УДК 51-77

КРИТИКА ГИПОТЕЗЫ ВОЗМОЖНОСТИ ПЕРЕХОДА ОТ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С НЕЗАВИСИМЫМИ ИСХОДАМИ К НАПРАВЛЕННОМУ ПРОЦЕССУ

Яновский Леонид Петрович,
доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и математических методов в экономике Воронежского государственного аграрного университета; leonidya60@yandex.ru
Боровиков Илья Михайлович,
аспирант Института менеджмента, маркетинга и финансов (г. Воронеж); ilyaflash@list.ru

Приводится доказательство, показывающее несостоятельность гипотезы Г.Р. Иваницкого о возможности перехода от случайного процесса с независимыми исходами и нулевым математическим ожиданием к направленному процессу (с ненулевым математическим ожиданием) при использовании стратегии игры, основанной на процессе с двумя случайными, равновероятными, независимыми исходами, включающую управление ставкой в зависимости от результатов предыдущих розыгрышей.

Ключевые слова: случайный процесс, направленный процесс, стратегия, математическое ожидание, прибыль, финансовый рынок, накопленный капитал, показатель Херста.

В работе «XXI век: что такое жизнь с точки зрения физики?» Г.Р. Иваницкого делается вывод о возможности перехода от случайного симметричного процесса с независимыми исходами к направленному процессу.

Автор указанной статьи, на примере процесса с двумя случайными, равновероятными, независимыми исходами (бросание монетки) предлагает стратегию игры, включающую управление ставкой в зависимости от результатов предыдущих розыгрышей и утверждает, что такая стратегия может быть прибыльной. Такой вывод обосновывается неоднозначно определённой «авторской» формулой математического ожидания и результатами численного эксперимента без детального описания алгоритма. Этот, как далее нами будет показано, ложный результат, приводит автора к следующему глобальному выводу: величайшей находкой природы стало появление у форм жизни памяти хотя бы на один цикл изменения внешней среды.

Суть стратегии по Иваницкому заключается в управлении ставкой по следующему алгоритму: если на i шаге исход «+» (прибыльный), то увеличиваем ставку на константу и переходим к следующему розыгрышу. Если же исход «-» (убыточный), то снижаем ставку, путём приравнивания её некоторой установленной небольшой константе, и переходим к следующему розыгрышу.

Опишем результат работы подобного алгоритма математически, для этого введём:

R_i – прибыль на i-м шаге;

$S_i = f(S_{i-1}, R_{i-1})$ – ставка на i-м шаге, как функция от ставки на предыдущем шаге и выигрыша на предыдущем шаге;

p – вероятность выигрышной «+» ситуации $p = (0..1)$;

q – вероятность проигрышной «-» ситуации $q = 1 - p$;

A_p – коэффициент, в случае «+» $R_i = A_p \times S_i$;

A_q – коэффициент, в случае «-» $R_i = A_q \times S_i$;

S_1 – начальная ставка;

a – константа, на которую увеличивается ставка при выигрыше.

1. Доказательство невозможности перехода от случайного процесса с независимыми исходами к направленному процессу

Формализуем понятие серии: серия – последовательность знаков до первого «-» включительно, после выпадения первого «-» следующий знак начинает новую серию. Проиллюстрируем сказанное на рис. 1.

$$\overbrace{+\,+\,+\,-}\;\overbrace{+\,+\,-}\;\overbrace{-}\;\overbrace{-}\;\overbrace{-}\;\overbrace{-}\;\overbrace{+\,-}\;\overbrace{+\,-}\;\overbrace{+\,+\,+\,-}\;\overbrace{-}\;\overbrace{-}$$

Рис. 1. Разбиение последовательности исходов на серии

Из понятия серии можем заключить, что вероятность серии «-» длиной $n=1$, равна вероятности выпадения «-», т.е. q. Вероятность серии вида «$++\ldots+-$» длиной n символов будет равна вероятности выпадения сразу после начала отсчёта $n-1$ символов «+», и затем под номером n выпадет символ «-». Итак, вероятность серии длиной n, в силу независимости исходов, равна:

$$P_n = p^{n-1} \times q = p^{n-1} \times (1 - p). \tag{1.1}$$

Сумма вероятностей образованных серий (сумма бесконечного ряда вероятностей всех длин серий) находится по формуле (1.2), которая упрощается, с использованием формулы суммы геометрической прогрессии для убывающего ряда и составляет полную группу событий:

$$P_{общ} = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = q \times (p + p^2 + \ldots + p^i + \ldots + p^{\infty}) = q \times \left(\frac{1}{1-p} \right) = 1. \tag{1.2}$$

Рассмотрим частный случай функции управления ставкой, который использован в работе [1].

