УДК 519.37

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЫНОЧНОГО РАВНОВЕСИЯ В УСЛОВИЯХ ГИСТЕРЕЗИСНОГО ПОВЕДЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ[1]

Семенов Михаил Евгеньевич,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической гидрометеорологии Воронежского военного авиационного инженерного университета; mkl150@mail.ru
Мишин Максим Юрьевич,
аспирант Воронежского государственного архитектурно-строительного университета; m.on1ooker@gmail.com
Кабулова Евгения Георгиевна,
кандидат технических наук, заведующая отделом аспирантуры Старооскольского технологического института (филиала Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»); otdel_aspirant@mail.ru
Абополова Елена Александровна,
старший преподаватель Белгородского государственного университета; abapolova@mail.ru

В статье изучается экономико-математическая модель рыночного равновесия в условиях гистерезисного поведения экономических агентов, приводятся условия возникновения бифуркаций и хаотических режимов.
Ключевые слова: гистерезис, неидеальное реле, экономическая стратегия, экономические агенты, рыночное равновесие.

Одной из важных задач экономической стратегии органа управления является моделирование процесса производства и потребления продукции. При этом желательно учесть наиболее существенные особенности динамики моделируемых систем. Один из важнейших аспектов исследования экономических процессов связан с поведением экономических агентов в окрестности равновесных состояний. Современные исследования показывают, что состояние экономической системы в фиксированный момент времени зависит не только от значений параметров в этот момент, но и от их значений в предыдущие моменты. Эту особенность экономических систем отразим в соответствующих моделях.

Наиболее подходящими для решения поставленной задачи являются преобразователи гистерезисной природы. Следуя классическим схемам М.А. Красносельского и А.В. Покровского, гистерезисные операторы

[1] Работа поддержана грантами РФФИ №11-08-00032-а и №12-07-00252-а.

трактуются как преобразователи, определенные на пространстве непрерывных функций, динамика которых описывается соотношениями: вход – состояние и состояние – выход.

Обозначим через $R[\alpha, \beta, x_0]$ двухпозиционное реле с пороговыми числами α и β. Пространством состояний неидеального реле является пара чисел {0, 1}. Связь между входом $u(t) \in c_{[0,t]}$ и переменным выходом $x(t) \in \{0, 1\}$ устанавливается оператором $R[\alpha, \beta, x_0]$:

$$x(t) = R[\alpha, \beta, x_0] \cdot u(t), \tag{1}$$

здесь x_0 – начальное состояние преобразователя.

Начальное состояние x_0 преобразователя должно удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{gathered} \text{если } u(0) \le \alpha \text{, то } x_0 = 0; \\ \text{если } u(0) \ge \beta \text{, то } x_0 = 1; \\ \text{если } \alpha \le u(0) \le \beta \text{, то } x_0 = 0 \text{ или } x_0 = 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Преобразователем Пресаха называют континуальный аналог преобразователя, состоящий из неидеальных реле, соединенных параллельно.

Рассмотрим частный класс таких преобразователей. Пусть на полуплоскости $Đ_{\alpha,\beta} \equiv \{\alpha, \beta : \alpha < \beta\}$ определена положительная абсолютно непрерывная суммируемая функция $\lambda = \lambda(\alpha, \beta)$. Определим на полуплоскости $P_{\alpha,\beta}$ меру μ равенством:

$$\mathrm{d}\mu = \lambda(\alpha, \beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \cdot \tag{3}$$

Измеримыми по мере μ будут все измеримые по Лебегу множества, в том числе и имеющие бесконечную меру.

Обозначим через Ψ класс ограниченных функций, заданных на неотрицательной полуоси и удовлетворяющих условию Липшица с коэффициентом, равным единице. Введем в рассмотрение множество Ω_ψ скалярных функций $\omega(\alpha, \beta)$, заданных на полуплоскости $Đ_{\alpha,\beta} \equiv \{\alpha, \beta : \alpha < \beta\}$ и таких, что:

$$\omega(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha + \beta > \psi(\beta - \alpha), \\ 1, & \text{если } \alpha + \beta \le \psi(\beta - \alpha), \end{cases} \tag{4}$$

где $\psi(\nu) \in \Psi$. Множество Ω_ψ – пространство возможных состояний преобразователя Пресаха-Гилтая. На рис. 1 показан один из элементов множества Ω_ψ.

