УДК 336.76

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПОРТФЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СКАЧКОВ ЦЕН РИСКОВЫХ АКТИВОВ

И.Г. Наталуха,
кандидат экономических наук, доцент кафедры экономики и менеджмента Кисловодского института экономики и права; in63@mail.ru

Построена модель фондового инвестирования, позволяющая проанализировать оптимальные портфельные стратегии агента финансового рынка в стохастической инвестиционной среде с учетом возможных скачков цен активов большой амплитуды.
Ключевые слова: инвестиции, рисковые активы, оптимизация, стохастические процессы

В последнее время теория и практика выбора оптималь¬ного финансового портфеля столкнулась с отличительной чертой современных фондовых рынков: стохастичностью эволюции инвестиционной среды – краткосрочной процентной ставки, цен рисковых активов, ожидаемых ставок доходности, вариационно-ковариационной матрицы доходностей по рисковым активам, ожидаемой скорости изменения дохода инвестора вне финансового рынка, а также корреляции между перечисленными переменными [1-3]. Отмеченные особенности существенно влияют на оптимальный портфельный выбор инвестора, который может существенно отличаться от определяемого классической портфель¬ной теорией Марковица – Тобина – Шарпа. Кроме того, инвестирование неотделимо от текущего потребления (инвесторы, как правило, извлекают полезность не только из конечного капитала на инвестиционном горизонте, но и из текущего потребления в различные моменты времени), а инвестиционная стратегия требует динамической реструктуризации портфеля с учетом стохастических и кризисных явлений различной природы, что также не может быть учтено в рамках классической теории. Фундаментальное значение в портфельной теории имеет проблема анализа ситуации, когда распределение доходности финансовых инструментов существенно отклоняется от нормального. Как правило, распределение доходности рисковых активов на фондовых рынках в условиях стохастического и скачкообразного изменения цен активов характеризуется значительными асимметрией и эксцессом (так называемые «жирные» хвосты распределений, когда на концах хвостов, т.е. в области очень больших и очень малых доходностей, имеет место повышенная плотность распределения по сравнению с нормальным, а также «лептоэксцесс» – островершинность и «платоэксцесс» – плосковершинность). Поскольку модель оценки финансовых активов и большая часть методов эконометрического анализа предполагают, что ожидаемые доходности подчиняются нормальному или логнормальному распределению, возникает проблема распространения этих теорий и методов на ситуации, когда доходности активов не распределены нормально.

Имеются многочисленные свидетельства того, что доходности финансовых активов не являются нормально распределенными. В качестве иллюстрации этого утверждения используем анализ доходности по индексу S&P 500. Табл. 1 показывает статистические свойства доходности по индексу S&P 500 при различных временных агрегатах. Из табл. 1 видно, что дневные доходы демонстрируют значительную отрицательную асимметрию (-1,31) и очень большой эксцесс (34,70); обе эти величины должны равняться нулю при нормальном распределении. Агрегация по времени уменьшает величины отклонений от нормального распределения, но со скоростью, значительно более низкой, чем предсказываемые центральной предельной теоремой значения для $1/\sqrt{n}$ для асимметрии и $\frac{1}{n}$ эксцесса, где n - число дней в агрегате.

Таблица 1

Характеристики доходности по индексу S&P 500

Число дней в агрегате	Математическое ожидание, %	Стандартное отклонение, %	Асимметрия γ_1	Эксцесс γ_2
1 день	12,64	13,66	-1,31	34,70
6 дней	12,71	14,70	-0,49	7,16
11 дней	12,69	14,52	-0,56	6,09
16 дней	12,73	14,46	-0,53	4,37
21 день	12,76	14,54	-0,42	3,29
26 дней	12,76	14,51	-0,40	2,91
31 день	12,76	14,45	-0,45	2,44
36 дней	12,76	14,51	-0,46	2,43
41 день	12,77	14,56	-0,42	2,56
46 дней	12,77	14,60	-0,38	2,49
51 день	12,79	14,63	-0,34	2,34
56 дней	12,80	14,64	-0,28	2,14

Будем описывать динамику цены рискового актива P_t следующим стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{dP_t}{P_t} = (\mu_t - \lambda S)dt + \sigma_t dz_t + \left(e^g - 1\right)dV(\lambda), \qquad (1)$$

где z_t – стандартное броуновское движение, μ_t– тенденция, σ_t– волатильность (мгновенное среднее квадратическое отклонение) цены актива, а