Тогда, ставка на i-м шаге серии:

$$S_i = S_1 + a \times (i-1). \qquad (1.3)$$

Формула прибыли от серии длиной n шагов использует (1.3):

$$R_n = A_q \times [a \times (n-1) + S_1] + A_p \times \sum_{i=1}^{n-1} S_i =$$

$$= A_q \times [a \times (n-1) + S_1] + A_p \times [(n-1) \times S_1 + a \times \sum_{i=1}^{n-1} (i-1)] = \qquad (1.4)$$

$$= A_q [a(n-1) + S_1] + A_p [(n-1) S_1 + a(n-2)(n-1)/2].$$

Математическое ожидание прибыли всех серий будет суммой произведений (1.1) и (1.4) – суммой математических ожиданий прибыли для всех длин серии от 1 до бесконечности в области натуральных чисел:

$$M_{общ}(R) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n P_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(1-p)\{A_q [a(n-1) + S_1] + A_p [(n-1) S_1 + a(n-2)(n-1)/2]\}. \qquad (1.5)$$

Математическое ожидание длины серии можем определить:

$$M_{общ}(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1}(1-p) = \frac{1}{1-p} \qquad (1.6)$$

Тогда математическое ожидание прибыли одного розыгрыша:

$$M_{роз} = \frac{M_{общ}(R)}{M_{общ}(N)} = (1-p) \sum_{n=1}^{\infty} R_n P_n \qquad (1.7)$$

Игра будет прибыльной, если $M_{роз} > 0$. Из формулы (1.7) видно, что при бесконечной игре, прибыль, в среднем за 1 розыгрыш, будет функцией от средней прибыли на 1 серию вида $M_{общ}(R)(1-p)$. Следовательно, $M_{роз} > 0$ при достаточном условии $M_{общ}(R) > 0$, поэтому для определения того прибыльна ли стратегия, можем рассматривать функцию $M_{общ}(R)$.

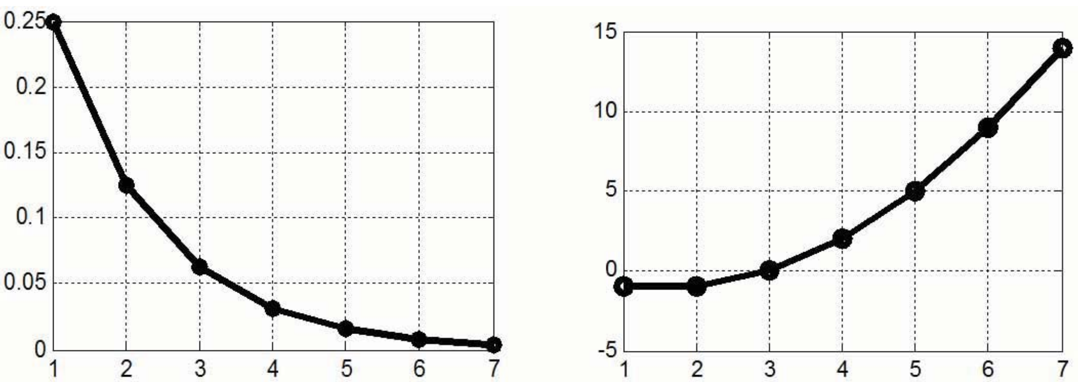

Рис. 2. Вероятность серии длиной n (слева) и прибыль серии длиной n (справа). Параметры: p=0,5, A_p=1, q=0,5, A_q=-1 p=0,5 S_1=1, a=1.

