УДК 330.322

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИЗ СПРАВЕДЛИВОЙ ЦЕНЫ ОПЦИОНА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ БЛЭКА-ШОУЛЗА

Хацкевич Владимир Львович,
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры ысшей математики и статистики Воронежского филиала Финансового университета при Правительстве Российской Федерации;
okp.voronehz@vzfei.ru

Представлен метод приближенного решения уравнения Блэка-Шоулза, описывающего формирование цен на европейские опционы колл. Метод основан на представлении решения в виде степенного ряда с использованием интерполяционных полиномов. Проведен анализ зависимости найденной приближенной справедливой цены от влияющих на нее факторов.
Ключевые слова: модель ценообразования опционов, уравнение Блэка-Шоулза, справедливая цена, метод степенных рядов, интерполяционный многочлен Лагранжа.

Введение. Опционы, как важный класс производных финансовых инструментов, широко используются на фондовых рынках. Современная теория ценообразования опционов включает два подхода: дискретный и непрерывный по времени. Наша работа базируется на непрерывном механизме ценообразования опционов и развивает некоторые аспекты этого направления. Ниже рассматриваются европейские опционы на покупку (колл).

Первой работой, описывающей непрерывное ценообразование опционов была, по-видимому, работа Башелье, в которой он опирался на гипотезу о броуновском движении цен акций. Существенный вклад в развитие этой темы внес П. Самуэльсон, он предложил модель геометрического (экономического) броуновского движения цен. Опираясь на эти идеи и используя теорию стохастических процессов, в 1973 г. Ф. Блэк и М. Шоулз [6], а также Р. Мертон [8] вывели фундаментальное уравнение, описывающее процесс непрерывного ценообразования опционов [3]:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + rS\frac{\partial Y}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = rY\,. \qquad (1)$$

Уравнение (1) это линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Переменные в уравнении (1) имеют следующий смысл: S – стоимость базового финансового актива; t – время; $Y(t,S)$ – стоимость европейского опциона на покупку с моментом исполнения T по цене K; r – процентная ставка; σ – показатель волатильности.

Уравнение (1) в теории ценообразования опционов обычно рассматривается с краевым условием:

$$Y(T,S)=\max\{S-K,0\}, \tag{2}$$

характеризующим цену опциона в момент исполнения T.

Отметим, что модель (1), (2) предполагает отсутствие налогов и транзакционных издержек, а также отсутствие выплат дивидендов по акциям. Она применима только к европейским опционам колл. Имеются также некоторые другие ограничения [4].

Решая задачу (1), (2) методом разделения переменных Фурье, указанные авторы (впоследствии нобелевские лауреаты по экономике) получили замечательную формулу:

$$\mathrm{Y}(\mathrm{t},\mathrm{S})=S\Phi(d_1)-Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \tag{3}$$

носящую имя Блэка-Шоулза. В формуле (3) Φ – нормальная функция распределения, а величины d_1 и d_2 определяются выражениями:

$$d_1=\frac{\ln\frac{S}{K}+(T-t)\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_2=\frac{\ln\frac{S}{K}+(T-t)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{4}$$

Позднее было установлено, что формулы (3), (4) могут быть получены с помощью предельного перехода из дискретной биноминальной модели Кокса-Росса-Рубинштейна, а также могут быть выведены из соображений, связанных с мартингалами на нейтральном к риску рынке. Кроме того, были получены результаты, распространяющие теорию Блэка-Шоулза на американские опционы и на опционы пут. Был также рассмотрен случай возможных выплат дивидендов по базовому финансовому активу (см. [5] гл. VIII). Однако мы остановимся на классическом варианте модели Блэка-Шоулза.

Для подсчета справедливой цены опциона в формулах (3), (4) полагают $t=0$ и $S=S_0$, где S_0 – стоимость базового финансового актива в момент покупки опциона. В предположении возможности арбитража опцион, который продается по более низкой цене, чем справедливая, рекомендуется покупать. В тоже время продавцу опциона рекомендуется продавать его по цене выше справедливой.

