УДК 330.322

ОДНОКОМПОНЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

Давнис Валерий Владимирович,
доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета;
vdavnis@mail.ru
Касаткин Сергей Евгеньевич,
докторант Воронежского государственного университета;
k_s_e@rambler.ru
Ардаков Алексей Анатольевич,
аспирант Воронежского государственного университета;
ardakovaa@bk.ru

Предлагается для построения модели портфельного инвестирования Шарпа использовать не одноиндексные модели, а однокомпонентные, что приводит к увеличению учитываемого в модели риска и повышению надежности портфеля ценных бумаг.
Ключевые слова: портфель ценных бумаг, одноиндексная модель, однокомпонентная модель, риск, шок.

Однокомпонентная модель, рассматриваемая в данной статье, представляет собой модифицированный вариант известной модели портфельного инвестирования У. Шарпа. Возможность модификации была заложена в самой идее применения регрессионных уравнений для построения оптимального портфеля ценных бумаг. Однофакторная модель, которую Шарп использовал для этих целей, чрезмерно ограничила возможности эконометрического моделирования. Но в то же время простейший вариант эконометрической модели в виде однофакторного линейного уравнения регрессии позволил провести вывод необходимых формул для определения числовых характеристик модели портфеля ценных бумаг, что, по сути, стало новым подходом к формированию оптимального портфеля.

Следовательно, ситуация вокруг проблемы построения модифицированного варианта одноиндексной модели такова, что, с одной стороны, не позволяет отказаться от однофакторной структуры, а с другой, однофакторная модель является весьма абстрагированным представлением о механизме формирования доходности рыночного актива. Учесть многофакторную природу воздействия на доходность, сохраняя при этом однофакторную структуру модели, можно только с помощью аппарата главных компонент. Этот аппарат чаще всего используется для сокращения размеров признакового пространства. Именно эта возможность и будет использована при построении однокомпонентной модели.

По названию модели нетрудно понять, что ее построение предусматривает использование только одной главной компоненты, причем первой. По определению первой главной компонентой u_1 исследуемой системы показателей, описываемой случайным вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, называется такая нормированно-центрированная линейная комбинация этих показателей

$$u_1 = \gamma_1^{(1)} x_1 + \gamma_2^{(1)} x_2 + \cdots + \gamma_p^{(1)} x_p, \tag{1}$$

которая среди всех прочих нормированно-центрированных линейных комбинаций этих же показателей обладает наибольшей дисперсией. Возникает естественный вопрос, смысл которого в том, хорошо или плохо использовать в модели, описывающей доходность финансового актива, фактор с высоким уровнем волатильности. Однозначного ответа нет.

Как правило, модель с такой независимой переменной может отражать ситуации, в которых имеет место самый высокий риск линейного взаимодействия факторов, на которых построена главная компонента. Другими словами с помощью главной компоненты удается расширить возможность отражения учитываемых рисков, т.е. таких рисков, которые воспроизводятся моделью. А это значит, что риск портфеля может изменяться без изменения его доходности. Без детального рассмотрения этой ситуации трудно понять, следует ли данный результат считать положительным или отрицательным явлением.

Для рассмотрения этой ситуации будем предполагать, что мир воспринимается нашим сознанием, как находящийся в одном из трех состояний. Первое состояние – это состояние детерминированной определенности. Оно имеет место в случае, когда все интересующие нас события произошли, т.е. мы имеем дело с прошлым. Информация о прошлом весьма полезна для проведения исследований по выявлению различного рода закономерностей, построения моделей, используемых для анализа и прогнозирования, проверки выдвинутых гипотез и предположений. Без знаний прошлого невозможно сформировать правдоподобное представление о будущем.

Второе и третье состояния касаются будущего. В нашем сознании они отражаются либо вероятностной определенностью, либо полной неопределенностью. Оба состояния сосуществуют в описании будущего, но имеют различные характеристики. В случае вероятностной определенности главной характеристикой является риск. Риск можно понимать как своеобразную случайную величину, о которой известно с какой вероятностью она может появиться и каковы ее средние размеры. Этих знаний о риске недостаточно, чтобы предсказать момент, когда он реализуется, но вполне достаточно, чтобы предусмотреть меры по его нейтрализации.

