УДК 330.44, 519.86

ПОИСК ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ С УЧЕТОМ ЦИКЛИЧНОСТИ

Дудчак Владимир Власьевич,
доктор экономических наук, заместитель генерального директора ОАО «Концерн «Созвездие»; dudchak@sozvezdie.su
Скапцов Юрий Петрович,
начальник планово-экономического департамента ОАО «Концерн «Созвездие»; syp@sozvezdie.su
Маликов Александр Аркадьевич,
начальник экономической службы ОАО «Концерн «Созвездие»; syp@sozvezdie.su

Рассмотрена задача моделирования циклогенеза в экономических системах. Представлен алгоритм вычисления амплитуд периодических траекторий модельной динамической системы, бифурцирующих из стационарного состояния. На основе представленного в статье алгоритма можно получить информацию о резонансном циклогенезе (синхронизации) нескольких взаимодействующих экономик.

Ключевые слова: математические модели экономического роста, экономические циклы, алгоритм вычисления амплитуд циклов.

Введение.

Многие первоначальные модели экономической динамики базировались на фиксированных коэффициентах пропорций и не принимали во внимание взаимодействие между капиталом и трудом (Е. Домар, Р. Харрод, В. Леонтьев, Дж. Фон Нейман и др.). Новое развитие теория экономического роста получила в трудах лауреата нобелевской премии Р. Солоу, искусно использовавшего понятие «замещение труда капиталом».

Как установил Солоу, в длительной перспективе технологическое развитие становится фундаментальной предпосылкой для экономического роста, а постоянный технический прогресс и эффективное использование ресурсов являются определяющими факторами экономического роста.

Среди современных отечественных исследователей следует отметить Ю.А. Кузнецова, Н.А. Магницкого и их учеников, дополнивших модели роста в сторону учета возможной цикличности развития. В работах Нижегородской школы проф. Кузнецова Ю.А. получены результаты исследования воздействия уровня человеческого капитала на долгосрочные темпы роста

ВВП. В их работах (Ю.А. Кузнецова и его учеников) уточнен и обобщен ряд ключевых понятий, характеризующих внешние эффекты (экстерналии) в зависимости от уровня человеческого капитала, построена модель экономического роста, обобщающая модель Лукаса–Узавы, и осуществлен на основе этой модели анализ допустимой траектории сбалансированного роста. Были определены области изменений параметров, при которых в моделируемой системе проявляется эффект неопределенности, и доказана возможность существования устойчивых периодических колебаний вблизи сбалансированной траектории [1], [2]. На модельных примерах, учитывающих характерные особенности развитых экономик, показано существование равновесных состояний всех типов, известных из теории динамических систем, а также установлено наличие циклогенеза Андронова–Хопфа и бифуркаций предельных циклов типа складки. Наличие предельных циклов позволило сделать вывод о существовании экономических образовательных циклов.

Результаты этой школы представляют интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения. Тот факт, что выполнены численное и аналитическое исследования механизма зарождения цикла и построена соответствующая бифуркационная диаграмма, при определенном наборе параметров, является существенным достижением.

С практической точки зрения, существование предельных циклов означает, что в том случае, когда траектория сбалансированного роста нереализуема (в силу неустойчивости), в ее окрестностях могут существовать траектории, имеющие колебательный характер, то есть эволюция экономической системы может осуществляться «практически вдоль магистрали развития» в рамках некоторого устойчивого «образовательного цикла».

Возможность получения такого вывода является важным результатом для теории экономического роста.

В целом, к необходимости многомодового бифуркационного анализа динамических систем экономики подводят задачи классической механики, теории фазовых переходов в кристаллах и теории нелинейных волн и т.п. Проблема многих мод возникает не только при моделировании автоколебаний в RC-генераторах, популяционной динамики, химической кинетики, но и в моделях экономики.