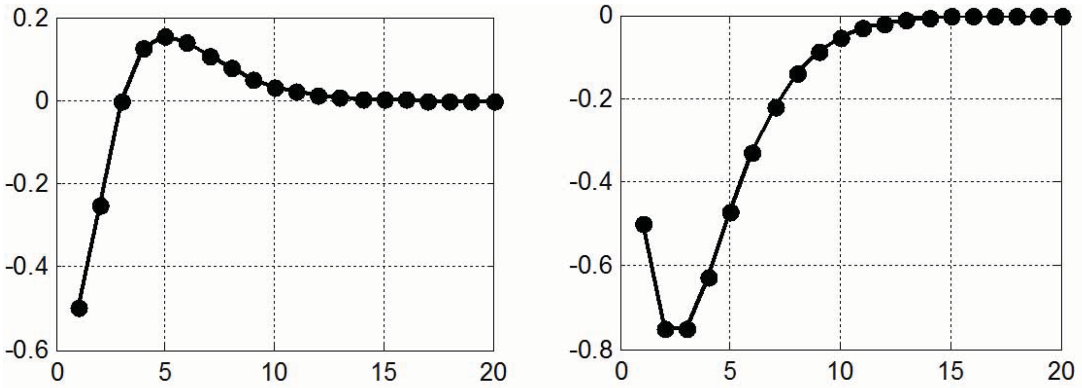

Рис. 3. Зависимость ожидания прибыли от длины серии (слева), кумулятивно (справа). Параметры: p=0,5, A_p=1, q=0,5, A_q=-1 p=0,5 S_1=1, a=1

В случае с монеткой, рассматривается частный случай случайного процесса, такой что: во-первых, математическое ожидание прибыльного и убыточного исхода равны; во-вторых, вероятности этих исходов равны. Более общим случаем будет процесс, у которого соблюдено только первое равенство:

$$pA_p + (1-p)A_q = 0 \qquad (1.8).$$

Докажем, что при условии нулевого математического ожидания заданного (1.8), математическое ожидание прибыли серий, при игре по стратегии Иваницкого, заданное формулой (1.5), равно нулю при любых параметрах: A_p, S_1, a , а также p из диапазона (0...1).

Выразим из формулы (1.8) переменную A_q и подставим полученное выражение вместо указанной переменной в формулу (1.5). Получаем частную формулу математического ожидания прибыли серий при условии (1.8):

$$M(R) = g(p, A_p, S_1, a) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n \times P_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(1-p)\left[A_p\big((n-1)S_1 + a(n-2)(n-1)/2\big) - \frac{pA_p}{(1-p)}\big(a(n-1)+S_1\big)\right]. \qquad (1.9)$$

В записи в квадратных скобках внесём множители внутрь скобок, вынесем $1/(1-p)$ за квадратные скобки, сократим, вынесем множитель 1/p за знак суммы, получим:

$$M(R) = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty} p^n A_p \left[an^2/2 - pan^2/2 + nS_1 - pnS_1 - 1.5an + pan/2 + a - S_1\right].$$

Добавим в оператор суммирования нулевую итерацию, и чтобы не нарушилось уравнение, вычтем значение нулевой итерации суммирования вне оператора суммирования:

$$M(R) = \frac{1}{p}\left(A_p(S_1 - a) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n A_p \left[an^2/2 - pan^2/2 + nS_1 - pnS_1 - 1.5an + pan/2 + a - S_1\right]\right)$$

Разобьём множители внутри квадратных скобок на две группы слагаемых: содержащие и не содержащие переменную n. Применим оператор суммирования отдельно к двум выделенным группам:

$$M(R)=\frac{1}{p}A_p[(S_1-a)+\sum_{n=0}^{\infty}p^n(an^2/2-pan^2/2+nS_1-pnS_1-1.5an+pan/2)+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}p^n(a-S_1)]$$

Так как $\lim_{N->\infty}\sum_{n=0}^{N}p^n(a-S_1)=\frac{(a-S_1)}{1-p}$, то:

$$M(R)=\frac{1}{p}A_p\left((S_1-a)+\frac{(a-S_1)}{1-p}+\sum_{n=0}^{\infty}p^n\left[an^2/2-pan^2/2+nS_1-pnS_1-1.5an+pan/2\right]\right).$$

Выносим n за квадратную скобку, повторяем операции аналогично предыдущему шагу (включительно начиная с выделения слагаемых без n).

$$M(R)=\frac{1}{p}A_p\left((S_1-a)+\frac{(a-S_1)}{1-p}+\sum_{n=0}^{\infty}np^n\left[an/2-pan/2\right]+\sum_{n=0}^{\infty}np^n\left[S_1-pS_1-1.5a+pa/2\right]\right).$$

Находим предел:

$\lim_{N->\infty}\sum_{n=0}^{N}np^n\left[S_1-pS_1-1.5a+pa/2\right]=\frac{p(-1.5a+S_1+0.5ap-pS_1)}{(p-1)^2}$. Подставляя:

$$M(R)=\frac{1}{p}A_p\left((S_1-a)+\frac{(a-S_1)}{1-p}+\frac{p(-1.5a+S_1+0.5ap-pS_1)}{(p-1)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}an^2p^n(1-p)/2\right).$$

Третий раз повторяем эти операции, для оставшихся слагаемых находим предел:

$$\lim_{N->\infty}\sum_{n=0}^{N}an^2p^n(1-p)/2=\frac{a(p^2+p)}{2(p-1)^2}.$$

В результате, можем записать итоговую формулу:

$$M(R)=\frac{1}{p}A_p\left((S_1-a)+\frac{(a-S_1)}{1-p}+\frac{p(-1.5a+S_1+0.5ap-pS_1)}{(p-1)^2}+\frac{a(p^2+p)}{2(p-1)^2}\right). \quad (1.10)$$

После раскрытия скобок в формуле (10) подобные слагаемые полностью сокращаются, и окончательно имеем $M(R)=0$. Таким образом, стратегия имеет нулевое ожидание прибыли при любых параметрах: A_p, S_1, a, а также p из диапазона (0..1).

Вывод: гипотеза Г.Р. Иваницкого о возможности перейти от случайного процесса с независимыми исходами с нулевым математическим ожиданием (и, тем более, с равными вероятностями) к направленному процессу (с ненулевым математическим ожиданием), используя указанную стратегию управления ставкой, не подтверждается.

Если же задаться вопросом о возможности прибыльного использования данной стратегии на основе процесса с нулевым математическим ожиданием, то ответ очевиден – это возможно на основе стохастического процесса с памятью (исходы зависимы). Нами был проведён численный эксперимент, в котором моделировалась рассматриваемая стратегия на модельных данных с различной персистентностью (показателем Херста).

Результаты моделирования на графике:

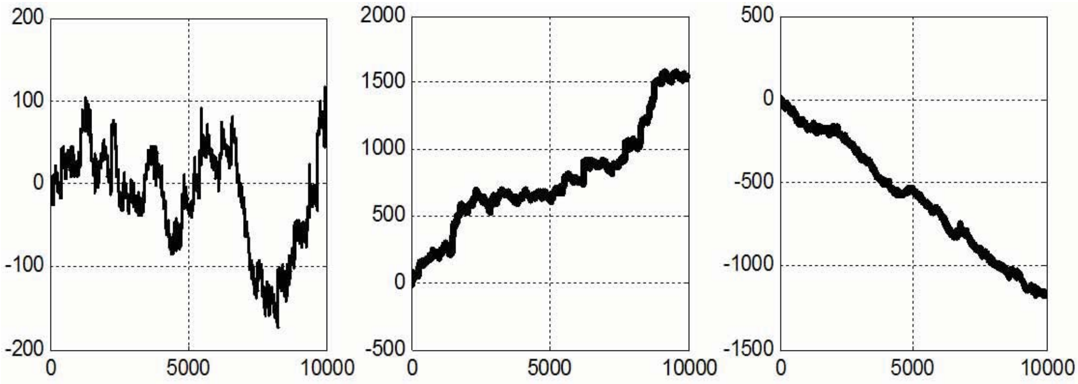

Рис. 4. Кривые накопленного капитала при численном моделировании стратегии для рядов с независимыми приращениями $H=0,5$ (слева); персистентного ряда $H=0,6$ (центр); антиперсистентного ряда $H=0,4$ (справа), при параметрах $S_1=1$, $a=1$

2. Обобщение доказательства равенства нулю математического ожидания стратегии с управлением ставкой на множество различных функций наращения ставки на шаге (а не только линейно, как выше)

Пусть $f(i)$ – некоторая функция определяющая величину ставки на i-ом шаге серии, тогда, с учётом этого обобщения, можем переписать формулу (4) прибыли от серии из n шагов:

$$R_n = A_q f(n) + A_p \sum_{i=1}^{n-1} f(i). \tag{2.1}$$

Тогда обобщённая функция средней прибыли за серию при игре с управлением ставкой:

$$M_{общ}(R) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n \times P_n = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(1-p)[A_q f(n) + A_p \sum_{i=1}^{n-1} f(i)]. \tag{2.2}$$