В случае неопределенности главной характеристикой является шок, о котором ничего неизвестно. В отличие от риска для шокового эффекта невозможно предусмотреть меры его нейтрализации. В то же время факторы шоковых эффектов могут быть известны и их можно трансформировать в факторы риск-эффектов, понизив тем самым уровень неопределенности. Например, до тех пор, пока доходность от нефти не учитывалась в модели доходности актива, она была фактором шоковой составляющей, но как только ее включают в состав факторов однокомпонентной модели доходности финансового актива, она становится фактором рисковой составляющей неопределенности. Таким образом, между рисковой и шоковой составляющими неопределенности существует взаимосвязь, предусматривающая реакцию одной из них на изменения, происходящие в другой.

Идея представления неопределенности двумя составляющими естественным образом переносится и на риск с несколько иной интерпретацией. Фактическая величина риска формируется под воздействием факторов рисковой и шоковой составляющих неопределенности. Но измеряемой величиной риска является только та его часть, которая сформирована из рисковой составляющей. В силу этого ожидаемый риск очень часто не совпадает с его фактической величиной. Это приводит к тому, что меры, предусмотренные для нейтрализации риска, оказываются неадекватными реальному риску. Желательно уточнить оценку риска. А для этого нужно в фактической величине риска снизить долю шоковой составляющей. Как правило, это приводит к росту учитываемого риска и соответственно повышается правдоподобность его оценки. Рассмотрим этот механизм на примере однокомпонентной модели портфельного инвестирования.

Для этого мы должны модифицировать одноиндексную модель:

$$r_{ti} = \alpha_i + \beta_i r_{It} + \varepsilon_{ti}, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где r_{ti} – доходность i-го актива в момент времени t; r_{It} – доходность рыночного индекса в момент времени t; α_i, β_i – оцениваемые параметры регрессионной модели; ε_{ti} – ненаблюдаемая случайная величина.

Смысл модификации заключается в замене переменной, характеризующей доходность индекса, главной компонентой, т.е.:

$$r_{ti} - \overline{r_i} = \beta_i u_t + \varepsilon_{ti}, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

В отличие от (2) однокомпонентная модель записана в отклонениях от среднего. Такую форму записи можно легко преобразовать к привычному виду (2), если в (3) подставить выражение первой главной компоненты:

$$u_t = \gamma_1^{(1)}(r_{Jt} - \overline{r_J}) + \gamma_2^{(1)}(r_{It} - \overline{r_I}) \tag{4}$$

и определить α_i в виде разности:

$$\alpha_i = \overline{r_i} - \gamma_1^{(1)}\overline{r_J} - \gamma_2^{(1)}\overline{r_I}, \tag{5}$$

где $\overline{r_J}$ и $\overline{r_I}$ средние значения индексов, например Dow Jones и РТС.

Это позволяет после очевидной замены определенных характеристик осуществлять расчет средней доходности и дисперсии ценных бумаг, включаемых в портфель, по формулам, которые используются в случае одноиндексной модели:

$$\overline{r_i} = \alpha_i + \beta_i \overline{r_I}, \tag{6}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2, \tag{7}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_I^2, \tag{8}$$

где $\overline{r_i}$, $\overline{r_I}$ – математические ожидания доходности i-го актива и индекса; σ_i^2, σ_I^2 – дисперсии доходностей i-го актива и индекса; σ_{ij} – ковариация доходностей i-го и j-го активов.

Корректность этих формул обеспечивается свойствами случайных величин ε_{ti}. Эти случайные величины не наблюдаемы, и поэтому их свойства можно постулировать, причем, таким образом, чтобы из этих свойств непосредственно следовала справедливость всех формул. Эмпирические исследования на статистическом уровне значимости согласуются с этими предположениями.

При вычислении характеристик портфеля с помощью однокомпонентной модели можно использовать все те формулы, которые были выведенные для одноиндексной модели [1]. Поэтому, не вдаваясь в детали вывода этих формул, приведем финальный результат, используемый при формировании оптимального портфеля. Этим результатом является матрица, которая получается в результате дифференцирования функции Лаеранжа [2]:

$$\begin{pmatrix} 2\sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 2\sigma_2^2 & 0 & 0 & \alpha_2 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 2\sigma_3^2 & 0 & \alpha_3 & 1 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sigma_m^2 & \overline{r_m} & 0 & -1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \overline{r_m} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В случае однокомпонентной модели дисперсия рыночного портфеля, определяемая при использовании одноиндексной модели по дисперсии индекса РТС, заменяется дисперсией главной компоненты, которую можно понимать как главную часть совместной волатильности в данном случае двух фондовых рынков. В принципе нет запрета на расширение состава факторов главной компоненты. Можно, например, построить главную компоненту, объединяющую все индексы, по которым оценивается активность международных рынков ценных бумаг, и тогда модель будет учитывать главную часть волатильности мирового рынка. Правдоподобность оцененного портфельного риска в этом случае будет самой высокой.