$dV(\lambda)$ определяет случайный процесс Пуассона с интенсивностью скачков λ (вероятность появления одного скачка за малый промежуток времени dt равна $\Pr(dV{=}1){=}\ \lambda\ dt$). Вероятность осуществления n скачков на инвестиционном горизонте τ определяется вероятностью Пуассона

$$\Pr_n(\tau) = e^{-\lambda\tau}\,\frac{(\lambda\tau)^n}{n!}.$$

Член $S{=}E\ (e^g\ {-}1)$ (E – оператор математического ожидания) описывает средний вклад скачков в цену актива в расчете на один скачок, а u– нормально распределенная случайная величина с $N(\mu_g, \sigma_g^2)$.

Скачки цен рисковых активов (и, соответственно, скачки доходности активов) являются источником отклонений распределения доходности от нормального распределения. Если тенденция μ и волатильность постоянны, математическое ожидание доходности

$$\ln\frac{P(t+\tau)}{P(t)}, \tag{2}$$

(натуральный логарифм относительной цены актива представляет собой непрерывно начисляемую доходность финансового титула за период времени τ) на временном горизонте длиной τ составляет $\mu\tau - \sigma^2\tau/2 - \lambda(S-\mu_g)\tau$. Используя лемму Ито, из уравнения (1) нетрудно получить обратное уравнение Колмогорова [4] для характеристической функции доходности (2), определяющее дисперсию и высшие моменты доходности (2):

$$K_2 = [\sigma^2 + \lambda(\mu_g^2 + \sigma_g^2)]\tau\,;K_3 = \lambda\mu_g[\mu_g^2 + 3\sigma_g^2)]\tau\,;$$

$$K_4 = \lambda(\mu_g^4 + 6\mu_g^2\sigma_g^2 + 3\sigma_g^4)]\tau\,,$$

где K_j– j-ый кумулянт доходности. Кумулянты связаны с центральными моментами m_j следующим образом $m_2 = K_2;\ \ m_3 = K_3;\ \ \ m_4 = K_4 + 3m_2^2$. Асимметрия и эксцесс определяются, соответственно, как нормированные третий и четвертый кумулянты

$$\gamma_1 = \frac{\lambda\mu_g(\mu_g^2 + 3\sigma_g^2)}{[\sigma^2 + \lambda(\mu_g^2 + \sigma_g^2)]^{3/2}\sqrt{\tau}};\quad \gamma_2 = \frac{\lambda(\mu_g^4 + 6\mu_g^2\sigma_g^2 + 3\sigma_g^4)}{[\sigma^2 + \lambda(\mu_g^2 + \sigma_g^2)]^2\,\tau}. \tag{3}$$

Из соотношений (3) видно, что появление скачков цен активов приводит к возникновению ненулевых асимметрии и эксцесса, которые равны нулю для нормального распределения. Скачки также увеличивают дисперсию доходности активов. Дисперсия доходности по активам, как нетрудно видеть, увеличивается с ростом частоты скачков λ, абсолютным значением математического ожидания величины скачка $|\mu_g|$ и условной дисперсии величины скачка σ_g^2. Коэффициент асимметрии зависит от математического ожидания величины скачка с учетом направления скачка. Еще одной интересной чертой стохастического процесса с учетом скачкообразных изменений цен активов является то, что коэффициенты асимметрии и эксцесса стремятся к нулю при увеличении инвестиционного горизонта. Коэффициент асимметрии уменьшается пропорционально квадратному корню из длиныгоризонта, а коэффициент эксцесса убывает пропорционально длине горизонта τ .

Из табл. 1 нетрудно видеть, что отклонение от нормального распределения в доходности по активам уменьшается при увеличении агрегатов по количеству дней. В этой связи может возникнуть представление, что если инвестиционный горизонт велик, то финансовым менеджерам необходимо лишь периодически (например, ежеквартально) реструктурировать свои инвестиционные портфели в соответствии с конъюнктурой фондового рынка, а влияние асимметрии и эксцесса на больших инвестиционных горизонтах становится незначительным в силу их малых величин. На самом деле этот аргумент неправилен, поскольку, как показано ниже, влияние асимметрии увеличивается с ростом среднего квадратического отклонения, а влияние эксцесса усиливается с ростом дисперсии. Поэтому для независимо и идентично распределенных динамических рядов доходности по активам, в то время как асимметрия и эксцесс убывают с ростом инвестиционного горизонта пропорционально $\sqrt{\tau}$ и n соответственно , их влияние также увеличивается пропорционально $\sqrt{\tau}$ и n. В результате такой взаимной компенсации получается, что влияние отклонений распределения доходности активов от нормального не меняется с ростом инвестиционного горизонта пропорционально n.

