УДК 330.44, 519.86

ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ В.П. МАСЛОВА И ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

Дудчак Владимир Власьевич,
доктор экономических наук, заместитель генерального директора ОАО «Концерн «Созвездие»; dudchak@sozvezdie.su
Костин Алексей Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования Воронежского государственного университета; leshakostin@mail.ru
Скапцов Юрий Петрович,
начальник планово-экономического департамента ОАО «Концерн «Созвездие»; syp@sozvezdie.su

В работе вводится и изучается класс ранее не рассматриваемых производственных функций. В определении которых используется нелинейное осреднение академика В.П. Маслова. Оказывается, что производственная функция Маслова представляет собой новый математический инструмент, удобный при проведении вычислительных операций и обладающий широкими возможностями с точки зрения экономического анализа производственных функций.

Ключевые слова: производственные функции, нелинейное осреднение, задача оптимизации.

Понятие производственной функции (ПФ), описывающей зависимость выпуска от затрат, является фундаментальным в математическом моделировании микро- и макроэкономических процессов. Примерами наиболее употребляемых ПФ являются функции CES с постоянной эластичностью замены факторов. К ним, в частности, относятся ПФ Кобба-Дугласа, линейные ПФ, производственные функции В. Леонтьева.

В то же время, как отмечается в [2], проблемы реальной экономики, когда степень взаимозаменяемости ресурсов может быть различной (соответственно различной может быть и эластичность замещения) ставят вопрос об отыскании ПФ более разнообразных видов.

В связи с этим нами рассматриваются новые семейства ПФ, которые здесь называются производственными функциями академика В.П. Маслова и которые, сохраняя многие достоинства выше приведенных ПФ, обладают своими уникальными свойствами.

Академик В.П. Маслов при создании «квантовой экономики» (см. [6], [7]) получил нелинейное среднее, которое в случае двух величин a и b, имеет вид

$$M_\beta(a,b) = \frac{1}{\chi\beta}\ln\frac{(e^{\chi\beta a}+e^{\chi\beta b})}{2}, \tag{1}$$

где $\chi = \pm 1,\ \beta > 0$.

Основной особенностью среднего (1) является его «наибольшая близость» к линейному, в том смысле, что оно удовлетворяет условию

$$M_\beta(a+\alpha, b+\alpha) = M_\beta(a,b)+\alpha. \tag{2}$$

Это условие обеспечивает однозначный выбор функции в семействе колмогоровскихсредних [6]

$$Q(a,b) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right), \tag{3}$$

где $\varphi(s)$ – непрерывная, строго монотонная функция, φ^{-1} – обратная к ней.

Функции же вида (3), как известно [4], являются основными инструментами в исследованиях в микро- и макроэкономике. Так, в случае степенной функции $\varphi(a) = a^\beta,\ \varphi(b) = b^\beta$ и $\chi = -1$ семейство (3) относится к классу, так называемых, CES-функций, имеющих вид

$$F_\delta(a,b) = A(c_1K^{-\delta}+c_2L^{-\delta})^{-\frac{1}{\delta}}, \tag{4}$$

где $A > 0$, $c_1 + c_2 = 1$, K – фонды, L – трудовые ресурсы, $\delta > 0$, c_1 – фондоёмкость продукции, c_2 – трудоемкость продукции.

Частными случаями функции CES являются наиболее используемые типы ПФ: производственная функция В. Леонтьева:

$$F_\infty = \min\left(\frac{K}{c_1},\frac{L}{c_2}\right),\ \beta = \infty; \tag{5}$$

функция Кобба–Дугласа:

$$F_0(K,L) = AK^{c_1}L^{c_2},\ \beta = 0; \tag{6}$$

линейная функция:

$$F_1(K,L) = c_1K + c_2L + \delta,\ \beta = -1. \tag{7}$$

В настоящей работе исследуются свойства функции осреднения В. Маслова, с точки зрения ее применения к экономическим задачам, как производственной функции, которая не включается в семейство CES-функций.