Каждая математическая модель экономического процесса, как упрощенное изображение предприятия, дает возможность выбора эффективной стратегии управления предприятием и создание эффективного плана. Важнейшая часть реального плана представляет последовательность контрольных значений:

$$\{Y_1, \ldots, Y_n\}, \quad \{I_1, \ldots, I_n\}$$

выпуска продукции (в денежном выражении) и его инвестиционной доли за контролируемый период. План определяется также следующими характеристиками:

$$m_k = \frac{\dot{Y}_k}{\dot{I}_{\,k-1}}, \quad \theta_k = \frac{\dot{I}_k - a}{\ddot{Y}_k}$$

– наборами значений так называемых мультипликаторов и акселераторов, где

$$\dot{Y}_{k+1} = Y_{k+1} - Y_k, \quad \dot{I}_{k+1} = I_{k+1} - Y_k, \quad \ddot{Y}_k = \dot{Y}_k - \dot{Y}_{k-1}.$$

В целом, рост предприятия характеризуется также средними значениями мультипликатора и акселератора:

$$m_* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k, \quad \theta_* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \theta_k.$$

Простейший способ организации производства состоит в виде режима равномерного роста:

$$Y_k = Y_0 + mak, \quad I_k = ak, \quad m = \frac{\dot{Y}_k}{a}, \quad \theta = 0$$

(a – заранее заданное значение гарантированного «инвестиционного лага»). Вычисления показывают, что этот режим является весьма выгодным, если план подчинен равномерным ограничениям вида $\dot{Y}_k \le v$. В случае неравномерных ограничений возникает необходимость в акселерации, и поиск наилучшего режима требует решения некоторой задачи математического программирования.

Безусловно, в реальных условиях нужен учет функции спроса, что может привести к неоднородности производственного процесса во времени и в пространстве.

Посредством математического моделирования можно не только точно предсказывать динамику количественных показателей, но и давать «качественное описание»: качественные оценки экономического роста, наличие режимов равновесного производства, их устойчивость, наличие экономических циклов, наилучшие траектории развития и т.д.

1. О бизнес проектах и математических моделях

Нарастающее по уровню сложности ежемесячное решение проблемы распределения суммарных доходов между нормальным потреблением и инвестициями естественным образом приводят к необходимости разумной формализации процесса управления предприятием на основе имеющихся моделей экономических динамик [3] – [8]) и их модификаций. Как же выбирать оптимальные пропорции, приводящие к повышению благосостояния фирмы, и как организовать бизнес-процесс (БП)?

Общепринятые на Западе и постепенно перенимаемые в России стандарты менеджмента предполагают существование чёткого формального описания организационной структуры компании и её бизнес-процессов [9]. Под БП мы подразумеваем совокупность взаимосвязанных операций, направленных на получение определенного результата, с указанием начала и конца, точным определением входов, выходов, механизмов исполнения и управления.

Нетрудно видеть, что БП может и должен быть описан существующими языками, реализующими их графическое представление и нотацию с целью последующего конвертирования в программное представление. БП обычно связан с операционными задачами и бизнес–отношениями, например, с процессом обработки заявки клиента или процессом разработки нового изделия. Процесс может целиком осуществляться в пределах одного организационного подразделения, охватывать несколько подразделений в рамках организации или даже несколько различных организаций, как, например, в системе отношений клиент–поставщик. БП может включать формальные и относительно неформальные взаимодействия между участниками; его продолжительность может также колебаться в широких пределах. Описания бизнес–процессов, выполненные с разной степенью формализации, применяются для управления деятельностью предприятий и её оптимизации. Описание — это представление БП в форме, поддерживающей автоматическую обработку, в частности — моделирование или исполнение системой управления потоком работ (workflow management system).

Для описания БП существуют средства, выполняющие визуализацию и позволяющие разрабатывать модели в графическом режиме.

Бизнес-модель, как основа управления компанией, позволяет создавать основу для создания должностных инструкций, оценки деятельности частей компании или предприятия в целом. БП модель используется как средство управления изменениями и организационным развитием, как при эволюционном развитии, так и при полном реинжениринге бизнеса (реинжениринг – это методика кардинальной реструктуризации бизнес-процессов для достижения резких, скачкообразных улучшений в деятельности компании). Модель позволяет ясно увидеть, какие подразделения и технологические процессы будут затронуты при том или ином изменении и, при наличии специальных программных средств, просчитать, как это скажется на деятельности компании в целом.

Таким образом, если известен желаемый результат, можно найти оптимальный способ его достижения.