Простой калибровочный пример, результаты которого иллюстрируются в табл. 2, показывает относительное влияние отклонений распределения доходов по активам от нормального на характер инвестиционных решений. В этом примере инвестор имеет коэффициент относительного неприятия риска γ=4 и делает портфельный выбор между 5% безрисковым активом и акциями инвестиционного фонда, имитирующего индекс S&P 500. В табл. 2 представлены оптимальные размещения (в процентах) в индекс S&P 500 при различных инвестиционных горизонтах (в бизнес-днях).θ_1 есть вес размещения рискового актива в портфеле в предположении о нормальности распределения доходностей $\gamma_1=\gamma_2=0$; θ_2 соответствует нулевому эксцессу; θ_3 соответствует нулевой асимметрии; вес размещения θ_4 учитывает все четыре первые момента. В последнем столбце табл. 2 приведено процентное изменение в весе размещения капитала инвестора в рисковый актив с учетом и без учета отклонений от нормального распределения:

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} = 100\% \frac{\theta_4 - \theta_1}{\theta_1}.$$

Построенный пример показывает, что как отрицательная асимметрия, так и положительный эксцесс сокращают инвестиционный спрос на акции инвестиционного фонда. Под влиянием обоих этих факторов инвестор сокращает спрос на акции фонда приблизительно на 6%. Кроме того, как показал предшествующий анализ, влияние отклонений распределения доходности по активам от нормального не уменьшается с увеличением горизонта инвестирования. Таким образом, отклонения распределения доходности по активам от нормального является источником риска, который не может быть описан в рамках традиционного анализа на основе расчета математического ожидания и дисперсии. Увеличение инвестиционного горизонта, хотя и уменьшает величину асимметрии и эксцесса, в целом не снижает их влияние на размещение капитала в рисковые активы.

Таблица 2

Инвестиционное решение по индексу S&P 500

n	**θ_1**	**θ_2**	**θ_3**	**θ_4**	**$\Delta\theta/\theta$**
1 день	102,35	99,55	101,01	98,40	-3,84
6 дней	89,23	87,21	88,06	86,10	-3,51
11 дней	91,30	88,21	89,48	86,55	-5,20
16 дней	92,41	88,92	90,54	87,21	-5,63
21 день	91,83	88,76	90,07	87,06	-5,19
26 дней	92,20	89,02	90,34	87,18	-5,44
31 день	92,96	89,17	91,16	87,37	-6,01
36 дней	92,12	88,10	90,13	86,13	-6,51
41 день	91,54	87,73	89,23	85,42	-6,96
46 дней	91,09	87,65	88,66	85,15	-6,52
51 день	90,96	87,80	88,52	85,19	-6,35
56 дней	91,07	88,50	88,70	85,82	-5,76

Получим приближенное аналитическое выражение, определяющее портфельный выбор инвестора как функцию математического ожидания, дисперсии, асимметрии и эксцесса распределения сверхдоходности рисковых активов и исследовано влияние скачков цен активов на оптимальное портфельное решение. Предполагаем, что инвестор максимизирует свою ожидаемую полезность в следующем периоде $\max_{\theta_t} E_t u(W_{t+1})$, инвестируя средства в безрисковый актив (банковский счет) и один рисковый актив, так что для капитала инвестора можно записать следующее уравнение $W_{t+1} = W_t[\theta_t(R_{1,t+1} - R_f) + R_f]$. Здесь W_t и W_{t+1} – начальный и конечный капитал инвестора, $R_{1,t+1}$ – доходность рискового актива, R_f – доходность безрискового актива, θ_t – вес рискового актива в портфеле инвестора. Запишем условие первого порядка, которому должно удовлетворять оптимальное решение

$$E_t[u'(W_{t+1})(R_{1,t+1} - R_f)] = 0. \tag{4}$$

Решение этой статической (однопериодической) задачи определяет спекулятивный спрос инвестора на рисковый актив, соответствующий игнорированию инвестором изменения инвестиционных возможностей. Разложим предельную функцию полезности инвестора $u'(W_{t+1})$ в ряд Тейлора в окрестности ожидаемого капитала в следующем периоде $E_t\,[W_{t+1}]$. Подставляя полученное разложение в условие (4), получаем уравнение

$$0 = u^{(1)}(E_t[W_{t+1}])x_t + u^{(2)}(E_t[W_{t+1}])W_t\theta_t m_{2t} + \frac{1}{2}u^{(3)}(E_t(W_{t+1}])W_t^2\theta_t^2 \times$$
$$\times (m_{3t} + m_{2t}x_t) + \frac{1}{6}u^{(4)}(E_t[W_{t+1}])W_t^3\theta_t^3(m_{4t} + m_{3t}x_t) + O(\theta_t^4), \tag{5}$$

