УДК 330.322

ГЛАВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МОДЕЛЯХ ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

Давнис Валерий Владимирович,
доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета;
vdavnis@mail.ru
Касаткин Сергей Евгеньевич,
докторант Воронежского государственного университета;
k_s_e@rambler.ru
Ардаков Алексей Анатольевич,
аспирант Воронежского государственного университета;
ardakovaa@bk.ru

Рассмотрена возможность использования главных компонент для формирования модели портфельного инвестирования Шарпа. Получены формулы для расчета доходности и дисперсии портфеля в случае, когда в регрессионную модель включены две компоненты. Показано, каким образом изменяется модель портфельного инвестирования при ее формировании на основе двухкомпонентной модели.

Ключевые слова: портфель ценных бумаг, одноиндексная модель, однокомпонентная модель, двухкомпонентная модель, риск.

Главные компоненты – достаточно известный аппарат математической статистики. Они широко применяются в задачах обработки данных для сокращения признакового пространства, особенно в тех случаях, когда сокращение должно осуществляться с минимальной потерей информации. Хорошо известны задачи классификации и регрессионного анализа, в которых применение главных компонент играет важную роль. Примеры использования главных компонент в задачах портфельного инвестирования не известны, но вполне могут иметь место. Прежде всего, это касается тех моделей портфельного инвестирования, в которых используется аппарат регрессионного анализа. По крайней мере, известны две модели, при построении которых используются регрессионные уравнения. Это модель У. Шарпа [1, 2] и модель с матрицей риск-взаимодействия [3].

Чтобы понять основной смысл применения главных компонент в моделях портфельного инвестирования, рассмотрим подробно схему построения модели Шарпа. Схема основана на одноиндексной модели, представляющей собой однофакторную регрессионную зависимость доходности финансового актива от индекса (рыночной доходности):

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{It} + \varepsilon_{it}, \quad i = \overline{1,n}, \quad t = \overline{1,T}, \tag{1}$$

где r_{it} – доходность i-го актива в момент времени t; r_{It} – доходность рыночного индекса в момент времени t; α_i, β_i – оцениваемые параметры регрессионной модели; ε_{it} – ненаблюдаемая случайная величина; T – объем выборочной совокупности, которая использовалась для построения регрессионной модели.

Безусловно, рыночная доходность является важнейшим фактором, оказывающим влияние на доходность финансовых активов. Кроме рыночной доходности есть большое множество факторов, оказывающих влияние на доходность активов (дивидендная политика эмитентов, цена на нефть, индексы других фондовых бирж). Но используется в этой модели только один фактор. Почему? Причина в том, что однофакторная регрессия является удобным инструментом для построения модели портфельного инвестирования. На основе коэффициентов однофакторной модели Шарпу удалось получить характеристики, необходимые для построения модели портфеля ценных бумаг. Рассмотрим основные моменты построения этой модели с целью их обобщения для случая, когда в качестве фактора используется главная компонента, которая обычно представима в виде нормировано-центрированной или только центрированной линейной комбинации показателей $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$:

$$u_1 = \gamma_1^{(1)} x_1 + \gamma_2^{(1)} x_2 + \cdots + \gamma_p^{(1)} x_p, \tag{2}$$

где $\gamma_i^{(1)}$ – коэффициенты (весовые значения признаков) первой главной компоненты.

Первая главная компонента среди всех прочих нормировано-центрированных или только центрированных линейных комбинаций этих же показателей обладает наибольшей дисперсией.

В случае применения одноиндексной модели основные характеристики финансовых активов, включаемых в модель портфельного инвестирования), определяются по следующим формулам:

$$\bar{r}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{r}_I, \tag{3}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2, \tag{4}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_I^2, \tag{5}$$

где $\bar{r}_i$, $\bar{r}_I$ – математические ожидания доходности i-го актива и индекса; σ_i^2, σ_I^2 – дисперсии доходностей i-го актива и индекса; σ_{ij} – ковариация доходностей i-го и j-го активов.

Формулы получены благодаря свойствам случайных величин ε_{ti}, которые, в силу того, что сами случайные величины ненаблюдаемы, постулируется. Предположения естественны и не вызывают сомнений.