Естественная цель любого бизнеса, вытекающая из его природы, – обеспечение долгосрочного коммерческого результата. Успех бизнеса во многом определяется скоростью и точностью реакции компании на изменение внешней среды. Эффективный учет изменений становится ключевым фактором повышения конкурентоспособности. Это требует применения в менеджменте новых концепций, техник и инструментария. Высокая прозрачность тщательно промоделированного бизнеса, простота и доступность системного описания позволяет разработать исходное техническое задание на насыщение системы управления ресурсами. Это позволяет обеспечивать необходимые ресурсы требуемого качества – в необходимом количестве, в нужном месте, в заданное время, за приемлемую цену. Последнее самым серьезным образом способно снизить производственные издержки, обеспечив, таким образом, повышение конкурентоспособности.

Среди систем управления ресурсами выделяются следующие классы:

1. Системы планирования и управления ресурсами предприятия.

2. Системы управления производством и технологическими процессами (системы поддержки принятия решений для оперативного управления производством).

3. Системы управления содержанием (системы, предназначенные для обеспечения совместной работы над документами с учётом требований безопасности и разграничения доступа, в особенности к сведениям, составляющим коммерческую и иную тайну).

4. Управление проектами (Project Management System) — подсистема, поддерживающая создание, изменение, запуск и выполнение проектов компании с возможностью автоматического расчета и оптимизации сроков выполнения и финансовых затрат по проекту. Подсистема контроля позволяет оценивать и корректировать ход выполнения проектов.

5. Управление процессами (Business Process Management) — подсистема поддерживает запуск и выполнение бизнес-процессов. Подсистема мониторинга позволяет накапливать статистику по ходу выполнения процессов. Подсистема контроля дает возможность управлять выполнением процесса.

6. Управление персональными задачами (Personal Information System) - подсистема, поддерживающая исполнение персоналом поступивших задач, создание собственных задач руководителей, создание задач подчиненных. Подсистема контроля позволяет оценивать загрузку и эффективность работы подчиненных сотрудников.

7. Системное и наглядное отображение модели организации деятельности компании. Эффективную работу со всем комплексом организационно – распорядительной документации. Быстрое и контролируемое прохождение управляющих воздействий сверху и информации снизу. Эффективное информационное и организационное взаимодействие рабочих групп. Прозрачность результатов функционирования предприятия. Вывод сбалансированных показателей системы в систематизированном виде, организация "панелей управления" (компактного отражения наиболее существенной управленческой информации для высших менеджеров).

С построения бизнес-модели начинается не только внедрение готовых корпоративных решений, но и разработка любых программных продуктов, так или иначе поддерживающих или автоматизирующих какой–либо участок производства. Модели БП используются в приложениях электронной коммерции и интеграционных решениях.

Из всего сказанного можно сделать вывод о крайней важности моделирования БП для успешного функционирования бизнеса.

При создании графической компоненты БП часто используются математические уравнения и, в частности, дифференциальные уравнения, описывающие пропорции между скоростями изменения основных (ключевых) бизнес-показателей.

2. Основные обозначения и некоторые классические модели экономики

Ниже рассматриваются следующие экономические параметры и их обозначения (см. [6] – [8]):

$Y(t)$ – выпуск (валовый доход) учреждения к моменту t, $0 \leq t \leq T$,

$K(t)$ – прирост капитала (основных фондов),

$L(t)$ – число занятых (трудовые ресурсы),

$I(t)$ – объем инвестиций (отчислений на развитие учреждения),

$C(t)$ – объем потребления,

$S(t)$ – объем сбережений.

Используются также удельные ("подушевые") показатели:

$$k = \frac{K}{L}, \qquad y = \frac{Y}{L}, \qquad i = \frac{I}{L}, \qquad c = \frac{C}{L}.$$

Структурные константы и переменные величины:

a – скорость гарантированного инвестирования (инвестицмонный лаг);

$s = \frac{S}{Y}$ – коэффициент сбережений;

$v = \frac{I}{Y}$ – коэффициент инвестирования;

$I^0 = at$ – гарантированные инвестиции к моменту времени t;

$I - I^0$ – индуцированные инвестиции;

$\theta = \frac{I-I^0}{\dot{Y}}$ – коэффициент мощности акселерации, равный отношению объема индуцированных инвестиций к скорости выпуска;

$\theta\dot{Y}$ – линейная акселерация;