где $x_t = E_t R_{1,t+1} - R_f$ – ожидаемая сверхдоходность, m_{nt}– n-ый центральный момент распределения доходности рискового актива $R_{1,t+1}$, а $u^{(n)}(\cdot)$ – n- ая производная функции полезности.

Заметим, что традиционный результат портфельной теории, основанный на анализе математического ожидания и дисперсии распределения, следует из уравнения (5) в первом приближении:

$$\theta_t \approx -\frac{u^{(1)}(E_t[W_{t+1}])x_t}{u^{(2)}(E_t[W_{t+1}])W_t m_{2t}} = \frac{x_t}{\gamma m_{2t}}, \tag{6}$$

где $\gamma = -u^{(2)}W / u^{(1)}$ – коэффициент относительного неприятия риска. Дальнейший анализ показывает, что:

1) оптимальный вес рискового актива в портфеле возрастает при положительной асимметрии и уменьшается при положительном эксцессе;

2) влияние отклонений распределения доходности рисковых активов от нормального распределения увеличивается с ростом относительного неприятия риска инвестором;

3) влияние асимметрии на оптимальный вес рискового актива в портфеле увеличивается с ростом среднего квадратического отклонения, а влияние эксцесса усиливается с ростом дисперсии.

Далее изучим вопрос о влиянии скачков цен активов на оптимальный портфельный выбор. Инвестор максимизирует свой конечный капитал на инвестиционном горизонте T, инвестируя средства в безрисковый актив с постоянной непрерывно начисляемой ставкой r и один рисковый актив (который может представлять индекс акций), динамика цены которого P_t описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением (1). Рисковая премия по активу с ожидаемой сверхдоходностью $\nu_t = (\mu_t - \lambda S - R_f)/\sigma_t$ описывается случайным процессом Орнштейна – Уленбека с релаксацией к своему долгосрочному значению

$$d\nu_t = -k(\nu_t - \bar{\nu})dt + \sigma_\nu dz_{\nu t},$$

где σ_ν– волатильность рисковой премии, $z_{\nu t}$– стандартное броуновское движение, коррелированное с процессом $z_t : E[dz_t, dz_{\nu t}] = \rho dt$, ρ – коэффициент корреляции. Динамика капитала инвестора эволюционирует следующим образом:

$$dW_t = R_f W_t dt + \theta_t W_t \left[\sigma_t \nu_t dt + \sigma_t dz_t + (e^g - 1)dV(\lambda)\right],$$

где θ_t – доля капитала, размещаемого в рисковый актив. Неявная функция полезности инвестора, соответствующая максимизации его конечного капитала на инвестиционном горизонте, имеет вид

$$J(W, \nu_t, \tau) = \max_{\theta} E_t[e^{-R_f \tau} U(W_T)],\ \tau = T - t. \tag{7}$$

Анализ уравнения Беллмана, соответствующего задаче максимизации (7), приводит к следующему выражению для оптимальной инвестиционной стратегии:

$$\theta^*(W,\nu,t)=\left(-\frac{J_W}{J_{WW}W_t}\right)\frac{\nu_t}{\sigma_t}+\left(-\frac{J_{W\nu}}{J_{WW}W_t}\right)\frac{\sigma_\nu\rho}{\sigma_t}+\frac{\lambda E_t\left[J_W\left(\widetilde{W},\nu,\tau\right)\left(e^g-1\right)\right]}{-J_{WW}W_t\sigma_t^2}. \quad (8)$$

Оптимальное решение (8) есть сумма трех составляющих. Первый член представляет собой спекулятивную часть портфеля, второй член показывает, как инвестор должен оптимально хеджировать изменения инвестиционных возможностей. Последняя часть портфеля индуцирована случайным процессом Пуассона в динамике изменения цены актива.