1. Некоторые свойства осредняющей функции Маслова

Как известно ([2] – [5]), производственная функция $F(K,L)$ описывает зависимость выпуска Y от затрат (K,L), в соответствии $Y = F(k < L)$, в предположении, что применяемый труд L, при изготовлении продукции однороден и однородны также единицы затрагиваемого капитала. При этом ПФ формально характеризуется следующими свойствами (см. [7]):

1. $F(K,L)$ определена при $K \geq 0$, $L \geq 0$,

2. $F(0,0) = 0$,

2′. $F(K,0) = F(0,L) = 0$,

3. $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0$, при $K > 0$, $L > 0$,

4. $\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} \leq 0$, $\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} \leq 0$,

4'. $\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K \partial L} = \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L \partial K} \geq 0$,

5. $F(tK,tL) = t^p F(K,L)$, $p \geq 0$.

Отметим, что в каждом конкретном случае, некоторые из свойств 1 – 5, для известных ПФ могут не выполняться. Например, для линейной ПФ это относится к свойствам 2' и 5.

В анализе производственных функций центральное место занимают исследования следующих характеристик:

а) частных производных $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$ и $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$, называемых предельными эффективностями факторов K и L.

б) эластичность выпуска, относительно факторов

$$E_K(F) = \frac{\partial(ln\ F)}{\partial(ln\ K)}; E_L(F) = \frac{\partial(ln\ F)}{\partial(ln\ L)};$$

в) предельные нормы замены факторов

$$\frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial F}{\partial L};$$

г) эластичность замены факторов

$$\sigma(K,L) = d\left(\ln \frac{K}{L}\right) d\left(\ln \frac{F'_K}{F'_L}\right). \quad (1.1)$$

Как известно, эластичность замещения показывает на сколько процентов возрастает фондовооруженность труда K/L, при росте предельной нормы замещения на один процент.

Геометрически σ означает радиус кривизны изокванты (линии уровня)

$$F(K,L) = C = const. \quad (1.2)$$

У линейной ПФ $\sigma = \infty$, у функции Кобба–Дугласа эта характеристика не зависит от K и L и равна $\sigma = 1$. Обобщение ПФ Кобба–Дугласа, с сохранением постоянства эластичности замены факторов, приводит к ПФ CES, с эластичностью $\sigma = \frac{1}{1+\delta}$.

Функция Леонтьева имеет нулевую эластичность замещения, то есть ресурсы в ней должны использоваться в заданной пропорции и не могут замещать друг друга.

Однако в реальной экономике, степень взаимозаменяемости ресурсов может быть различной, а не только с постоянной эластичностью замещения.И это, как отмечено в [2], с. 174, ставит задачу оценки более общих формул ПФ, в частности не только с постоянной, но и с произвольной эластичностью замещения.

Имея в виду решение этой задачи, мы здесь используем осредняющую функцию В. Маслова (1).

Выбирая в качестве производственной функции осреднение В. Маслова

$$F_\beta(K,L) = \frac{1}{\chi\beta}\ln\left(c_1 e^{\chi\beta K} + c_2 e^{\chi\beta L}\right) \tag{1}$$

вычислим у нее все выше приведенные характеристики.

Итак:

1. $K \geq 0,\ L \geq 0,$

2. $$F_\beta(0,0) = \frac{1}{\chi\beta}\ln\left(c_1 + c_2\right) = 0. \tag{1.3}$$

Условие 2′, также как и в случае линейной ПФ не выполняется. Заметим, что уже в этом заключается отмеченная ранее близость функции Маслова к ЛПФ.

$$\frac{\partial F_\beta(K,L)}{\partial K} = \frac{c_1 e^{\chi\beta K}}{\left(c_1 e^{\chi\beta K} + c_2 e^{\chi\beta L}\right)} > 0. \tag{1.4}$$