Как в одноиндексной модели, так и в однокомпонентной нерешенным остается вопрос, связанный со статистической значимостью свободных членов (пересечений графика регрессии с осью ординат) регрессионных уравнений. В модели портфельного инвестирования они интерпретируются как средние доходности активов. Использование в расчетах статистически незначимых оценок, как правило, искажает результаты, значительно снижая уровень их правдоподобности. Поэтому предлагается в однокомпонентной модели учитывать альтернативную природу доходности финансовых активов. Эта идея реализуется путем введения в регрессионную модель дискретной переменной x:

$$r_{ti} - \overline{r_i} = \beta_i u_t + d_i x_{ti} + \varepsilon_{ti}, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Для идентификации значений дискретной переменной используются исторические данные, а сам процесс идентификации реализуется на основе гипотезы альтернативных ожиданий. В результате в модель включается переменная, принимающая всего два значения +1 и – 1. Коэффициент при этой дискретной переменной в модели портфельного инвестирования принимается за альтернативную доходность, которая в одних случаях положительная, а в других – отрицательная. Так как, когда какой случай может иметь место неизвестно, то предлагается рассматривать всевозможные варианты и тестировать их на предмет эффективности на данных пост упреждающего периода.

Ниже приводятся результаты эмпирических исследований, подтверждающие возможность практической реализации изложенного подхода. В качестве данных использовались котировки акций за период с 1.06.2011 г. по 2.04.2012 г., причем десять последних наблюдений, т.е. данные с 20.03.2012 в построении модели не использовались, так как им была отведена роль данных пост упреждающего периода. Кроме акций в расчетах были использованы индексы Dow Jones, РТС, цены на нефть и золото. Все данные путем восстановления пропусков синхронизированы по времени.

В табл. 1 приведены числовые характеристики главных компонент, построенных для двух индексов; для двух индексов и нефти; для двух индексов, нефти и золота.

Таблица 1

Главные компоненты

НИМЕНОВАНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ	ВЕСОВЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕМЕННЫХ В ГЛАВНОЙ КОМПОНЕНТЕ			
DOW_JONES		0,4281	0,3948	0,3923
РТС	1,0000	0,9037	0,7505	0,7479
НЕФТЬ (BRENT)			0,5300	0,5308
ЗОЛОТО				0,0708
УЧИТЫВАЕМЫЙ РИСК	2,1797	2,3619	2,6048	2,6094

Приведенные в нижней строке оценки риска показывают, чтос увеличением числа переменных главной компоненты растет учитываемый риск. Теоретически при увеличении числа переменных главной компоненты не увеличивается ее дисперсия только в том случае, если включаемая переменная ортогональна переменным главной компоненты. Включение в компоненту переменной, характеризующей доходность золота, хорошо иллюстрирует этот факт. Золото очень слабо коррелируетс другими переменными главной компоненты. Вывод простой. Золото нецелесообразно включать в данную модель. Из этой рекомендации не следует, что изменение цен на золото не несет в себе риски. Риски есть, но их нужно учитывать с помощью других механизмов.

Особый интерес представляет вопрос, связанный с эффективностью портфеля. Реализация желания повысить эффективность портфеля за счет более полного учета рисков вполне возможна. Рост учитываемого риска приводит к изменению риска портфеля, но трудно предсказываемому. Это обстоятельство объясняется тем, что риск портфеля в модели Шарпа зависит от многих параметров. На его величину влияют бета коэффициенты, остаточные дисперсии финансовых активов, структура портфеля и дисперсия самого индекса.

В табл. 2 - табл. 5 приводятся результаты моделирования доходности финансовых активов с помощью дискретно-непрерывных моделей. Это позволяет избавиться от проблемы незначимости свободного члена, который в модели портфельного инвестирования используется как сред-няя доходность актива. Результаты моделирования используются при построении модели портфельного инвестирования.

В последней строке табл. 2 стоят значения коэффициентов при дискретных переменных регрессионных моделей, которые в нашем случае принимаются за средний уровень, когда рынок растет. Последнее значение в этой строке получено как расчетное значение индекса при заданных уровнях доходности активов, включенных в портфель. Для получения этого расчетного значения была построена модель регрессии, характеризующая зависимость доходности индекса от доходности акций Сбербанка, Роснефти, Газпрома (доходность акций Лукойла не включена в модель из-за статистической незначимости).