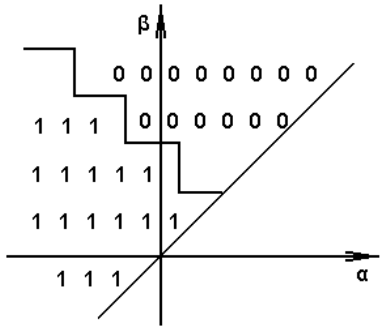

Рис. 1. Элемент множества Ω_ψ

Пусть задан произвольный элемент $\omega_0(\alpha,\beta)\in\Omega_\psi$. Допустимыми для преобразования Пресаха $(\tilde{A},\xi)$, находящегося в начальном состоянии $\omega_0(\alpha,\beta)$, являются все непрерывные входы $u(t), t\ge 0$, удовлетворяющие равенству $u(0)=\psi_0(0)$, где $\omega_0(\alpha,\beta)$ и $\psi_0(\nu)$ связаны соотношением (4).

Соотношение вход – переменное состояние преобразователя Пресаха (Γ,ξ) устанавливается оператором $\tilde{A}$:

$$\omega(\alpha(\gamma),\beta(\gamma),t)=\Gamma\left[\omega_0(\gamma)\right]\cdot u(t)=R\left[\omega_0(\alpha,\beta,\gamma),\alpha(\gamma),\beta(\gamma)\right]\cdot u(t), \quad (5)$$

где γ – параметр, $\gamma\in Đ_{\alpha,\beta}$.

Выход преобразователя $(\tilde{A},\xi)$ определяется соотношением:

$$\xi(t)=\int\limits_{\alpha\le\beta}\omega(\alpha,\beta,t)d\mu=\mu(\{\alpha,\beta\}:R[\omega_0(\alpha,\beta),\alpha,\beta]\cdot u(t)=1). \quad (6)$$

Применим модификацию приведенных преобразователей для моделирования потребительского спроса. Пусть функция спроса $P(t)$ зависит в момент времени t только от цены $c(t)$ следующим образом. Отношение индивидуального потребителя к некоторому товару определим функцией $R(c(t))$, принимающей значения 0 или 1 по правилу:

$$R(c(t))=\begin{cases}1, & \text{если} \quad c(t)\le\alpha(t),\\ 0, & \text{если} \quad c(t)\ge\beta(t),\\ 1 \quad \text{или} \quad 0, & \text{если} \quad \alpha(t)<c(t)<\beta(t).\end{cases} \quad (7)$$

Т.е. функция $R(c(t))$ принимает значения равные единице, если товар покупается, и нуль в противном случае. Функцию $R(c(t))$ будем трактовать как выход некоторого преобразователя $R[\alpha(t),\beta(t),R_0]$, аналогичного неидеальному реле с инверсией роли пороговых чисел α,β, на вход которого поступает сигнал $\tilde{n}(t)(t\ge 0)$. Взаимосвязь между входом и выходом иллюстрирует рис. 2.

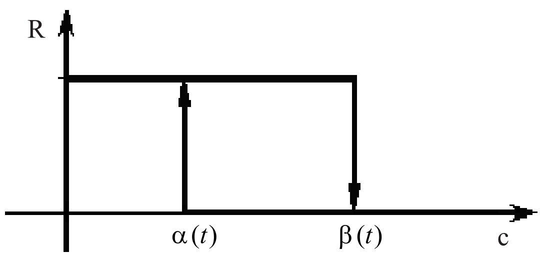

Рис. 2. Входно-выходные соответствия преобразователя (7)

Зависимость от времени пороговых чисел $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ дает возможность учитывать, что отношение потребителя к товару может меняться со временем.

Если обозначить через γ_i темп покупок i-го потребителя $(i=1,2\ldots n)$, то для системы из n любых потребителей функция продаж будет иметь вид:

$$P(\tilde{n}(t))=\sum\gamma_i R[\alpha_i(t),\beta_i(t),R_{0i}]c(t). \quad (8)$$

В континуальном случае функция продаж будет аналогична преобразователю Пресаха–Гилтая с инверсией нулей и единиц, т.е.

$$P(c(t)) = \int_{\alpha \le \beta} \omega(\alpha(t), \beta(t), t) d\mu(t), \tag{9}$$

где $\omega(\alpha(t), \beta(t), t) = \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)]c(t) = R[\alpha(\gamma, t), \beta(\gamma, t), R_0(\gamma)]c(t)$, $\gamma \in Đ_{\alpha, \beta}$. (10)

Континуальный аналог преобразователя Пресаха–Гилтая учитывает возможность изменения индивидуальных отношений потребителя к товару. Этим возможным изменениям в модели соответствует зависимость меры μ от времени.