Частный случай функции (2.2) в условиях (1.8), когда стратегия без управления ставкой имеет нулевое математическое ожидание прибыли и ряд с независимыми исходами:

$$M(R) = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(1-p)[-\frac{pA_p}{(1-p)} f(n) + A_p \sum_{i=1}^{n-1} f(i)] \tag{2.3}$$

Применим оператор суммирования отдельно к двум слагаемым уравнения (2.3), сократим, вынесем за оператор суммы:

$$M(R) = A_p \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(p^{n-1}(1-p) \sum_{i=1}^{n-1} f(i) \right) - \sum_{n=1}^{\infty} p^n f(n) \right] \tag{2.4}$$

Рассмотрим отдельно часть выражения (2.4) в первом операторе суммирования. Преобразуем первое слагаемое в квадратных скобках:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(p^{n-1}(1-p) \sum_{i=1}^{n-1} f(i) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} p^{n-1}(1-p) f(i) \tag{2.5}$$

Заменим $z(n) = p^{n-1}(1-p)$, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} p^{n-1}(1-p) f(i) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} z(n) f(i) \tag{2.6}$$

Можем визуализировать матрицу $z(n)f(i)$, которая задана в (2.6) в виде бесконечной, в

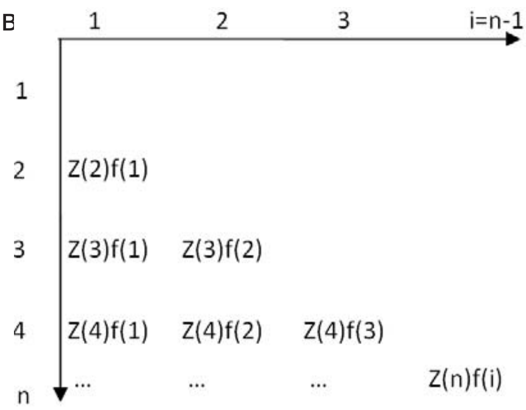

Рис. 5. Схематичное представление матрицы $z(n)f(i)$
(отражены только ненулевые значения)

Из рис. 5 видно, что величина ставки не изменяется по столбцам, поэтому сумма по i столбцу матрицы $z(n)f(i)$, показанной на рисунке, может быть определена выражением:

$$f(i)\sum_{n=i+1}^{\infty} z(n). \tag{2.7}$$

Подставляя вместо $z(n)$ исходное выражение, получим:

$$f(i)\sum_{n=i+1}^{\infty} p^{n-1}(1-p). \tag{2.8}$$

Преобразуем часть выражения (2.8) с оператором суммирования. Так как ряд $\sum_{n=i+1}^{\infty} p^{n-1}(1-p)$ сходится при $|p|<1$, то можем найти формулу суммы этого сходящегося ряда:

$$\sum_{n=i+1}^{\infty} p^{n-1}(1-p) = \left(\frac{p^i-1}{p-1}+\frac{1}{p-1}\right)(p-1) = p^i. \tag{2.9}$$

Подставив (2.9) в (2.8) получим формулу суммы по i-му столбцу элементов матрицы $z(n)f(i)$ в более простом виде:

$$f(i)\sum_{n=i+1}^{\infty} z(n) = f(i)p^i. \tag{2.10}$$

Тогда, сумма элементов всей матрицы $z(n)f(i)$ равна:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(i)p^i. \tag{2.11}$$

Поэтому справедливо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1} p^{n-1}(1-p)f(i) = \sum_{i=1}^{\infty} p^i f(i). \tag{2.12}$$

Подставив правую часть выражения (2.12) вместо левой части (2.12) в (2.5) и далее в (2.4), получим:

$$M(R) = A_p\left[\sum_{i=1}^{\infty} p^i f(i) - \sum_{n=1}^{\infty} p^n f(n)\right] = 0. \tag{2.13}$$

Что и требовалось доказать.

3. Зависимость ожидания прибыли игры на случайном процессе с независимыми исходами и произвольным математическим ожиданием от вида функции величины ставки на шаге серии

Выше мы привели доказательство, того, что в случае, когда математическое ожидание прибыли игры без управления ставкой на случайном процессе с независимыми исходами равно нулю, то математическое ожидание стратегии с управлением ставкой, при любой функции управления, также будет равно нулю.

Зададимся следующим вопросом: как зависит ожидание прибыли за один розыгрыш, полученной в результате игры на случайном процессе с независимыми исходами и произвольным математическим ожиданием, от вида функции величины ставки на шаге серии.