Анализ задачи (1), (2) показывает, что сложность формулы (3), (4) связана с краевым условием (2), характерным для опционов на покупку. С другой стороны, как известно, [4] цена фьючерса с ценой исполнения K и днем поставки T вычисляется момент t по формуле:

$$X(t,S) = S - Ke^{-r(T-t)}, \tag{5}$$

где $S = S(t)$ – цена актива, на которую выписан фьючерс, в момент времени t. Нетрудно проверить, что функция $X(t,S)$ удовлетворяет уравнению (1) и краевому условию:

$$X(T,S) = S - K. \tag{6}$$

Если мы говорим об опционах, то условие (2) превращается в условие (6) в случае, когда в начальный момент $t = 0$, цена актива S не меньше цены исполнения опциона K и в дальнейшем при всех $0 \le t \le T$ также выполняется неравенство $S(t) \ge K$. Отметим, что в этом случае цена опциона (5) не зависит от волатильности. Кроме того, формула Блэка-Шоулза превращается в (5) при $\Phi(d_1) = \Phi(d_2) \approx 1$, т.е. когда величины d_1 и d_2 не меньше 5. В частности, это будет справедливо при значениях t достаточно близких к T.

В случае, когда в начальный момент $S \le K$ и в дальнейшем $S(t) \le K$ при всех $t \in [0,T]$ условию (2) соответствует условие $Y(T,S) = 0$. Решение уравнения (1) с этим условием дает тривиальную цену опциона $Y(t,S) = 0$ при $\forall t \in [0,T]$.

1. Приближенное решение задачи (1), (2) методом степенных рядов.

В [2] гл. 10 рассмотрен вопрос о приближенном решении уравнения (1) при условии (2) (либо другом краевом условии) методом конечных разностей. Нами будет рассмотрен другой подход. Как известно, каждая непрерывная функция (каковой является правая часть (2)) на конечном отрезке изменения аргумента может быть с любой степенью точности аппроксимирована полиномом. Таким образом, возникает вопрос о решении уравнения (1) с краевым условием в виде полинома:

$$Y(T,S) = g(S) = \sum_{j=0}^{n} a_j S^j. \tag{7}$$

В силу специфики уравнения (1) задачу (1), (7) удобно решать с помощью степенных рядов, методом неопределенных коэффициентов. А именно прелставим искомое решение задачи (1), (7) в виде:

$$Y(t,S) = \sum_{j=0}^{n} f_j(t) S^j. \tag{8}$$

При этом согласно условию (7)

$$f_j(T) = a_j \quad (j = 0,1,\dots,n). \tag{9}$$

Теорема 1. Решение задачи (1) в случае, когда краевое условие имеет вид (7), дается формулой:

$$Y(t,S)=a_0e^{r(t-T)}+a_1S+\sum_{j=2}^{n}e^{\gamma_j(T-t)}a_jS^j,$$

где $\gamma_j=(j-1)\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2 j\right)$.

Доказательство. Производные функции (8) имеют вид:

$$\frac{\partial Y}{\partial t}=\sum_{j=0}^{n}f_j'(t)S^j,\ \frac{\partial Y}{\partial S}=\sum_{j=1}^{n}f_j(t)jS^{j-1},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}=\sum_{j=2}^{n}f_j(t)j(j-1)S^{j-2}.$$

Подставим эти формулы в уравнение (1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях S^j. При S^0 имеем:

$$f_0'(t)=rf_0(t), \text{ причем } f_0(T)=a_0.$$

При S^1 имеем $f_1'(t)+rf_1(t)=rf_1(t)$, т.е. $f_1'(t)=0$, причем $f_1(T)=a_1$.

При S^2 имеем $f_2'(t)+2rf_2(t)+\frac{1}{2}\sigma^2\cdot 2f_2(t)=rf_2(t)$, т.е. $f_2'(t)=-rf_2(t)-\sigma^2\cdot f_2(t)$, причем $f_2(T)=a_2$.