Из экономической теории известно, что рыночные механизмы допускают равновесие, при котором цены устанавливаются так, что спрос на товары равен его предложению и при этом обеспечивается эффективное распределение ресурсов. В то же время известны периоды кризисов, во время которых равновесные цены оказывались неустойчивыми. Эту неустойчивость можно попытаться объяснить несоответствием рыночных механизмов технологической структуре экономики. Действительно, как правило, выход из кризиса являлся следствием структурных изменений в экономике. При этом вопрос о совместном влиянии технологической структуры экономики и структуры потребительского спроса на запас устойчивости рыночных механизмов исследован недостаточно.

Возможность решения этой задачи основывается на предложенной модели потребительского спроса, учитывающей его инертность и возможные структурные изменения, а также новом направлении в теории динамических систем, связанном с понятием «странного аттрактора», которое изучает стохастическое поведение траекторий динамических систем [7].

В работе [7] было показано, как последовательность бифуркаций удвоения периода приводит к возникновению странного аттрактора. Оказалось, что на этом эффекте основан один из сценариев возникновения турбулентности в гидродинамике и модель динамики численности популяций с неперекрывающимися поколениями. Для анализа экономических систем этот аппарат использовался в работах [8, 9].

В дальнейшем исходные предположения модели будут сделаны, следуя классическим работам Вальраса. Рассматривается монотоварный рынок, на котором купля-продажа товара происходит между потребителями и производителями. Предполагается, что в момент n времени товар продается по единой цене c_n; поведение потребителей описывается функцией спроса $P(c)$, аналитический вид которой определяет преобразователь (9)-(10); поведение производителей описывается функцией предложения $g(c)$, аналитический вид которой будет приведен ниже; характерное время изменений функций спроса и предложения много больше времени изменения цены.

В сделанных предположениях времена изменений функций спроса и предложения и цены можно разделить и на промежутке дискретного изменения цены считать эти функции постоянными (справедливость гипотезы о разделении времен).

Следуя классическим построениям [1] предположим, что производители предлагают товар, ориентируясь на «предыдущую» цену c_{n-1}, и продают его по «нынешней» c_n. Потребители готовы покупать товар, ориентируясь на предыдущую цену $P(c_{n-1})$ и готовы платить за него опять же предыдущую цену c_{n-1}. Тогда равновесие спроса и предложения определяется соотношением:

$$P(c_n)q(c_{n-1}) = P(c_{n-1})q(c_n)\,. \tag{11}$$

В работах Поспелова показано, что функция предложения определяется следующим образом:

$$g(p_{n-1}, t) = \int_{\nu}^{c_{n-1}/s} \xi(\lambda, t)\,d\lambda, \tag{12}$$

где t – «медленное время», соответствующее процессам изменения производственных мощностей, n – дискретное «быстрое время», соответствующее процессам изменения цены, а $\xi = \xi(\lambda, t)$ – гладкая функция распределения мощностей по технологиям производства.

Зная начальное распределение мощностей по технологиям $\xi(\lambda, \tau_0)$ и динамику строительства новых $I(t)$ за период $\tau_0 \le t \le \tau$, можно однозначно определить распределение мощностей по технологиям $\xi(\lambda, t)$ и функциям предложения $g(p,t)$ при $\tau_0 \le t \le \tau$. Численные эксперименты показывают, что в замкнутых моделях экономического роста распределение мощностей по технологиям независимо от начальных условий $\xi(\lambda, \tau_0)$ асимптотически стремится к распределению на режиме экспоненциального роста.