Преобразуем (2.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{общ}(R) &= \sum_{n=1}^{\infty} R_n \times P_n = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(1-p)[A_q f(n) + A_p \sum_{i=1}^{n-1} f(i)] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(1-p)A_q f(n) + \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(1-p)A_p \sum_{i=1}^{n-1} f(i). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ввиду наличия выведенного ранее равенства (2.12), можем преобразовать правый оператор суммирования в выражении (3.1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(1-p)A_p \sum_{i=1}^{n-1} f(i) = A_p \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1} p^{n-1}(1-p) f(i) = A_p \sum_{i=1}^{\infty} p^i f(i). \tag{3.2}$$

Теперь можем переписать (3.1), подставив туда (3.2). В результате получим упрощённый вид функции (2.2) – средняя прибыль серии:

$$\begin{aligned} M_{общ}(R) &= \sum_{n=1}^{\infty} R_n P_n = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(1-p)A_q f(n) + A_p \sum_{n=1}^{\infty} p^n f(n) = \\ &= A_p\left(\frac{(1-p)A_q}{pA_p}\sum_{n=1}^{\infty} p^n f(n) + \sum_{n=1}^{\infty} p^n f(n)\right) = A_p\left[\frac{(1-p)A_q}{pA_p} + 1\right]\sum_{n=1}^{\infty} p^n f(n). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставив (3.3) в (1.7) получим функцию средней прибыли за розыгрыш:

$$M_{роз} = (1-p)\left[A_q \frac{1-p}{p} + A_p\right]\sum_{n=1}^{\infty} p^n f(n). \tag{3.4}$$

Максимизация значения средней прибыли за розыгрыш на единицу ставки, путём выбора вида функции управления ставкой.

Зная функцию средней прибыли за розыгрыш (3.4), можем найти такую функцию управления ставкой, которая бы максимизировала значение ожидаемой удельной прибыли:

$$\frac{M_{роз}}{\sum f(n)} = (1-p)\left[A_q \frac{1-p}{p} + A_p\right]\sum_{n=1}^{\infty} p^n f(n) \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \mathring{A}_q(1-p) + pA_p. \tag{3.5}$$

Из 3.5 видно, что ожидание удельной прибыли игры в среднем за розыгрыш не зависит от вида функции управления ставкой (примечание: в случае $f(n) \neq 0$, иначе неопределённость). Таким образом, любое управление ставкой, с этой точки зрения, полностью эквивалентно $f(n) = \mathrm{const}$.

Вопрос о получении формулы теоретической зависимости накопленного капитала от показателя Херста для стратегии пока остается открытым. Развитие жизни на основе стратегии поощрения удачных мутаций и ослабления неудачных могла себя оправдывать только на фоне персистентных (или реже антиперсистентных) случайных изменений внешней среды. К счастью, как показывают многочисленные примеры природные временные ряды такими свойствами обладают. Более того, исследованные в статье стратегии управления ставкой легко использовать для адаптивного управления долей рискованного капитала при работе инвестора на финансовом рынке. По результатам в прошлом определяется, существует ли долговременная память в череде выигрышей и проигрышей и затем применяется пошаговая стратегия с обратной связью управления долей рискованного капитала, описанная в настоящей статье.

Список источников

1. Иваницкий, Г.Р. XXI век: что такое жизнь с точки зрения физики? [текст] / Г.Р. Иваницкий // Успехи физических наук. – 2010. – № 4. – с. 337 – 369.

CRITICISM OF HYPOTHESIS OF CHANGING FROM A RANDOM PROCESS WITH INDEPENDENT OUTCOMES TO DIRECTED PROCESS

Yanovskiy Leonid Petrovich,
Dr. Sc. of Economy, Professor, Chief of the Chair of Applied Mathematics and Mathematical Methods in Economy of Voronezh State Agricultural University; leonidya60@yandex.ru
Borovikov Ilya Mikhaylovich,
Post-graduate student of Institute of Management, Marketing and Finances (Voronezh); ilyaflash@list.ru

Evidence showing the failure of the G.R. Ivanitskiy's hypothesis, about the probability of a random process with independent outcomes and zero expectation directed to a process (with non-zero expectation) by using a strategy of a game based on a process with two random, equiprobable, independent outcomes, including management of interest rate depending on the results of previous drawings is presented.
Keywords: random process, directed process, strategy, Mathematical expectation, profit, financial market, capital formation, Hurst's index.