Таблица 2

Характеристики одноиндексной модели (РТС)

ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДЕЛЕЙ	ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДЕЛЕЙ				
	СБЕРБАНК	РОСНЕФТЬ	ЛУКОЙЛ	ГАЗПРОМ	РТС
ДИСП.	0,6115	0,4672	0,5153	0,5063	4,7512
БЕТА	1,0693	0,8811	0,6055	0,8159	
АЛЬФА	0,9035	0,8612	0,8185	0,8043	0,8235

Табл. 3 и табл. 4 сформированы по аналогии с табл. 2. Для краткости в дальнейшем изложении главную компоненту с переменными Dow Jones и РТС будем называть компонента 1, а главную компоненту с переменными Dow Jones, РТС и нефть – компонента 2.

Таблица 3

Характеристики однокомпонентной модели (Dow Jones, РТС)

ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДЕЛЕЙ	ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДЕЛЕЙ				
	СБЕРБАНК	РОСНЕФТЬ	ЛУКОЙЛ	ГАЗПРОМ	КОМПОНЕНТА
ДИСП.	0,6788	0,5422	0,5136	0,4957	5,5788
БЕТА	0,9497	0,7945	0,5670	0,7619	
АЛЬФА	0,9443	0,8887	0,8233	0,7933	0,9034

Результаты расчетов, приведенные в таблицах, демонстрируют рост дисперсии по мере увеличения числа переменных в главной компоненте, т.е. действительно происходит рост учитываемого риска.

Таблица 4

Характеристики однокомпонентной модели (Dow Jones, РТС, нефть)

ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДЕЛЕЙ	ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДЕЛЕЙ				
	СБЕРБАНК	РОСНЕФТЬ	ЛУКОЙЛ	ГАЗПРОМ	КОМПОНЕНТА
ДИСП.	1,1981	0,7571	0,6238	1,3908	6,7852
БЕТА	0,7868	0,6714	0,4869	0,6462	
АЛЬФА	1,1630	1,0098	0,8968	0,4320	0,8760

В табл. 5 приведены результаты построения одного из вариантов оптимального портфеля ценных бумаг. Они показывают, что с увеличением учитываемого в модели риска уровень риска портфеля снижается и, следовательно, повышается его надежность.

Таблица 5

Портфели и риски

ПЕРЕМЕННАЯ МОДЕЛИ	СТРУКТУРА ПОРТФЕЛЕЙ				РИСК ПОРТФЕЛЯ
	СБЕРБАНК	РОСНЕФТЬ	ЛУКОЙЛ	ГАЗПРОМ	
РТС	-1,8625	-0,3171	2,3130	0,8666	2,3306
КОМПОНЕНТА 1	0,7843	-0,6331	1,1344	-0,2856	1,9550
КОМПОНЕНТА 2	0,6541	-0,5159	0,7500	0,1118	1,8899

Результаты эмпирических исследований показали, что идея построения однокомпонентных моделей практически реализуема, но требует, по нашему мнению, более масштабной проверки на данных других фондовых рынков.

Список источников

1. Sharpe, W. Portfolio Theory and Capital Markets [текст] / W. Sharpe. – N.Y.: McGraw-Hill, 1970. – 316 p.

2. Аскинадзи, В.М. Инвестиционное дело [текст] / В.М. Аскинадзи, В.Ф. Максимова, В.С. Петров. – М.: Маркет ДС, 2007. – 512 с.

3. Давнис, В.В. Модели портфельного образа и оценка возможностей их практического использования [текст] / В.В. Давнис, С.Е. Касаткин, О.В. Тимченко // Современная экономика: проблемы и решения. – 2011. – №9(21). – С. 126 – 137.

SINGLE COMPONENT MODEL OF PORTFOLIO INVESTMENT

Davnis Valeriy Vladimirovich,
Dr. Sc. Of Economy, Chief of the Chair of Information Technologies and Mathematical Methods in Economy of Voronezh State University; vdavnis@mail.ru
Kasatkin Sergey Yevgenyevich,
Candidate for a Doctor's Degree of Voronezh State University;
k_s_e@rambler.ru
Ardakov Aleksey Anatolyevich,
Post-graduate student of Voronezh State University; ardakovaa@bk.ru

In the article it is proposed to build the model of portfolio investment Sharpe not to use single-index model, but one-component, resulting in an increase in equity accounted risk in model and increase reliability of the portfolio of securities.
Keywords: portfolio of securities, single-index model, single model, risk, shock.