При S^j $(2\le j\le n)$ имеем $f_j'+rjf_j+\frac{1}{2}\sigma^2\cdot j(j-1)f_j=rf_j$, т.е. $f_j'=-(j-1)\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2 j\right)f_j$ причем $f_j(T)=a_j$.

Решая задачу, полученную при S^0, найдем, что $f_0(t)=a_0e^{r(t-T)}$. Решая задачу, полученную при S^1, найдем, что $f_1(t)=a_1\ \forall t\in[0,T]$. Решая задачу, полученную при S^j, найдем, что $f_j(t)=e^{(j-1)\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2 j\right)(T-t)}a_j\ (2\le j\le n)$.

Используя обозначение для γ_j и подставляя найденные выражения для $f_j(t)$ в формулу (8), получим утверждение теоремы.

Следствие 1. В случае $Y(T,S)=S-K$ по теореме 1 получим решение вида $Y(t,S)=S-Ke^{-r(T-t)}$, указанное выше как решение задачи о стоимости фьючерса.

Следствие 2. В случае $Y(T,S)=S^n$ по теореме 1 получим решение вида $Y(t,S)=e^{(n-1)\left(r+\frac{n}{2}\sigma^2\right)(T-t)}S^n \quad (0\le t\le T)$, приведенное в книге [7].

Отметим, что подход, примененный в теореме 1 позволяет рассматривать также случай переменной процентной ставки $r(t)$ и волатильности $\sigma^2(t)$. В этом случае уравнение при S^j имеет решение вида $f_j(t)=e^{-(j-1)\int_0^t\left(r(\tau)+\frac{1}{2}\sigma^2(\tau)j\right)d\tau}c_j$. Используя условие $f_j(T)=a_j$, отсюда найдем $c_j=e^{(j-1)\int_0^T\left(r(\tau)+\frac{1}{2}\sigma^2(\tau)j\right)d\tau}a_j$. Тогда, полагая $\lambda_j(\tau)=r(\tau)+\frac{1}{2}\sigma^2(\tau)j$, получим $f_j(t)=e^{(j-1)\int_t^T\lambda_j(\tau)d\tau}a_j$.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. В случае переменной процентной ставки $r(t)$ и волатильности $\sigma^2(t)$ решение задачи (1), (7) имеет вид:

$$Y(t,S)=a_0e^{\int_t^T r(\tau)d\tau}+a_1S+\sum_{j=2}^{n}e^{(j-1)\int_t^T\lambda_j(\tau)d\tau}a_j,$$

где $\lambda_j(\tau)=r(\tau)+\frac{1}{2}\sigma^2 j$.

Следствие 3. Пусть правая часть $g(S)$ краевого условия (7) может быть представлена в виде степенного ряда, так что

$$Y(T,S)=g(S)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jS^j. \qquad (10)$$

Тогда решение задачи (1), (10) также имеет вид степенного ряда, соответствующего либо теореме 1, либо теореме 2.

2. Применение интерполяционных многочленов Лагранжа.

Представление краевой функции $g(S)$ в виде степенного ряда Маклорена возможно для аналитической функции $g(S)$. В случае небольшой гладкости (в частности непрерывности или кусочной непрерывности) $g(S)$ можно приближать эту функцию полиномами, используя среднеквадратическую аппроксимацию по системе степеней 1, S, S^2, …, S^n…. При этом, как известно, для достаточно больших n система для определения коэффициентов аппроксимации a_j является плохо обусловленной. В связи с этим целесообразно применять, например, интерполяционные формулы Лагранжа.