3. $$\frac{\partial F_\beta(K,L)}{\partial L} = \frac{c_2 e^{\chi\beta L}}{\left(c_1 e^{\chi\beta K} + c_2 e^{\chi\beta L}\right)} > 0. \tag{1.5}$$

Кроме того, складывая (1.4) и (1.5), получаем тождество

$$\frac{\partial F_\beta(K,L)}{\partial K} + \frac{\partial F_\beta(K,L)}{\partial L} = 1. \tag{1.6}$$

Условия 4 и 4′. Дифференцируя (1.3) по K, получаем равенство

$$\frac{\partial^2 F_\beta(K,L)}{\partial K^2} = \frac{\chi\beta \cdot c_1 \cdot c_2 e^{\chi\beta(K+L)}}{\left(c_1 e^{\chi\beta K} + c_2 e^{\chi\beta L}\right)^2}. \tag{1.7}$$

Далее, после соответствующего дифференцирования (1.6), приходим к следующим соотношениям

$$\frac{\partial^2 F_\beta(K,L)}{\partial K^2} = -\frac{\partial^2 F_\beta(K,L)}{\partial K \partial L} = \frac{\partial^2 F_\beta(K,L)}{\partial L^2}. \tag{1.8}$$

Из соотношений (1.7) и (1.8) следует, что при $\chi = -1$ функция Маслова удовлетворяет всем условиям 4 и 4′.

Случай же $\beta = 1$ этим условиям не удовлетворяет, однако и эту функцию мы будем рассматривать.

Условие 5. В случае функции Маслова заменяется свойством ее «квазиоднородности», которое характеризуется следующим утверждением:

а) при $\chi = 1$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} M_\beta(qK,qL) &\leq qM_\beta(K,L), \quad 0 < q < 1 \\ M_\beta(qK,qL) &\geq qM_\beta(K,L), \quad\quad q > 1. \end{aligned} \tag{1.9}$$

б) при $\chi = -1$ неравенства (1.9) меняются на противоположные.

Действительно, при $q \in (0,1)$ в случае а) из монотонности логарифмической функции и выпуклости вверх функции $\varphi(a) = a^q$ имеем оценку

$$M_\beta(qK,qL) = \frac{1}{\beta}\ln\left(c_1 e^{\beta qK} + c_2 e^{\beta qL}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\beta}\ln\left(c_1 e^{\beta K} + c_2 e^{\beta L}\right)^q = qM_\beta(K,L).$$

Случай $q > 1$ доказывается аналогично, с учетом выпуклости функции $\varphi(a) = a^q$ вниз.

Другие случаи доказываются по этой же схеме.

2. Другие свойства функций Маслова

Укажем также и другие важные свойства функции Маслова. Так например, свойство (2), как отмечалось, указывает на близость функции $M_\beta(K,L)$ к линейной.

Следующее ее свойство также усиливает этот факт.

Лемма 2.1. Для функции $M_\beta(K,L)$ справедливы оценки:

$$c_1K + c_2L \leq M_\beta(K,L) \leq K + L. \tag{2.1}$$

Доказательство. Левое неравенство в (2.1) следует из неравенства, связывающее среднее арифметическое и обобщенное среднее геометрическое ([1], с. 26)

$$y_1^{c_1} \cdot y_2^{c_2} \leq c_1y_1 + c_2y_2. \tag{2.2}$$

Применяя (2.2) к $y_1 = e^{\beta K}$, $y_2 = e^{\beta L}$ и, пользуясь монотонностью логарифмической функции, имеем

$$M_\beta(K,L) - (c_1K + c_2L) = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{c_1e^{\beta K} + c_2e^{\beta L}}{e^{\beta K}\cdot e^{\beta L}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{c_1y_1 + c_2y_2}{y_1\cdot y_2}\right) > 0.$$

Нетрудно видеть, что смена знака у β этого неравенства не меняет.