В режиме экспоненциального роста с темпом γ

$$I(t) = M(\tau_0)(\gamma + \mu)e^{\gamma(t-\tau_0)}. \tag{13}$$

Можно показать, что при этом

$$g(\tilde{n}_{n-1}, t) = M(t)\left[1 - \left(\frac{s\nu}{\tilde{n}_{n-1}}\right)^{(\gamma+\mu)/\mu}\right]. \tag{14}$$

Введем обозначения:

$$x_n = \frac{s\nu}{p_n}, \quad \alpha = \frac{\gamma + \mu}{\mu} \ge 1, \quad A(t) = \frac{M(t)}{P(\tilde{n})}, \tag{15}$$

где $P(c)$ определяется как выход преобразователя (9)–(10) в момент $t = 1$, на вход которого поступает сигнал

$$\varphi(t) = t\tilde{n}_n + (1-t)\tilde{n}_{n-1}, \tag{16}$$

т.е. линейная функция, соединяющая предыдущее и нынешнее значение цены.

Тогда из (9) с учетом (14) получаем:

$$x_n = A(t)x_{n-1}(1 - x_{n-1}^{\alpha}). \tag{17}$$

Естественно предполагать, что наилучшая технология неубыточна, т.е. $x_n = s\nu / \tilde{n}_n \le 1$. Тогда $0 \le x_n \le 1$. Для того, чтобы отображение (17) переводило отрезок $[0,\ 1]$ в себя, необходимо и достаточно, чтобы

$$0 \le A(t) \le \frac{(1+\alpha)^{(1+\alpha)/\alpha}}{\alpha} = A_M(\alpha). \quad (18)$$

Отображение (17) определяет дискретную динамическую систему, в которой «медленное время» t является параметром.

Рассмотренная выше модель ценообразования $x_{n+1} = f(x_n, A, \alpha)$, где $f(x, A, \alpha) = Ax(1 - x^{\alpha})$, по заданному начальному условию x_0 однозначно определяет бесконечную траекторию $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ Ввиду принятой гипотезы о разделении времен представляет содержательный интерес изучение асимптотического (при $n \to \infty$) поведения цены.

Простейшими типами предельных траекторий системы (18) являются неподвижные точки x, для которых $x = f(x, A, \alpha)$, и периодические траектории. Периодической траекторией периода T называется набор несовпадающих точек $x_1, x_2, \ldots, x_T$, таких, что $x_2 = f(x_1, A, \alpha)$, $x_3 = f(x_2, A, \alpha)$, $\ldots$, $x_T = f(x_{T-1}, A, \alpha)$, $x_1 = f(x_T, A, \alpha)$. При всех $A \ge 0$, $\alpha \ge 1$ у динамической системы (17) имеется неподвижная точка $x = 0$, соответствующая бесконечно большой цене на товар. Кроме того, при $A \ge 1$, $\alpha \ge 1$ существует еще одна неподвижная точка $x_p(A, \alpha) = (1 - 1/A)^{1/\alpha}$, соответствующая равновесной цене. Траектория, порожденная точкой $x_p(A, \alpha)$, выделяется с содержательной точки зрения, как единственная траектория, на которой прогноз цены потребителя и производителями товара совпадает с реализацией, и производство согласовано со спросом. На периодических траекториях в среднем наблюдается избыток производства над спросом.

Заметим, что увеличение $A = M/P$ означает увеличение производства по отношению к суммарному спросу, с чем экономисты связывают кризисы перепроизводства, сопровождающиеся «бурями» в изменении цен.

Рассмотрим, как с увеличением параметра A изменяется асимптотическое поведение траекторий динамической системы (17). Если $0 \le A < 1$, то при любом начальном условии x_0 траектория системы (17) стремится к 0. С содержательной точки зрения $0 \le A < 1$ означает, что производственных мощностей не хватает для удовлетворения спроса, при этом цена товара стремится к $+\infty$. При $A = 1$ происходит бифуркация, в результате которой неподвижная точка $x = 0$ становится неустойчивой, и рождается устойчивая (при A, близких к 1) неподвижная точка $x_p(A, \alpha)$. Известно, что для устойчивости неподвижной точки $x_p(A, \alpha)$ необходимо, чтобы:

$$\left| \left. \frac{df(x, A, \alpha)}{dx} \right|_{x = x_p(A, \alpha)} \right| \le 1, \quad (19)$$

и достаточно, чтобы:

$$\left| \left. \frac{df(x, A, \alpha)}{dx} \right|_{x = x_p(A, \alpha)} \right| < 1. \quad (20)$$

Отсюда следует, что неподвижная точка $x_p(A, \alpha)$ устойчива при $1 < A < \dfrac{\alpha + 2}{\alpha} = \dfrac{\gamma + 3\mu}{\gamma + \mu} = A_1(\alpha)$ и неустойчива при $A > A_1(\alpha)$. Поскольку

$$\left.\frac{df(x, A_1(\alpha), \alpha)}{dx}\right|_{x=x_p(A_1(\alpha),\alpha)} = -1, \tag{21}$$

то, при $A = A_1(\alpha)$, неподвижная точка $x_p(A,\alpha)$ теряет устойчивость в результате бифуркации Хопфа.