Как известно [1], интерполяционный полином Лагранжа I_n для функции $g(S)$, построенный по точкам S_0, S_1..., S_0, определяется формулой:

$$I_n(S)=\sum_{i=0}^{n} g(S_i)L_i(S),$$

где

$$L_i(S)=\frac{(S-S_0)\ldots(S-S_{i\text{-}1})(S-S_{i+1})\ldots(S-S_n)}{(S_i-S_0)\ldots(S_i-S_{i\text{-}1})(S_i-S_{i+1})\ldots(S_i-S_n)}.$$

В частности, для функции $g(S)$, задаваемой равенством (2), т.е. $g(S)=\max\{S\text{-}K{,}0\}$ интерполяционный полином, построенный по точкам $S_0=0{,}5K$, $S_1=K$, $S_2=1{,}5K$, имеет вид:

$$I_2(S)=K\text{-}1{,}5S+\frac{1}{K}S^2\approx g(S).$$

В самом деле, в этом случае $g(S_0)=0$, $g(S_1)=0$, $g(S_2)=0{,}5K$. При этом

$$L_2(S)=\frac{(S-S_0)(S-S_1)}{(S_2-S_0)(S_2-S_1)}=\frac{(S-0{,}5K)(S-K)}{0{,}5K^2}.$$

Откуда следует указанная формула для $g(S)$.

Тогда в соответствии с теоремой 1 имеет место

Следствие 4. Приближенное решение задачи (1), (2) имеет вид:

$$Y(t{,}S)\approx Ke^{r(t\text{-}T)}-1{,}5S+\frac{S^2}{K}e^{(r+\sigma^2)(T-t)}.$$

Если мы хотим получить более точную формулу, то можно взять, например, пять точек $S_0=0{,}5K$, $S_1=0{,}75K$, $S_2=K$, $S_3=1{,}25K$, $S_4=1{,}5K$. Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа будет иметь четвертый порядок, а приближенная формула решения задачи (1), (2) в соответствии с теоремой 1 будет содержать пять слагаемых.

Следствие 5. Справедливая цена европейского опциона на покупку приближенно равна:

$$Y(0{,}S_0)\approx Ke^{-rT}-1{,}5S_0+\frac{S_0^2}{K}e^{(r+\sigma^2)T}. \qquad (11)$$

Формулу (11) можно использовать для анализа зависимости справедливой цены опциона от различных факторов. Для этого вычислим производные:

$$\frac{\partial Y}{\partial S_0} \approx -1{,}5 + 2\frac{S_0}{K}e^{\left(r+\sigma^2\right)T}, \quad \frac{\partial Y}{\partial K} \approx e^{-rT} - \frac{S_0}{2K^2}e^{\left(r+\sigma^2\right)T},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \mathrm{r}} \approx -KTe^{-rT} + \frac{S_0^2}{K}Te^{\left(r+\sigma^2\right)T}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \sigma^2} \approx \frac{S_0^2}{K}Te^{\left(r+\sigma^2\right)T} > 0,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial T} \approx -Kre^{-rT} + \frac{S_0^2}{K}\left(r+\sigma^2\right)e^{\left(r+\sigma^2\right)T}.$$

Из этих выражений видно, что при достаточно больших $T > 0$ имеем $\frac{\partial Y}{\partial S_0} > 0$, $\frac{\partial Y}{\partial K} < 0$, $\frac{\partial Y}{\partial \mathrm{r}} > 0$, $\frac{\partial Y}{\partial \sigma^2} > 0$, $\frac{\partial Y}{\partial T} > 0$. Это подтверждает известные выводы (см. [4] гл.20) о том, что с ростом S_0 растет стоимость европейского опциона колл, с ростом цены исполнения K уменьшается стоимость опциона, с ростом процентной ставки r – увеличивается, с ростом риска – увеличивается, с ростом T – увеличивается.

Полученные формулы производных можно применять для приближенного подсчета эластичности справедливой цены опциона по различным факторам, от которых она зависит. При этом используется формула для эластичности функции Y по фактору x

$$E_x(Y) = \frac{x}{Y}\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Здесь в качестве фактора x могут выступать поочередно S_0, K, r, σ^2 и T. При этом эластичность приближенно покажет на сколько процентов изменится значение функции Y при изменении соответствующего фактора на 1%.

Другой подход к приближенному решению (1), (2), опирающийся на использовании системы полиномов Лежандра, продемонстрирован в работе [3].

Список источников

1. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов [текст] / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1981. – 720 с.

2. Уотшем, Т.Дж. Количественные методы в финансах [текст] / Т.Дж. Уотшем, К. Паррамоу. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999. – 527 с.

