УДК 519.81

ОПТИМАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ СТРАТЕГИЯ В УСЛОВИЯХ НЕЧЕТКИХ ПАРАМЕТРОВ ФУНКЦИИ СПРОСА[1]

Матвеев Михаил Григорьевич,
доктор технических наук, профессор кафедры программирования и информационных технологий Воронежского государственного университета; mgmatveev@yandex.ru
Семенов Михаил Евгеньевич,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической гидрометеорологии Воронежского военного авиационного инженерного университета; mkl150@mail.ru
Лебедев Георгий Николаевич,
доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, профессор 301 кафедры Московского авиационного института: k301@mail.ru
Гринева Елена Валерьевна,
старший преподаватель кафедры высшей и прикладной математики Воронежского филиала Московского института инженеров транспорта; grineva-ev@mail.ru
Абополова Елена Александровна,
старший преподаватель Белгородского государственного университета; abapolova@mail.ru

Для задачи выбора портфеля производственных инвестиций предлагается метод решения, основанный на теории нечетких множеств, позволяющей устанавливать требуемые аналитические зависимости в условиях неоднородности доходности активов. Метод позволяет получать четкие оптимальные решения.
Ключевые слова: оптимальный инвестиционный портфель, экспертные оценки, нечеткие переменные, α-уровневый принцип, управление рисками.

В настоящее время одним из основных методов исследования динамики экономических систем являются методы математического моделирования. В зависимости от цели исследования и структуры экономическая система описывается в рамках стохастической или детерминированной модели. В ситуации, когда, в первую очередь, интересует «качественное» поведение, как правило, применяются детерминированные модели. В настоящей работе приводится модель оптимальной производственной ценовой стратегии производителя в условиях неидентифицируемых параметров функции

[1] Работа поддержана РФФИ, гранты № 11-08-00032-а, 12-07-005252-а.

спроса.

Обозначим через $z(t)$ $(t \geq 0)$ количество товара у производителя, $v(t)$ $(t \geq 0)$ количество товара у потребителя. Динамика изменений этих величин описывается системой:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = u - P, & (1) \\ \dot{v}(t) = P - kv. & (2) \end{cases}$$

В предположении, что производство товара может начаться в момент времени $t = 0$, начальные условия будут выглядеть

$$\begin{cases} z(0) = 0, & (3) \\ v(0) = 0. & (4) \end{cases}$$

В уравнениях (1), (2) приняты следующие обозначения: $u(t)$ – темп производства, $P(t)$ – темп продаж, k $(k \geq 0)$ – коэффициент потребления. Отметим, что случай $k = 0$ соответствует случаю длительного пользования товара.

В общем случае темп продаж зависит от $z(t)$ и $v(t)$ и текущей цены товара $c(t)$. Для анализа систем (1), (2) с начальными условиями (3), (4) выбор этой зависимости имеет принципиальное значение. В настоящей работе эту зависимость предлагается выбрать в виде

$$P(t) = (a - bc(t))z(t)\,. \qquad (5)$$

Этот выбор вполне сообразуется со здравым смыслом: с ростом цены темп продаж падает и увеличивается вместе с ростом товара у производителя.

Предположим, что темп производства

$$u \in [0; u_0], \qquad (6)$$

где u_0 – максимально возможный темп производства. Пусть процесс продолжается на некотором конечном временном интервале $t \in [0; T]$. Пусть k_1 – затраты на хранение единицы товара. Себестоимость производства единицы товара возьмем равной 1. Тогда доход производителя определяется равенством:

$$I = \int_0^T (c(t) \cdot P(t) - u(t) - k_1 \cdot z(t))dt\,. \qquad (7)$$

Таким образом, рассматриваемая задача является задачей оптимального управления. Требуется найти такие функции $u = u(t)$ и $c = c(t)$, при которых функционал (7) примет максимальное значение, а динамика объекта описывается уравнениями (1), (2).