На основе этих формул определяются доходность портфеля и дисперсия портфеля. На основе именно этих двух характеристик формируется математическая модель портфеля ценных бумаг.

Если учитывать зависимость доходности актива от средней доходности рынка, определяемой в соответствии с уравнением (1), то ожидаемую доходность портфеля можно определять по формуле:

$$\mathrm{E}(r_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i + \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \right) \mathrm{E}(r_I). \tag{6}$$

Представив второй член этого выражения в виде

$$\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \right) \mathrm{E}(r_I) = w_{n+1}\, \mathrm{E}(\alpha_{n+1}), \tag{7}$$

где

$$w_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i, \tag{8}$$

$$\mathrm{E}(\alpha_{n+1}) = \mathrm{E}(r_I), \tag{9}$$

можно ожидаемую доходность портфеля представить более компактным выражением:

$$\mathrm{E}(r_n) = \sum_{i=1}^{n+1} w_i \alpha_i\,. \tag{10}$$

Выражение $\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \right)$, представляющее собой взвешенную сумму коэффициентов регрессии, Шарп назвал портфельной бетой. Таким образом, ожидаемая доходность портфеля $E(r_n)$ складывается из двух составляющих:

а) суммы взвешенных параметров α_i ценных бумаг – $w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + \ldots + w_n\alpha_n$, что отражает вклад в доходность портфеля самих ценных бумаг;

б) компоненты $w_{n+1}\alpha_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \right) \mathrm{E}(r_I)$, т.е. произведения портфельной «беты» и ожидаемой рыночной доходности, что отражает взаимосвязь рынка с портфелем.

Дисперсия портфеля может быть представлена в виде:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1\, j\neq i}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j}\,. \tag{11}$$

Если вместо дисперсий и ковариаций в (11) подставить выражения, то после соответствующего преобразования дисперсия портфеля может быть представлена в виде:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n+1} w_i^2 \sigma_{\varepsilon,i}^2\,. \tag{12}$$

При использовании этой формулы необходимо иметь в виду, что $w_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i$, т.е. $(w_{n+1})^2 = (w_1\beta_1 + w_2\beta_2 + \ldots + w_n\beta_n)^2$, а $\sigma_{\varepsilon,n+1}^2 = \sigma_I^2$. Следовательно, дисперсию портфеля из n акций, можно, как и ожидаемую доходность, представить в виде двух компонент:

а) суммой средневзвешенных дисперсий ошибок $\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_{\varepsilon,i}^2$, где весами служат w_i , что отражает долю риска портфеля, связанного с риском самих ценных бумаг;

б) $w_{n+1}^2 \sigma_I^2$ – взвешенной величиной дисперсии доходности рыночного индекса, где весом служит квадрат портфельной беты, отражающий долю риска портфеля, определяемого нестабильностью самого рынка.

Возможность использования данных формул при построении модели портфельного инвестирования в случае, когда учитывается несколько факторов, оказывающих влияние на доходность финансовых активов, реализуется путем использования главных компонент. Причем возможны два варианта. Первый вариант довольно простой. Он предусматривает использование только одной главной компоненты. В этом случае все формулы, выведенные для одноиндексной модели, остаются в силе при соответствующей замене характеристик рыночного индекса (r_I, σ_I^2) на характеристики главной компоненты (r_u, σ_u^2). Модель в этом случае будем называть однокомпонентной [4].

При построении однокомпонентной модели необходимо учитывать одну особенность, которую имеет смысл обсудить. Так как значения фактора, в качестве которого используется главная компонента, центрированы, то и значения зависимой переменной тоже должны быть центрированы, т.е. строится модель следующего вида:

$$\begin{aligned} r_{it} - \overline{r}_i &= \beta_i u_{1t} = \\ &= \beta_i [\gamma_1^{(1)}(r_{I_1 t} - \overline{r}_{I_1}) + \gamma_2^{(1)}(r_{I_2 t} - \overline{r}_{I_2}) + \cdots + \gamma_n^{(1)}(r_{I_n t} - \overline{r}_{I_n})]. \end{aligned} \tag{13}$$