Анализ показывает, что для умеренно не принимающих риск инвесторов ($\gamma>1$) спрос на хеджирование положителен и возрастает с ростом инвестиционного горизонта тогда и только тогда, когда рисковая премия отрицательно коррелированна с процессом, определяющим доходность рискового актива. По существу, отрицательная корреляция между рисковой премией и доходностью обеспечивает страховой механизм для инвестора, который поэтому рассматривает рисковый актив как «менее» рисковый и решает инвестировать в него больше. Если корреляция положительна, наблюдается противоположная ситуация. Установлено, что для не принимающих риск инвесторов ($\gamma>0$) вероятность скачка цены рискового актива, независимо от направления скачка, сокращает спекулятивный спрос инвестора (короткую или длинную позицию) на этот актив. Этот эффект усиливается с ростом неприятия риска инвестора. Для демонстрации влияния скачков цены актива на спекулятивный спрос и на спрос на хеджирование был проведен численный анализ соотношения (8).

На рис. 1 показано влияние на портфельное решение средней амплитуды скачков μ_g при нулевой волатильности скачков σ_g. При отрицательной корреляции между доходностью рискового актива и рисковой премией ($\rho=-0{,}8$) спрос на хеджирование в отсутствие скачков ($\mu_g=0$) положителен. С ростом средней амплитуды скачка в положительном направлении спрос на хеджирование убывает. Изменение спроса на хеджирование оказывает также неявное влияние на спекулятивный спрос. При уменьшении μ_g оптимальный вес рискового актива θ увеличивается за счет спроса на хеджирование, величина

$$\hat{S}_t=E_t\left[1+\theta(\nu,t,\tau)\left(e^g-1\right)\right]^{-\gamma}\left(e^g-1\right),$$

поэтому уменьшается и отрицательная разность $\hat{S}_t-S$ величивается по абсолютной величине, что приводит к снижению спекулятивного спроса. С увеличением средней амплитуды скачков цены актива в отрицательном направлении спекулятивный спрос резко снижается. При увеличении средней амплитуды скачков в положительном направлении спекулятивный спрос возрастает. Итак, по мере роста средней амплитуды скачка в положительном или отрицательном направлении спекулятивный спрос и спрос на хеджирование становятся очень большими, однако имеют противоположные знаки. Это приводит к тому, что с ростом средней амплитуды скачка (отрицательной или положительной) оптимальный вес рискового актива в портфеле инвестора сокращается. Так, в отсутствие скачков (μ_g=0) оптимальный вес рискового актива составляет θ=130,2 % (инвестор использует заемные средства для инвестирования в рисковый актив). Однако, когда средняя амплитуда скачка достигает μ_g=1, инвестор имеет только очень маленькую короткую позицию по рисковому активу: θ=-2,7 %. При больших отрицательных амплитудах скачков (μ_g=1) инвестор имеет длинную позицию, но также очень маленькую (θ=-16,8 %.). Итак, в случае вероятности скачков цены рискового актива оптимальная доля размещения капитала в рисковый актив резко сокращается.

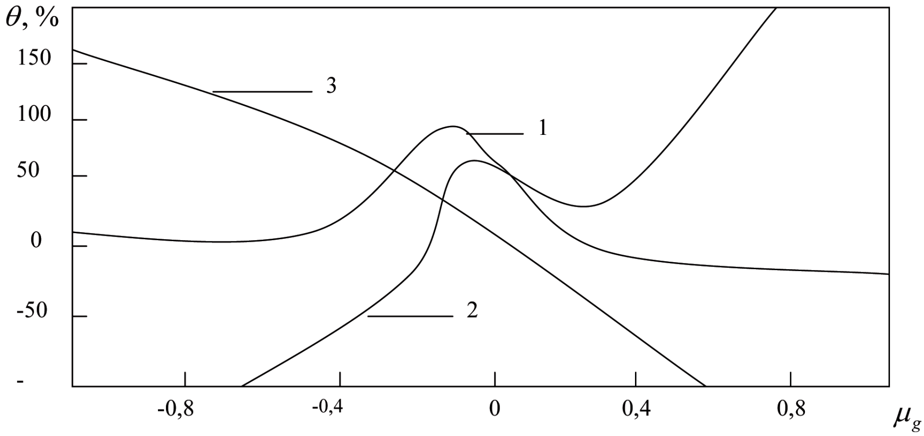

Рис. 1. Зависимость оптимального веса размещения капитала в рисковый актив от амплитуды скачков цены актива: 1 – полный спрос на рисковый актив; 2 – спекулятивный спрос; 3 – спрос на хеджирование; T=10 лет; σ_g=0; γ=4; R_f =5 %; ρ =-0,8; k=0,05; σ_v =0,05; σ=0,15; λ=0,5