Для решения задачи применим принцип максимума Понтрягина. Гамильтон задачи H будет иметь вид:

$$H = u(\lambda_1 - 1) + (a - bc)z(c - \lambda_1 - \lambda_2) - k_1 z - \lambda_2 kv\,. \qquad (8)$$

Максимум функции достигается в силу линейности функции Гамильтона по темпу производства при:

$$u^* = \begin{cases} u_0, \lambda_1 \geq 1 \\ 0, \lambda_1 < 1 \end{cases}. \qquad (9)$$

Так как по параметру c функция Гамильтона является квадратичной, то ее максимум определяется соотношением $\frac{\partial H}{\partial c} = 0$, тогда получим оптимальную цену

$$c^*(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{b} + \lambda_1 - \lambda_2\right]. \tag{10}$$

Сопряженные переменные λ_1 и λ_2 должны удовлетворять уравнениям:

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial z} = -(a - bc)(c - \lambda_1 + \lambda_2) + k_1, \tag{11}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial v} = \lambda_2 k_1 \tag{12}$$

с граничными условиями

$$\lambda_1(t) = 0, \tag{13}$$

$$\lambda_2(t) = 0, \tag{14}$$

так как рассматриваемая задача является задачей со свободными концами.

Решая дифференциальные уравнения (11), (12) с граничными условиями (13), (14) получим сопряженные переменные

$$\lambda_1(t) = \frac{a^2(T - t)}{b(a(T - t) + 4)}, \tag{15}$$

$$\lambda_2(t) \equiv 0. \tag{16}$$

Тогда оптимальная цена задается выражением:

$$c^*(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{b} + \frac{a^2(T - t)}{b(a(T - t) + 4)}\right]. \tag{17}$$

Будем предполагать, что один из параметров функции продаж, по каким либо причинам, невозможно точно идентифицировать. В этом случае, если известен диапазон значений, его естественно представить как нечеткий с некоторой функцией принадлежности μ.

Для решения задач с нечеткими параметрами применяется метод обобщения Л. Заде [1]. Переборный характер этого метода, затрудняет его использование применительно к данной задаче.

Поэтому предлагается два новых подхода к решению рассматриваемой задачи.

Первый подход заключается в использовании α-уровневого принципа, при котором все нечеткие переменные представляются четкими интервалами на заданных значениях α-уровня и на каждом α-уровне $\alpha \in [0,1]$ решается задача уже с четкими переменными, вычисленными по формуле

$$\overline{b_1}(\alpha) = \frac{b^L(\alpha) + b^R(\alpha)}{2}, \tag{18}$$

где $b^L(\alpha)$ и $b^R(\alpha)$ – левые и правые концы α-интервалов, или на основе интегральных характеристик по формуле

$$\overline{b_2}(\alpha) = \frac{\int\limits_{\mu(b) \ge \alpha} b \cdot \mu(b)\,db}{\int\limits_{\mu(b) \ge \alpha} \mu(b)\,db}. \tag{19}$$

Второй подход заключается в усреднении самого функционала $I(b)$ на каждом уровне α по формуле

$$I(\alpha) = \frac{\int\limits_{\mu(b)\ge\alpha} I(b)\cdot\mu(b)\,db}{\int\limits_{\mu(b)\ge\alpha} \mu(b)\,db}. \qquad (20)$$

Ниже рассматривается случай, в котором $a = 5$, $T = 10$, $u_0 = 4$, $k_1 = 0$, $k = 0.5$, а параметр $\widetilde{b}$ - нечеткое число с треугольной функцией принадлежности, изображенной на рис. 1.

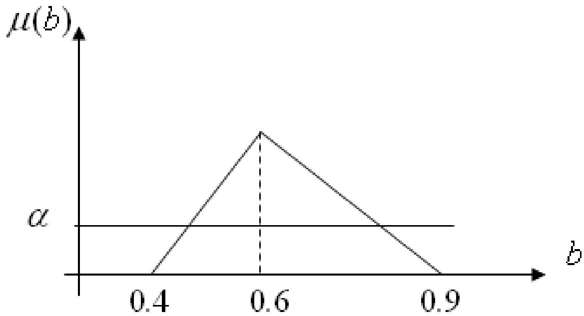

Рис. 1. Нечеткое треугольное число b

Тогда функция цены $c(t,b) = \frac{1}{b}\cdot\frac{5(10-t)+2}{10.8-t}$.

Выберем конечное число α-уровней $\alpha \in [0;0.25;0.5;0.75;1]$. Найдем решение задачи двумя методами и сравним результаты.

Решая задачу первым методом, используя формулу (18), находим значение $\overline{b_1}(\alpha) = \frac{13-\alpha}{20}$.