В теории динамических систем [3] асимптотическое поведение траекторий при $A > A_1(\alpha)$ наиболее полно исследовано при $\alpha = 1$. У этой знаменитой динамической системы при увеличении параметра A наблюдается бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода $\{A_n(1)\}$. При $A = A_n(1)$ траектория периода 2^{n-1} теряет устойчивость, и в результате бифуркации Хопфа рождается устойчивая траектория периода 2^n, к которой притягиваются траектории динамической системы при почти всех начальных условиях. Существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} A_n(1) = A_\infty(1) \approx 3{,}57, \tag{22}$$

и ему соответствует аттрактор динамической системы (17), при $\alpha = 1$ гомеоморфный канторову совершенному множеству. Отметим, что при $\alpha = 1$, $A = A_M(1)$ динамическая система (17) имеет стохастическое поведение: обладает абсолютно непрерывной инвариантной мерой с плотностью $\pi^{-1}(x(1-x))^{-1/2}$ и изоморфна сдвигу Бернулли. М.В. Якобсоном доказано, что множество значений параметра A из правой полуокрестности $A_\infty(1)$, при которых $x_{n+1} = f(x_n, A, 1)$ обладает абсолютно непрерывной инвариантной мерой, имеет положительную меру Лебега.

Результаты исследования динамической системы (17) при $\alpha = 1$ частично обобщаются на системы $x_{n+1} = F(x_n)$ с отрицательной производной Шварца:

$$S(F(x)) = \frac{F'''(x)}{F'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(x)}{F'(x)}\right). \tag{23}$$

Дж. Гукенхеймер установил, что в случае, когда существует единственная устойчивая траектория, множество точек, не притягивающихся к ней, имеет меру нуль.

Заметим, что в нашем случае:

$$S(f(x, A, \alpha)) = \frac{\alpha(\alpha+1)(2(\alpha-1)+(\alpha+2)(\alpha+1)x^{\alpha})x^{\alpha-2}}{2(1-(\alpha+1)x^{\alpha})^2}. \tag{24}$$

Следовательно, $S(f(x, A, \alpha)) < 0$ при $x \in (0,1] \setminus x_c$ и $\alpha \geq 1$. Из теоремы Д. Зингера [3] следует, что динамическая система (17) при $\alpha \geq 1$ имеет не более одной устойчивой периодической траектории. Причем, если устойчивая периодическая траектория существует, к ней притягиваются почти все траектории системы (17) и заведомо траектория с начальным условием $x_c = (1/(1+\alpha))^{1/\alpha}$.

На рис. 3 изображено дерево бифуркаций, т.е. зависимость аттрактора от параметра A. Проведенные численные эксперименты [5] позволили установить следующие факты. Во-первых, амплитуда колебаний периодических траекторий при $A \geq A_2(\alpha)$ имеет тот же порядок, что и равновесная цена. Во-вторых, величина $A_2(\alpha) - A_1(\alpha)$ в несколько раз больше величины $A_\infty(\alpha) - A_2(\alpha)$. Величину $A_\infty(\alpha)$ можно вычислить с помощью принципа универсальности Фейгенбаума [8], согласно которому последовательность $A_n(\alpha)$ сходится к $A_\infty(\alpha)$ асимптотически, как геометрическая прогрессия со знаменателем $1/\delta$, где $\delta \approx 4{,}669$ – универсальная постоянная Фейгенбаума.