Простые преобразования позволяют данную модель преобразовать к виду

$$r_{it} = \tilde{\alpha}_i + \beta_i \tilde{u}_{1t}, \tag{14}$$

где

$$\tilde{\alpha}_i = \overline{r}_i - \beta_i [\gamma_1^{(1)} \overline{r}_{I_1} + \gamma_2^{(1)} \overline{r}_{I_2} + \cdots + \gamma_n^{(1)} \overline{r}_{I_n}],$$

$$\tilde{u}_{1t} = \gamma_1^{(1)} r_{I_1 t} + \gamma_2^{(1)} r_{I_2 t} + \cdots + \gamma_n^{(1)} r_{I_n t}.$$

А это значит, что однокомпонентная модель строится как обычная регрессионная модель с одним фактором, значения которого определяются с помощью нецентрированной главной компоненты. Следовательно, модель портфельного инвестирования, в которой используются параметры однокомпонентных моделей финансовых активов, остается практически без изменений:

$$\mathbf{w}'_{n+1} \mathbf{\Sigma}_d \mathbf{w}_{n+1} \to \min, \tag{15}$$

$$\mathbf{w}'_{n+1} \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \mu, \tag{16}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{i} = 1, \tag{17}$$

$$\mathbf{w}'\boldsymbol{\beta} = w_{n+1}. \tag{18}$$

Практическое использование предлагаемого подхода в основном определяется возможностью построения адекватных регрессионных моделей. Ситуации могут быть разные. Например, дисперсионное отношение Фишера показывает, что в целом регрессионная модель адекватна, но в соответствии с критерием Стьюдента один из параметров модели статистически незначим. Случай, когда незначим свободный член однокомпонентной или одноиндексной модели, был рассмотрен в [4]. Для случая, когда модель неадекватна, как правило, в модель включают дополнительные факторы. В нашем случае таким фактором является следующая главная компонента. Естественно, реализация такого подхода требует пересмотра формул, специально полученных для формирования модели портфельного инвестирования. Исследуем этот вопрос для случая, когда в регрессионную модель включаются две главных компоненты, т.е. оцененная модель имеет вид:

$$r_{it} - \overline{r}_i = \beta_{1i} u_{1t} + \beta_{2i} u_{2t} =$$
$$= \beta_{1i}[\gamma_1^{(1)}(r_{I_1 t} - \overline{r}_{I_1}) + \gamma_2^{(1)}(r_{I_2 t} - \overline{r}_{I_2}) + \cdots + \gamma_n^{(1)}(r_{I_n t} - \overline{r}_{I_n})]$$
$$+ \beta_{2i}[\gamma_1^{(2)}(r_{I_1 t} - \overline{r}_{I_1}) + \gamma_2^{(2)}(r_{I_2 t} - \overline{r}_{I_2}) + \cdots + \gamma_n^{(2)}(r_{I_n t} - \overline{r}_{I_n})]$$

По аналогии с (14) двухкомпонентную (19) модель доходности i–го актива можно записать в виде:

$$r_{it} = \tilde{\alpha}_i + \beta_{1i}\tilde{u}_{1t} + \beta_{2i}\tilde{u}_{2t}, \tag{20}$$

где

$$\tilde{\alpha}_i = \overline{r}_i - \beta_{1i}[\gamma_1^{(1)}\overline{r}_{I_1} + \gamma_2^{(1)}\overline{r}_{I_2} + \cdots + \gamma_n^{(1)}\overline{r}_{I_n}]$$
$$- \beta_{2i}[\gamma_1^{(2)}\overline{r}_{I_1} + \gamma_2^{(2)}\overline{r}_{I_2} + \cdots + \gamma_n^{(2)}\overline{r}_{I_n}],$$
$$\tilde{u}_{1t} = \gamma_1^{(1)} r_{I_1 t} + \gamma_2^{(1)} r_{I_2 t} + \cdots + \gamma_n^{(1)} r_{I_n t},$$
$$\tilde{u}_{2t} = \gamma_1^{(2)} r_{I_1 t} + \gamma_2^{(2)} r_{I_2 t} + \cdots + \gamma_n^{(2)} r_{I_n t}.$$

На основе двухкомпонентной модели финансового актива можно записать ожидаемую доходность этого актива, дисперсию и ковариацию двух активов. Выражения для ожидаемой доходности имеет вид:

$$\overline{r}_i = \tilde{\alpha}_i + \beta_{1i}\overline{u}_1 + \beta_{2i}\overline{u}_2, \tag{21}$$