$\theta \cdot \varphi(\dot{Y})$ – нелинейная акселерация, $\varphi(\dot{Y})$ – гладкая нелинейная функция (нелинейный акселератор). Примеры нелинейных акселераторов, используемых в разных моделях: $th(\dot{Y})$ – акселератор Т.Пу, $\dot{Y}(1 - \gamma\dot{Y}^2)$ – акселератор Хикса – Гудвина (γ – константа Хикса – Гудвина);

$Y = F(K,L)$ — производственная функция;

$A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ – производственная функция Кобба – Дугласа,

A, α – коэффициенты Кобба – Дугласа (A – инновационный уровень);

$m = \frac{\dot{Y}}{\dot{I}}$ – мультипликатор (определяемый как отношение скорости выпуска к скорости инвестирования);

$L(t)=L_0 e^{vt}$ – формула экспоненциального роста трудовых ресурсов;

v – показатель роста трудовых ресурсов;

μ – коэффициент выбытия используемого копитала (неизбежные отчисления).

При анализе экономической динамики часто используются следующие модельные уравнения:

$$\dot{k} = -\lambda k + s(t) \cdot f(k), \qquad \lambda = \mu + \nu,$$
$$0 < s(t) < 1, \tag{1}$$

– модель Солоу,

$$\theta \frac{dY}{dt} = sY;$$

– модель Харрода,

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{Y} & = & I - sY \\ \dot{I} & = & \theta\dot{Y} - I \end{array}\right\};$$

– модель Хикса – Гудвина,

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{Y} & = & m\dot{I} \\ \dot{I} & = & \theta\ddot{Y} + a \end{array}\right\};$$

– непрерывная модель с мультипликатором и акселератором,

$$\left.\begin{array}{rcl} Y_{k+1} & = & Y_k + m_k(I_k - I_{k-1}) \\ I_{k+1} & = & I_k + \theta_k(m_k(I_k - I_{k-1}) - (Y_k - Y_{k-1})) + a \end{array}\right\};$$

– дискретная модель с мультипликатором и акселератором,

$$J = \int_0^T e^{-\delta t}\left(\frac{Y(t) - I(t)}{L(t)}\right) dt;$$

– функционал благосостояния (функционал цели),

$$\Delta_{k+1} = (1 - \theta_k) m_k (I_k - I_{k-1}) + \theta_k (Y_k - Y_{k-1}) - a;$$

– прирост благосостояния на $(k + 1)$-м контрольном интервале в дискретной модели с мультипликатором и акселератором.

3. Модель Р. Солоу

Более сотни лет математическая экономика имела дело лишь со статическими моделями, определяющими точки равновесия, равновесные магистрали, оптимальные распределения цен и т.п. Динамические модели стали применяться сравнительно недавно, начиная с 30 – 40-х годов двадцатого столетия. В России динамические модели начали изучаться в 60-е годы. Оптимизационные модели с параметрами "основные фонды – потребление" были описаны в обзорной статье Б.С. Митягина [3], подготовленной по материалам прочитанного им курса математической экономики на мехмате МГУ в 1971 году.

К одной из основополагающих динамических моделей для современной экономической науки относится односекториальная модель Р. Солоу, связывающая изменения основных параметров фирмы (на базовом периоде времени $[0,T]$).

Предположим, что $S(T) = I(t)$ (все сбережения переходят в инвестиции). То есть, имеет место первое основное соотношение:

$$Y(t) = C(t) + I(t) \quad \forall t. \tag{2}$$

Как правило, предполагается, что число занятых растет по экспоненциальному закону:

$$\dot{L} = \delta L, \quad L(0) = L_0 \tag{3}$$

или

$$L(t) = L_0 e^{\nu t},$$

где v — некоторая константа.

Переменные K, L иногда называют главными факторами производства. Часто предполагается, что имеет место следующая связь:

$$Y(t) = F(K(t),L(t)), \tag{4}$$

где $F(K(t),L(t))$ — так называемая производственная функция. Основные условия, которым должна удовлетворять производственная функция, приведены, например, в учебнике [6]. Чаще всего используется производственная функция в форме Кобба – Дугласа:

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{5}$$

Константы A (инновационный уровень) и α называются коэффициентами Кобба – Дугласа.