3. Хацкевич, В.Л. Решение уравнения Блэка-Шоулза, описывающего формирование цен на опционы, и некоторые свойства полиномов Лежандра [текст] / В.Л. Хацкевич // Системы управления и информационные технологии. – Воронеж: Научная книга, 2012. – №3(49).

4. Шарп У. Инвистиции [текст] / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли. - М.: ИНФРА-М, 2006. - 1028 с.

5. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т 1,2 М.: ФАЗИС, 1998.

6. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. – «Journal of Political Economy», May 1973, pp. 637-54.

7. Hull J., Options, Futures, and Other Derevatives, Prentice Hall, 2002.

8. Merton R.C. Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science. 4 №1 (spring 1973). Pp. 141-183

APPROXIMATE ANALYSIS OF THE FAIR PRICE OF AN OPTION ON THE BASIS OF THE BLACK-SCHOLES EQUATION

Khatskevich Vladimir Lvovich,
Dr. of Technical Science, Professor of the Chair of Higher Mathematics and Statistics of Voronezh filial-branch of Financial University under the Government of Russian Federation; okp.voronehz@vzfei.ru

The method of the approximate solution of the Black-Sholes equation describing formation of the prices for the European call options is presented. The method is based on representation of the decision in the form of a power series with use interpolation polynomial. The analysis of dependence of the found approached fair price from factors influencing it is carried out.
Keywords: model of pricing of options, the Black-Sholes equation, the fair price, a method of sedate numbers, Lagranzh interpolation polynomial.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Современная экономика: проблемы и решения» принимает к публикации материалы, содержащие результаты оригинальных исследований, оформленных в виде полных статей (до 20 страниц) и кратких сообщений (до 5 страниц).

Опубликованные материалы, а также материалы, представленные для публикации в других журналах, к рассмотрению не принимаются.

Для публикации авторы предоставляют следующие материалы в редакцию журнала (по электронной почте: journal.MEPR@yandex.ru):

1. **Статью,** набранную в текстовом редакторе Microsoft Word и оформленную в соответствии с требованиями: формат А4, шрифт – 14 Times New Roman, интервал – полуторный; поля: левое – 30 мм; верхнее и нижнее – 20 мм; правое – 15 мм.

Не рекомендуется использовать нумерацию страниц и автоматическую расстановку переносов.

Формулы помещаются в текст с использованием редактора формул Microsoft Equation со следующими установками: обычный 14 пт; крупный индекс 9 пт; мелкий индекс 7 пт; крупный символ 18 пт; мелкий символ 12 пт.

Рисунки должны иметь четкое изображение и быть выдержаны, как правило, в черно-белой гамме.

Рисунки и таблицы должны быть пронумерованы и иметь названия; на них должны быть ссылки в тексте.

Таблицы являются частью текста и не должны создаваться как графические объекты.

Обязательным является указание УДК.

Список источников приводится в конце статьи в алфавитном порядке в соответствии с ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления».

Статья должна носить, по преимуществу, аналитический, а не описательный, характер. В ней должен найти четкое отражение авторский подход к решению исследуемой проблемы.

2. **Аннотацию** (2-3 предложения) на русском и английском языках.

3. **Ключевые слова** на русском и английском языках.

4. **Сведения об авторе** (на русском и английском языках): ФИО полностью, ученая степень, ученое звание, место работы, должность, контактный телефон, адрес электронной почты, адрес для пересылки журнала.

Рукописи всех статей, поступивших в журнал, проходят через институт рецензирования. Максимальный срок рецензирования – от даты поступления до вынесения решения – составляет 1 месяц.

Плата с авторов за рецензирование статей не взимается. Плата за публикацию взимается в случае положительной рецензии.

Плата с аспирантов за рецензирование и публикацию статей (без соавторов) не взимается.

Авторы имеют право использовать все материалы в их последующих публикациях при условии, что будет сделана ссылка на публикацию в журнале «Современная экономика: проблемы и решения».

Материалы, не соответствующие указанным требованиям, рассматриваться не будут.