Используя формулу (19), находим значение

$$\overline{b_2}(\alpha) = \frac{\int\limits_{\frac{\alpha+2}{5}}^{0.6} b(5b-2)db + \int\limits_{0.6}^{\frac{9-3\alpha}{10}} b(3-\frac{10}{3}b)db}{\int\limits_{\frac{\alpha+2}{5}}^{0.6} (5b-2)db + \int\limits_{0.6}^{\frac{9-3\alpha}{10}} (3-\frac{10}{3}b)db}.$$

Решая задачу вторым методом, используя формулу (20):

$$I(a) = \frac{\int\limits_{\mu^L(\alpha)\ge\alpha} I(b)\mu^L(b)db + \int\limits_{\mu^R(\alpha)\ge\alpha} I(b)\mu^R(b)db}{\int\limits_{\mu^L(\alpha)\ge\alpha} \mu^L(b)db + \int\limits_{\mu^R(\alpha)\ge\alpha} \mu^R(b)db}.$$

Вычисленный доход производства на α-уровнях в трех вариантах приведен в табл. 1.

Таблица 1

Доход производства

α	Значение функционала $I(\alpha)$, усредняя параметр $\tilde{b}$ по формуле (18)	Значение функционала $I(\alpha)$, усредняя параметр $\tilde{b}$ по формуле (19)	усредняя решение $I(\alpha)$ по формуле (20)
0	1036.05	930.69	1094.32
0.25	1057.12	1006.14	1093.94
0.5	1079.04	1054.06	1096.88
0.75	1101.84	1100.03	1106.66
0.999	1125.6	1125.5	1125.49

Сравнивая полученные решения, можно сделать вывод о их незначительном отличии. Следовательно, для решения задачи можно воспользоваться самым простым из рассмотренных вариантов, использующим формулу (18).

Оптимальная цена будет иметь вид $c(t,\alpha)=\dfrac{20}{13-\alpha}\cdot\dfrac{5(10-t)+2}{10.8-t}$, показанный на рис. 2.

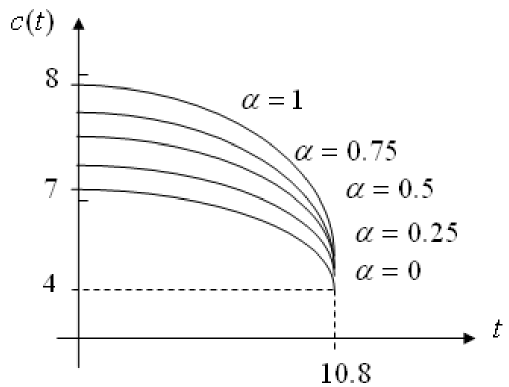

Рис. 2. Функция цены на каждом α-уровне

Темп производства будет иметь вид, показанный на рис. 3.

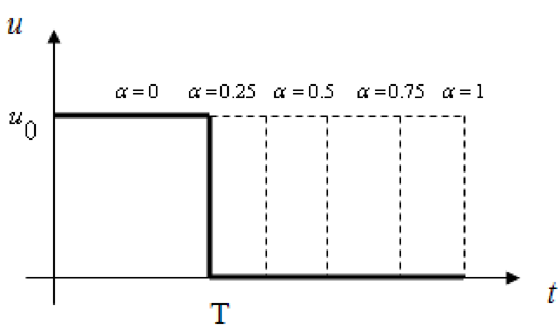

Рис. 3. Темп производства на каждом α-уровне

Список источников

1. Беллман, Р. Принятие решений в расплывчатых условиях [текст] / Р. Беллман, Л. Заде // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М.: Мир, 1976. – С. 172-215.

OPTIMUM PRODUCTION STRATEGY IN THE CONDITIONS OF INDISTINCT PARAMETERS OF FUNCTION OF DEMAND

Matveyev Michail Grigoryevich,
Dr. of Technical Sciences, Professor of the Chair of Programming and Information Technology of Voronezh State University;
mgmatveev@yandex.ru
Semyonov Michail Evgenyevich,
Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Chair of Theoretical Hydrometeorology of Voronezh Military Aviation Engineering University**;** mkl150@mail.ru
Lebedev George Nikolaevich,
Dr. of Technical Sciences, Honored Worker of Science, Professor of 301st Chair of Moscow Aviation Institute; k301@mail.ru
Grineva Elena Valeryevna,
Lecturer of the Chair of Higher and Applied Mathematics of Voronezh branch of Moscow Institute of Transportation Engineers;
grineva-ev@mail.ru
Abopolova Elena Aleksandrovna,
Lecturer of the Chair of the Belgorod state university;
abapolova@mail.ru

In this paper we present a model of optimal pricing strategy of industrial products in unidentifiable parameters of the demand function.
Keywords: optimal production strategy, expert evaluation, fuzzy variables, α-level principle.