В простейшем варианте предполагается, что инвестиции "мгновенно" переходят в капитал. То есть имеет место следующее второе основное уравнение:

$$\dot{K} = -\mu K + I = -\mu Y + sF(K,L), \tag{6}$$

где $s = s(t)$ — инвестиционная доля валового дохода:

$$I(t) = s(t)Y(t), \quad 0 \le s_{min} \le s(t) \le s_{max} \le 1.$$

В случае функции Кобба – Дугласа более удобен вариант уравнения (6) в удельных переменных

$$\dot{k} = -\lambda k + s \cdot f(k), \tag{7}$$

$$\lambda = \mu + v, \quad f(k) = Ak^{\alpha}.$$

Функция $s(t)$, задающая распределение дохода между потреблением и инвестициями, определяется управляющим аппаратом фирмы и поэтому она выполняет роль управляющей функции в соответствии с теорией оптимального управления динамическими системами. Для выбора наилучшего (оптимального) управления можно воспользоваться принципом максимума Л.С. Понтрягина. При этом в качестве целевой функции можно использовать функционал благосостояния с дисконтированием:

$$V = \int_0^T e^{-\delta t} U(c(t))dt, \tag{8}$$

где δ – коэффициент дисконтирования, U – функция благосостояния (см. [8]),

$$c(t) = C(t) / L(t) = (1 - s(t))\, Y(t) / L(t)$$

– удельное потребление.

К основным уравнениям добавляются краевые условия:

$$k(0)=k_0, \quad k(T) \ge k_1, \tag{9}$$

задающие начальный капитал и оценку снизу конечного капитала.

В дискретном варианте (управление кусочно постоянно и смена значений происходит в заранее заданных контрольных точках времени $\{t_j\}$) имеем аналогичную систему:

$$k_{j+1} = k_j - \lambda k_j + s_j f(k_j). \tag{10}$$

Выбор наилучшего инвестирования в этом случае определяется посредством отыскания точки максимума функционала благосостояния, зависящего от конечного набора управляющих параметров $\{s_j\}$. Явную формулу этого функционала можно получить на основе (10).

В случае действия инвестиций с запаздыванием вводится дополнительный параметр V частичного действия инвестиций и его удельный вариант $v = \dfrac{V}{L}$. Уравнение (7) при этом заменяется (см. [8]) на систему двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{k} &= -\lambda k + v, & \lambda &= \mu + \nu, \\ \dot{v} &= -\nu v + \kappa s f(k), & \nu &= \kappa + \lambda \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Модель Р. Солоу позволяет вычислять распределение валового дохода между потреблением и инвестициями на протяжении базового периода времени (при условии равенства сбережений инвестициям), дающее максимальное среднее удельное потребление.

Для простейшего практического применения модели необходимы ежемесячные статистические данные (включая начало $t = 0$ и конец $t = T$) за прошедший год по следующим параметрам:

1) основные производственные фонды (капитал) K;

2) валовый доход (выпуск) Y;

3) объем всех инвестиций (сбережений) I;

4) число занятых L;

5) ограничение снизу на конечный капитал;

6) ограничения снизу и сверху на потребление;

7) дополнительные ограничения.

К недостаткам модели можно отнести необходимость контроля основных фондов и необходимость определения производственной функции. Поэтому в последнее время чаще используются динамические модели с «более доступными» параметрами «выпуск – инвестиции».

Многие из используемых моделей имеют феноменологический характер (см. [4], [5]). Одной из главных проблем феноменологического моделирования является установление интервалов достоверных значений, входящих в модельное уравнение структурных констант и экономических параметров (установление верхних и нижних порогов).

Целью феноменологического моделирования является не столько точное предсказание количественных показателей динамических процессов (хотя и здесь можно добиваться определенных успехов), сколько качественное описание — качественные оценки экономического роста, наличие режимов равновесного производства, их устойчивость, наличие экономических циклов, анализ отдельных траекторий развития и т.д.

Наличие информации о качественных свойствах динамической системы может стать основой для оценки и выбора направлений развития фирмы.

4. Модель Самуэльсона – Хикса – Гудвина сбалансированного роста, регулируемого коэффициентом инвестирования и акселератором

С давних времен используются математические модели эволюций доходов и инвестиций предприятий и фирм (Самуэльсон – в 1939 г., Хикс – в 1950 г., Пу – 1986 г. и др. (точные ссылки имеются в [4])).