На рис. 2 показано влияние волатильности скачка σ_g на оптимальный вес рискового актива в портфеле. Спекулятивный спрос инвестора сокращается с ростом волатильности скачков. Кроме того, при наличии отрицательной корреляции между доходностью рискового актива и рисковой премией увеличение волатильности скачков сокращает спрос на хеджирование. Поскольку рост волатильности скачков оказывает понижающее воздействие и на спекулятивный спрос, и на спрос на хеджирование, суммарный спрос на рисковый актив при этом снижается. Как показывает рис. 2, с ростом волатильности скачков от 0 до 50% полный спрос на рисковый актив снижается со 130% до 15%.

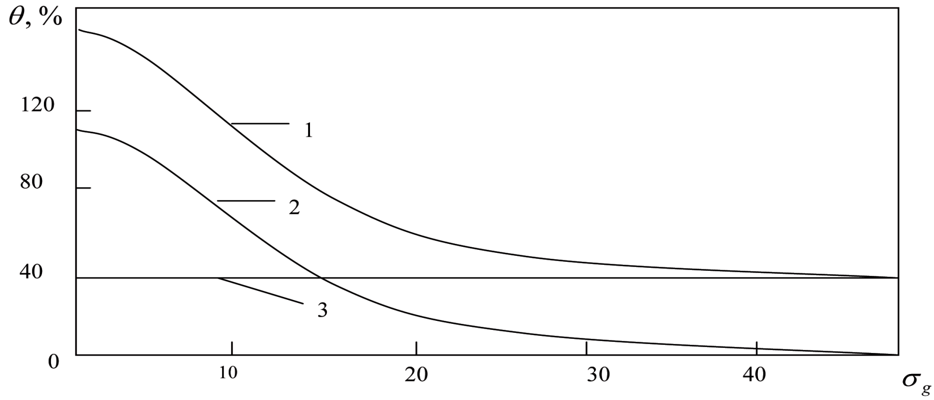

Рис. 2. Зависимость оптимального веса размещения капитала в рисковый актив от волатильности скачков цены актива: 1 – полный спрос; 2 – спекулятивный спрос; 3 – спрос на хеджирование; T =10 лет; μ_g=-0,05; γ=4; R_f=5 %; ρ=-0,8; k =0,05; σ=0,15; λ=0,5

Таким образом, отклонения распределения доходности рисковых активов от нормального является источником риска и/или выгоды, которые не могут быть описаны в рамках традиционного анализа на основе расчета математического ожидания и дисперсии. Как "жирные" хвосты, так и отрицательная асимметрия, наблюдаемые на фондовых рынках, означают существование дополнительного риска для инвестора и поэтому сокращают спекулятивный спрос инвестора на рисковые активы. Оптимальный вес рискового актива в портфеле инвестора резко снижается, когда наблюдается: (1) высокая вероятность возникновения скачков цены рискового актива, (2) скачки цены рискового актива в любом направлении, (3) большая неопределенность (волатильность) амплитуды скачков.

Список источников

1. Шарп, У. Инвестиции [Текст] / У. Шарп, Г. Александер, Д. Бейли / Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2003.

2. Campbell, J.Y. Consumption and portfolio decisions when expected returns are time–varying [Text] / J.Y. Campbell, L.M. Viceira // Quarterly Journal of Economics. – 1999. – V. 114, №2. – P. 433–495.

3. Наталуха, И.Г. Свойства оптимальных портфельных стратегий с учетом текущего потребления в стохастических условиях [Текст] / И.Г. Наталуха // Финансы и кредит. – 2006. – № 24 (228). – С. 15–19.

4. Ширяев, А.Н. Основы стохастической финансовой математики [Текст] / А.Н. Ширяев / Т. 1-2. – М.: Наука, 1998.

IDEAL PORTFOLIO DECISIONS HAVING JUMPS OF PRICES OF RISK ASSETS

I.G. Natalukha,
Ph.D. of Economy, Associate Professor of the Chair of Economy and Management of Kislovodsk Institute of Economy and Law;
in63@mail.ru

Model of fund investment that allow analyze ideal portfolio strategies of agent of financial trade in stochastic investing environment, considering possible jump of high amplitude of assets prices.
Keywords: investments, risk assets, optimization, stochastic processes.