Для доказательства правого неравенства в (2.2) также оценим разность

$$M_\beta(K,L) - (c_1K + c_2L) = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{c_1e^{\beta K} + c_2e^{\beta L}}{e^{\beta K}\cdot e^{\beta L}}\right) = \ln\left(\frac{c_1y_1 + c_2y_2}{y_1\cdot y_2}\right)^{\frac{1}{\beta}} =$$

$$= \ln\left(c_1\cdot\frac{y_1}{y_1\cdot y_2} + c_2\frac{y_2}{y_1\cdot y_2}\right)^{\frac{1}{\beta}} < \ln\left(c_1 + c_2\right) = 0.$$

Это доказывает правое неравенство в (2.1).

3. Производственная функция Маслова (ПФМ)

Итак, свойства (1.3) – (1.8) функции $M_\beta(K,L)$ позволяют использовать ее в качестве макроэкономической производственной функции, положив

$$F_\beta(K,L) = AM_\beta(K,L) \tag{3.1}$$

где $A > 0$.

Отмечая, что с точки зрения выполнения классических условий неположительности вторых производных, подходит лишь случай $\chi = -1$, так как обычно случай положительности вторых производных не рассматривается по причине исследования экономических процессов развивающихся не быстрее линейных (предельный случай). Линейным же процессам соответствует линейная ПФ. Однако учитывая близость функции Маслова к линейной, при любом знаке χ, можно полагать, что и при $\chi = 1$ функция $F_\beta(K,L)$ является ПФ.

Эти функции будем называть производственными функциями В. Маслова (ПФМ).

Таким образом, уникальность семейства ПФМ состоит в том, что они могут быть и строго вогнутыми и строго выпуклыми, с «почти-линейным» поведением.

О близости линейных ПФ и ПФМ можно судить и по следующему соотношению

$$M_\beta(K,L) + M_{-\beta}(K,L) = K + L, \tag{3.2}$$

которое доказывается простым счетом. При этом эластичность замены факторов, которая для ПФМ, в соответствии с (1.1) имеет вид

$$\sigma_M = \frac{Le^{\chi\beta K} - Ke^{\chi\beta L}}{\chi\beta LK(e^{\chi\beta K} - e^{\chi\beta L})}. \tag{3.3}$$

Это равенство, в частности показывает, что постоянная эластичность за-мены факторов в семействе ПФМ имеет место только при $\beta = 0$, что соответствует линейному случаю. В других же случаях параметр σ_M может принимать сколь угодно большие значения варьированием факторов K и L. Как замечает В. Леонтьев [5] $\sigma = \infty$ соответствует идеальному замещению факторов.

4. Изокванты и изоклинарии ПФМ

Как известно, важными характеристиками ПФ являются изокванты – линии нулевого роста, и изоклины – линии наибольшего роста, которые в плоскости K, L удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}dK + \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}dL = 0, \text{ (изокванты)} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}dK - \frac{\partial F(K,L)}{\partial K}dL = 0, \text{ (изоклины)} \tag{4.2}$$

Для определенности будем рассматривать случай

а) $\chi = 1,\ c_1 = c_2 = \frac{1}{2},\ \beta > 0$;

б) $\chi = -1,\ c_1 = c_2 = \frac{1}{2},\ \beta > 0$.

Случай а). Уравнение изокванты имеет вид:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}dK + \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}dL = 0 \tag{4.3}$$

где

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \frac{e^{\beta K}}{e^{\beta K} + e^{\beta L}},$$

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \frac{e^{\beta L}}{e^{\beta K} + e^{\beta L}}. \tag{4.4}$$

Пользуясь (4.4) в (4.3) получаем уравнение

$$e^{\beta K}dK + e^{\beta L}dL = 0. \tag{4.5}$$

Общее решение, которого выражается в виде

$$e^{\beta K} + e^{\beta L} = D_\beta. \tag{4.6}$$

где D_β – произвольная константа, которая в силу (4.6) удовлетворяет неравенству

$$D_\beta \geq 2. \tag{4.7}$$

Пользуясь (4.6), запишем зависимость K от L в явном виде,

$$K(L) = \frac{1}{\beta}\ln\left(D_\beta - e^{\beta L}\right) \geq 0. \tag{4.8}$$

Учитывая соотношения:

$$K(0) = \frac{1}{\beta}\left(D_\beta - 1\right), \qquad \frac{dK}{dL} = -\frac{e^{\beta L}}{D_\beta - e^{\beta L}} < 0,$$
$$\frac{d^2K}{dL^2} = -\frac{D_\beta e^{\beta L}}{(D_\beta - e^{\beta L})^2} < 0, \tag{4.9}$$

строим график изокванты (рис. 1).