где

$$\overline{u}_{1t} = \gamma_1^{(1)}\overline{r}_{I_1 t} + \gamma_2^{(1)}\overline{r}_{I_2 t} + \cdots + \gamma_n^{(1)}\overline{r}_{I_n t},$$
$$\overline{u}_{2t} = \gamma_1^{(2)}\overline{r}_{I_1 t} + \gamma_2^{(2)}\overline{r}_{I_2 t} + \cdots + \gamma_n^{(2)}\overline{r}_{I_n t}.$$

Дисперсия и ковариация записываются следующим образом:

$$\sigma_i^2 = \beta_{1i}^2\sigma_{u_1}^2 + \beta_{2i}^2\sigma_{u_2}^2 + \sigma_{\varepsilon,i}^2, \tag{22}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_{1i}\beta_{1j}\sigma_{u_1}^2 + \beta_{2i}\beta_{2j}\sigma_{u_2}^2. \tag{23}$$

При выводе данных формул использовалось свойство некоррелированности главных компонент между собой и со случайными составляющими, а также независимость случайных составляющих между собой.

Полученные выражения позволяют записать формулы для расчета характеристик портфеля ценных бумаг. Формула для расчета ожидаемой доходности портфеля в случае двухкомпонентной модели имеет вид

$$\mathrm{E}(r_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i\tilde{\alpha}_i + \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\beta_{1i}\right)\mathrm{E}(u_1) + \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\beta_{2i}\right)\mathrm{E}(u_2). \tag{24}$$

Представим второй и третий члены этого выражения в виде:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_{1i}\right) \mathrm{E}(u_1) = w_{n+1} \tilde{\alpha}_{n+1}, \quad (25)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_{2i}\right) \mathrm{E}(u_2) = w_{n+2} \tilde{\alpha}_{n+2}, \quad (26)$$

где

$$w_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_{1i},$$

$$w_{n+2} = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_{2i},$$

$$\tilde{\alpha}_{n+1} = \mathrm{E}(u_1),$$

$$\tilde{\alpha}_{n+2} = \mathrm{E}(u_2).$$

Введенные обозначения позволяют ожидаемую доходность портфеля представить более компактным выражением:

$$\mathrm{E}(r_n) = \sum_{i=1}^{n+2} w_i \tilde{\alpha}_i. \quad (27)$$

Выражения $\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_{1i}\right)$ и $\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_{2i}\right)$, представляющие собой взвешенную сумму коэффициентов регрессии, в соответствии с терминологией Шарпа, будем называть первой портфельной бетой и второй портфельной бетой. Таким образом, ожидаемая доходность портфеля $E(r_n)$ складывается из трех составляющих:

а) суммы взвешенных параметров $\tilde{\alpha}_i$ ценных, отражающей вклад в доходность портфеля самих ценных бумаг;

б) компоненты $w_{n+1}\tilde{\alpha}_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_{1i}\right) \mathrm{E}(u_1)$, представляющей собой произведение первой портфельной «беты» и взвешенной ожидаемой доходностью на рынках, учитываемых моделью;

в) компоненты $w_{n+2}\tilde{\alpha}_{n+2} = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_{2i}\right) \mathrm{E}(u_2)$, представляющей собой произведение второй портфельной «беты» и взвешенной ожидаемой доходностью на рынках, учитываемых моделью.

Если в выражение для дисперсии портфеля (11) подставить (22) и (23), то после ряда несложных преобразований получим:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n+2} w_i \sigma_{\varepsilon,i}^2. \quad (28)$$

В этой формуле необходимо пояснить смысл двух последних слагаемых. Весовой коэффициент в предпоследнем слагаемом представляет собой квадрат первой портфельной беты, т.е.:

$$\left(w_{n+1}\right)^2 = \left(w_1\beta_{11} + w_2\beta_{12} + \ldots + w_n\beta_{1n}\right)^2,$$

а в качестве $n+1$ дисперсии используется дисперсия первой главной компоненты, т.е. $\sigma_{\varepsilon,n+1}^2 = \sigma_{u_1}^2$. Соответственно весовой коэффициент последнего члена этой суммы есть произведение второй портфельной беты:

$$\left(w_{n+2}\right)^2 = \left(w_1\beta_{21} + w_2\beta_{22} + \ldots + w_n\beta_{2n}\right)^2$$

и дисперсии второй главной компоненты $\sigma^2_{\varepsilon,n+2} = \sigma^2_{u_2}$.

