikh standartov potrebleniia v regional'noi ekonomicheskoi sisteme. *Ekonomika i menedzhment sistem upravleniia*, 2012, t. 4, no. 2, pp. 15-21. (In Russ.)

5. Dyrkheev K.P. Vozmozhnosti primeneniia lineinykh i nelineinykh modelei dlia analiza regional'noi ekonomicheskoi sistemy. *Vestnik Buriatskogo gosudarstvennogo universiteta. Ekonomika i menedzhment*, 2013, no. 1, pp. 97-102. (In Russ.)

6. Zoidov K.Kh. Evoliutsional'no-institutsionnyi podkhod i metodologiia provedeniia antikrizisnykh meropriiatii v perekhodnoi ekonomike. *Ekonomika i matematicheskie metody,* 2004, t. 40, no. 3, pp. 16-32. (In Russ.)

7. Kosov V.V. *Mezhotraslevoi balans.* Moscow, Ekonomika, 1966. (In Russ.)

8. Lagosha B.A., Sharkovich V.G., Degtiareva T.D. *Metody i modeli sovershenstvovaniia organizatsionnykh struktur*. Moscow, Nauka, 1988. (In Russ.)

9. Moiseev V.O., Morozov A.V., Strekalova G.R. Analiz regional'nykh ekonomicheskikh sistem s ispol'zovaniem ekonometricheskikh modelei. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta*, 2014, t. 17, no. 6, pp. 303-306. (In Russ.)

10. Polunin L.V. Metodologicheskie osobennosti rossiiskoi modeli transformiruemoi regional'noi ekonomicheskoi sistemy. *Sotsial'no-ekonomicheskie iavleniia i protsessy*, 2012, no. 10 (44), pp. 160-164. (In Russ.)

11. Seliutina O.Iu. Sovremennye metody i modeli izucheniia regional'nykh ekonomicheskikh sistem. *Ekonomicheskii analiz: teoriia i praktika*, 2011, no. 10, pp. 48-56. (In Russ.)

12. Khasheva Z.M., Molchan A.S. Postroenie modeli upravleniia ustoichivym razvitiem regional'nykh sotsial'no-ekonomicheskikh sistem. *Nauchnyi vestnik Iuzhnogo instituta menedzhmenta*, 2013, no. 4, pp. 67-73. (In Russ.)