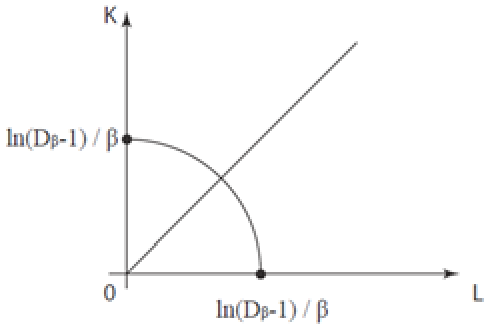

Рис. 1. График изокванты

Для построения изоклинариев имеем уравнение

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}dK - \frac{\partial F(K,L)}{\partial K}dL = 0, \tag{4.10}$$

решение которого имеет вид:

$$e^{-\beta K} - e^{-\beta L} = D_\beta^{(1)}. \tag{4.11}$$

Рассмотрим случаи:

1) $D_\beta^{(1)} \geq 0$, что соответствует неравенству $K \leq L$,

2) $D_\beta^{(1)} < 0$, $K > L$.

В первом случае имеем неравенство

$$K(L) = -\frac{1}{\beta}\ln\left(D_\beta^{(1)} + e^{-\beta L}\right). \tag{4.12}$$

Отсюда

$$\lim_{L\to\infty} K(L) = -\frac{1}{\beta}\ln D_\beta^{(1)} = K_0. \tag{4.13}$$

И, следовательно, справедливы оценки

$$0 < D_\beta^{(1)} < 1.$$

Кроме того, при $L_0 = -\frac{1}{\beta}\ln\left(1 - D_\beta^{(1)}\right)$ выполняется неравенство $K(L_0) = 0$.

Далее, учитывая неравенства

$$\frac{dK}{dL} = \frac{e^{\beta L}}{D_\beta - e^{\beta L}} > 0$$

и

$$\frac{d^2K}{dL^2} = -\frac{\beta e^{-\beta L}}{(D_\beta^{(1)} + e^{\beta L})^2} < 0$$

получаем график изкоклинариев.

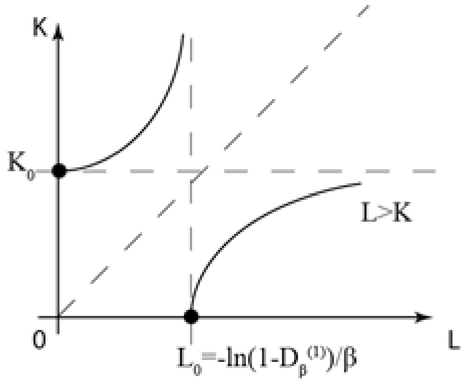

Рис. 2. График изоклинариев

Если $L < K$, то графики изоклинариев имеют вид

$$K_0 = -\frac{1}{\beta}\ln\left(1 + D_\beta^{(1)}\right),\ L_0 = -\frac{1}{\beta}\ln\left(1 - D_\beta^{(1)}\right).$$

Другие случаи рассматриваются аналогично.

5. ПФМ и задачи оптимизации

В качестве одного из приложений ПФМ рассмотрим стандартную задачу оптимизации производства и, аналогичную ей, задачу потребительского выбора с бюджетными ограничениями.

Как известно [7], математическая модель этих задач сводится к оптимизации функции (в первом случае это производственная функция, во втором функция потребительского выбора) при условиях

$$P_1K + p_2L = \delta, \tag{5.1}$$

где $p_1 > 0$, $p_2 > 0$.