Следовательно, дисперсию портфеля из n акций, можно, как и ожидаемую доходность, представить в виде трех компонент:

а) первая компонента это сумма средневзвешенных остаточных дисперсий $\sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma^2_{\varepsilon,i}$, где весами служат квадраты w_i, что отражает долю риска портфеля, связанного с риском ценных бумаг;

б) вторая компонента $w^2_{n+1}\sigma^2_{u_1}$ – произведение величины дисперсии первой главной компоненты, являющейся линейной комбинацией доходностей рынков, учитываемых моделью, на первую портфельную бету и отражающая основную долю рыночного риска;

в) третья компонента $w^2_{n+2}\sigma^2_{u_2}$ – произведение величины дисперсии второй главной компоненты, являющейся линейной комбинацией доходностей рынков, учитываемых моделью, на вторую портфельную бету и отражающая некоторую долю рыночного риска.

Полученные выражения делают понятной формализацию задачи портфельного инвестирования на основе параметров двухкомпонентной модели доходности финансовых активов. В этом случае модель записывается следующим образом:

$$\mathbf{w}'_{n+2}\mathbf{\Sigma}_d\mathbf{w}_{n+2} \to \min, \tag{29}$$

$$\mathbf{w}'_{n+2}\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \mu, \tag{30}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{i} = 1, \tag{31}$$

$$\mathbf{w}'\boldsymbol{\beta}_1 = w_{n+1}, \tag{32}$$

$$\mathbf{w}'\boldsymbol{\beta}_2 = w_{n+2}. \tag{33}$$

Обозначения дополнительно введенных в модель величин понятны и не требуют специального описания.

Таким образом, применение главных компонент расширяет информационные возможности, позволяя в модели портфеля ценных бумаг учитывать ситуации, которые имеют место на нескольких фондовых рынках. Это, по нашему мнению, обеспечивает получение более надежных решений, обладающих уточненной оценкой риска. Данное уточнение не предполагает минимизацию риска. Применение главных компонент расширяет множество учитываемых факторов риска, снижая тем самым возможность воздействия на доходность портфеля неизвестных причин.

Список источников

1. Sharpe, W. Portfolio Theory and Capital Markets [текст] / W. Sharpe. – N.Y.: McGraw-Hill, 1970. – 316 p.

2. Аскинадзи, В.М. Инвестиционное дело [текст] / В.М. Аскинадзи, В.Ф. Максимова, В.С. Петров. – М.: Маркет ДС, 2007. – 512 с.

3. Давнис, В.В. Модели портфельного образа и оценка возможностей их практического использования [текст] / В.В. Давнис, С.Е. Касаткин, О.В. Тимченко // Современная экономика: проблемы и решения. – 2011. – №9 (21). – С. 126 – 137.

4. Давнис, В.В. Однокомпонентная модель портфельного инвестирования [текст] / В.В. Давнис, С.Е. Касаткин, А.А. Ардаков // Современная экономика: проблемы и решения. – 2012. – №5 (29). – С. 150 – 157.

MAIN COMPONENTS AND THEIR USE IN MODELS OF PORTFOLIO INVESTMENT

Davnis Valeriy Vladimirovich,
Dr. Sc. Of Economy, Chief of the Chair of Information Technologies and Mathematical Methods in Economy of Voronezh State University; vdavnis@mail.ru
Kasatkin Sergey Yevgenyevich,
Candidate for a Doctor's Degree of Voronezh State University; k_s_e@rambler.ru
Ardakov Aleksey Anatolyevich,
Post-graduate student of Voronezh State University; ardakovaa@bk.ru

The possibility of using principal components to form a model of portfolio investment Sharpe is considered. The formulas for the calculation of return and portfolio variance when the regression model includes two components were got. It is shown how the model changes of portfolio investment at its formation on the basis of a two-component model.

Keywords: portfolio of securities, single-index model, single model, a two-component model, risk.