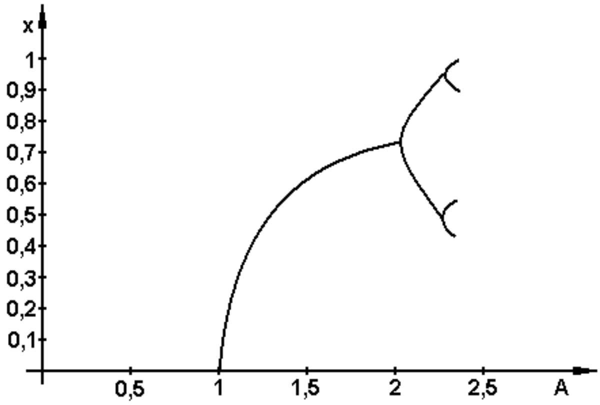

Рис. 3. Дерево бифуркаций

Анализ рис. 3 показывает, что с увеличением параметра $A = M/P$ динамика цен становится трудно прогнозируемой, и это обстоятельство препятствует деловой активности экономических агентов.

Таким образом, эффективное использование органом управления экономических ресурсов напрямую зависит от характеристик устойчивости рыночных отношений, которые в рассмотренной модели определяются параметрами $A_1(\alpha), A_2(\alpha), \ldots, A_\infty(\alpha)$. Причем с увеличением предложений продукции уменьшается диапазон устойчивости рыночных механизмов, что согласуется с представлением экономистов о перегретой экономике.

Список источников

1. Жак, С.В. Экономика для инженеров. Учебное пособие [текст] / С.В. Жак. – М.: Вузовская книга, 2004. – С.52 – 57.

2. Красносельский, М.А. Системы с гистерезисом [текст] / М.А. Красносельский, А.В. Покровский. – М.: Наука, 1983. – 271 с.

3. Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах [текст] / Под ред. А.А. Самарского, Н.Н. Моисеева, А.А. Петрова. – М.: Наука, 1986. – С. 7 – 196.

4. Оленов, Н.Н. Модель инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа [текст] / Н.Н. Оленов, И.Г. Поспелов. – М.: Наука, 1983. – С. 164 – 174.

5. Параев, Ю.И. Решение задач об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара [текст] / Ю.И. Параев // Известия академии наук. Теория и системы управления. – 2000. – №2. – С. 103 – 117.

6. Семенов, М.Е. Математическое моделирование устойчивых периодических режимов в системах с гистерезисными нелинейностями [текст] / М.Е. Семенов. – Воронеж: Издательство ВГУ, 2002. –104 с.

7. Шананин, А.А. О стохастическом поведении цены в одной детерминированной модели ценообразования [текст] / А.А. Шананин // Докл. АН СССР, 1986. – Т.288. – №1. – С. 63 – 65.

8. Шананин, А.А. Об устойчивости Рыночных механизмов [текст] / А.А. Шананин // Математическое моделирование. – 1991. – Т.3. – №2. – С. 42 – 62.

9. Шумпетер, И. Теория экономического развития [текст] / И. Шумпетер // Теория экономического развития: Пер. с нем. / Под ред. А.Г. Малейковского. М.: Прогресс, 1982. – 456 с.

10. Hicks, J.R. A contribution to the theory of the trade cycle (Oxford university press, Oxford) [текст] / J.R. Hicks. – 1950. – 245 p.

11. Puu, T. A simplified model of spatiotemporal population dynamics, Environ¬ment and planning [текст] / T. Puu. – 17, 1985. – P. 1269 – 1269.

12. Puu, T. The stability of hexagonal tessellations, Karlsruhe papers in economic policy research [текст] / T. Puu, W. Weidlich. – 3, 1986. – P. 133 – 158.

DYNAMIC MODEL OF MARKET BALANCE IN CIRCUMSTANCES OF HYSTERESIS BEHAVIOR OF ECONOMIC AGENTS

Semyonov Mikhail Eugenyevich,
Dr. Sc. of Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Theoretical Hydrometeorology Voronezh Military Aviation Engineering University; mkl150@mail.ru
Mishin Maksim Yuryevich,
Post-graduate student of Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering; m.on1ooker@gmail.com
Kabulova Eugeniya Georgiyevna,
Ph. D. of Technical Sciences, Chief of the Post-graduate Department of Stariy Oskol Technological Institute (filial-branch of National Research Technological University "MISIS"); otdel_aspirant@mail.ru
Abopolova Yelena Aleksandrovna,
Senior Lecturer of Belgorod State University; abapolova@mail.ru

The article shows an economic-mathematical model of management strategy, which was built with taken into account nonstationarity of economic relations; research to test stability of obtained non-trivial solutions, the conditions of bifurcation and chaotic modes was carried out.
Keywords: hysteresis, non-ideal relay, economic strategy, economic agents, market equilibrium.