В нашем случае эта задача имеет вид

$$F_\beta(K,L) = AM_\beta(K,L) \to extr \tag{5.2}$$

при условии (5.1).

Решение этой задачи легко находится с помощью метода Лагранжа

$$\Phi(K,L,\lambda) = AM_\beta(K,L) + \lambda(\delta - p_1K - p_2L) \to extr. \tag{5.3}$$

Оптимизируя (4.3), имеем систему:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial K} = A\frac{c_1e^{\beta K}}{c_1e^{\beta K} + c_2e^{\beta L}} = \lambda p_{1,} \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial L} = A\frac{c_2e^{\beta K}}{c_1e^{\beta K} + c_2e^{\beta L}} = \lambda p_2, \tag{5.5}$$

$$p_1K + p_2L = \delta. \frac{c_1}{c_2}e^{\beta(K-L)} = \frac{p_1}{p_2},$$

пользуясь которым, получаем систему уравнений:

$$\begin{gathered} K - L = \frac{1}{\beta}\ln\frac{c_2p_1}{c_1p_2} = \gamma, \\ p_1K + p_2L = \delta. \end{gathered} \tag{5.6}$$

С решением $K_0 = \frac{\gamma p_2 + \delta}{p_1 + p_2}$, $L_0 = \frac{\delta - \gamma p_1}{p_1 + p_2}$.

Очевидно, что этот результат также интересен и с точки зрения экономического анализа. Однако рамки статьи не позволяют это сделать. Поэтому его приведем в другом сообщении. Также как и исследование двойственной задачи

$$p_1 K + p_2 L \to extr \tag{5.7}$$

при условии

$$M_\beta(K, L) = D. \tag{5.8}$$

Отметим, что ПФМ представляет собой новый математический инструмент, удобный при проведении вычислительных операций и обладающий широкими возможностями с точки зрения экономического анализа производственных функций.

Список источников

1. Беккенбах, Э. Неравенства [текст] / Э. Беккенбах, Р. Беллман. – М.: Мир. – 1965. – 276 с.

2. Замков, О.О. Математические методы в экономике [текст] / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: ДИС, 1997. – 105 с.

3. Клейнер, Г.Б. Производственные функции [текст] / Г.Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.

4. Колемаев, В.А. Математическая экономика [текст] / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ, 2002.

5. Леонтьев, В.В. Международное сопоставление факторных издержек и использование факторов [текст] / В.В. Леонтьев // The American Economic Review. – 1964. – June. – Vol. 54. – №4.

6. Маслов, В.П. Квантовая экономика [текст] / В.П. Маслов. – М.: Наука. – 91 с.

7. Маслов, В.П. Квазистабильная экономика и ее связь с термодинамикой сверхтекучей жидкости. Дефолт как фазовый переход нулевого рода Обозрение прикладной и промышленной математики [текст] / В.П. Маслов. – 2004. – Т. 11. – В. 4. – С. 690 – 732.

V.P. MASLOV'S PRODUCTION FUNCTION AND OPTIMIZATION PROBLEMS OF PRODUCTION

Dudchak Vladimir Vlasyevich,
Ph. D. of Economy, Deputy General Director of JSC "Concern "Sozvezdie"; dudchak@sozvezdie.su
Kostin Aleksey Vladimirovich,
Ph. D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Chair of Mathematical Modeling of Voronezh State University;
leshakostin@mail.ru
Skaptsov Yuri Petrovich,
Head of Planning and Economic Department of JSC "Concern "Sozvezdie"; syp@sozvezdie.su

In the article a class of production functions not previously considered are introduced and studied. In determining it is used nonlinear averaging of Academician V.P. Maslov. It turns out that Maslov's production function is a new mathematical tool, suitable when conducting calculating operations and possessing extensive capabilities in terms of economic analysis of production functions.
Keywords: production functions, linear averaging, optimization problem.