Пусть Y – выпуск (суммарный доход) фирмы. В модели Харрода сбалансированного роста фирмы предполагается, что

$$\theta \frac{dY}{dt} = sY \tag{12}$$

(см. [4]). Структурная константа s называется коэффициентом инвестирования, а константа θ – коэффициентом мощности акселерации или, кратко, акселератором. Иногда предполагается, что потребление C совпадает с объемом инвестиций I и равно sY. Уравнение (12) эквивалентно системе двух уравнений:

$$\left.\begin{array}{rcl} I - sY & = & 0 \\ \theta\dot{Y} - I & = & 0 \end{array}\right\}. \tag{13}$$

В другой модели, обобщающей подходы Харрода, Самуэльсона, Хикса, Гудвина и Филлиппса полагают

$$\left.\begin{array}{rcl} \varepsilon\dot{Y} & = & I - sY \\ \varepsilon\dot{I} & = & \theta\dot{Y} - I \end{array}\right\} \tag{14}$$

(система Гудвина – Хикса) где ε – некоторый параметр.

Так как масштабированием параметров Y, I, θ можно избавиться от параметра ε, то систему Гудвина – Хикса обычно записывают в виде:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{Y} & = & I - sY \\ \dot{I} & = & \theta\dot{Y} - I \end{array}\right\} \tag{15}$$

(т.е. полагают ε).

Уравнения (15) задают отклик скорости роста выпуска и инвестиций на расстройку балансов между инвестициями и сбережениями, а также между фактическими и индуцированными инвестициями.

Из этих соотношений вытекает линейное дифференциальное уравнение (редуцированное) второго порядка

$$\ddot{Y} + (1 + s - \theta)\dot{Y} + sY = 0. \tag{16}$$

Решения этого уравнения представляют собой взвешенную сумму экспонент, поведение которых зависит от сигнатуры корней характеристического уравнения, отвечающего данному дифференциальному уравнению.

Система уравнений (15) заменой $u = I - sY$ приводится к более удобному для исследований виду:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{u} & = & (\theta - s)u - I \\ \dot{I} & = & \theta u - I \end{array}\right\}. \tag{17}$$

В случае необходимости учета инвестиционных порогов и потолков используется функция:

$$I = \theta\varphi(\dot{Y}) \tag{18}$$

(нелинейный закон инвестирования). В этом случае система уравнений (17) приобретет следующий вид:

$$\left.\begin{array}{rcl}\dot{u} & = & (\theta - s)u - I \\ \dot{I} & = & \theta\varphi(u) - I\end{array}\right\}. \qquad (19)$$

В случае нелинейного инвестирования могут возникать устойчивые циклические режимы в производстве. Например, если нелинейная акселерация задается функцией Гудвина – Хикса

$$\varphi(\dot{Y}) = \dot{Y}(1 - \gamma\dot{Y}^2), \qquad \gamma > 0,$$

то, используя теорию бифуркаций циклов из сложного фокуса, развитую Пуанкаре, Андроновым, Ляпуновым и Дюлаком (см. [4], [5], [11], [12]), можно вычислить асимптотики роста амплитуд колебаний в этих режимах и предельные значения периодов.

Таким образом, модель Гудвина – Хикса позволяет изучать колебание распределения валового дохода между сбережениями, потреблением и инвестициями на протяжении базового периода времени.

Можно также максимизировать среднее удельное потребление за счет выбора значений коэффициентов инвестирования и акселерации.

Для простейшего практического применения модели необходимы ежемесячные статистические данные (включая начало $t = 0$ и конец $t = T$) за прошедший год по следующим параметрам:

1) валовый доход (выпуск) Y;

2) объем инвестиций I;

3) объем сбережений S;

4) ограничения на промежуточные и окончательные выпуски и на инвестирование.

Для выяснения и прогнозирования существования равновесных режимов и циклов необходимо иметь перечисленные выше данные за существенно более длительный контрольный период (как минимум, за три года).

Недостатки модели: фиксация значений коэффициентов инвестирования и акселерации (фактически выступающих в роли структурных констант).

5. О моделировании циклогенеза

Рассмотрим задачу моделирования циклогенеза в виде задачи вычисления амплитуд периодических решений, бифурцирующих из нулевой точки покоя автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкой правой частью

$$\dot{x} = X(x, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^3. \qquad (20)$$

Уравнение (20) рассмотрим при условии $X(0,0) = 0$ и две пары комплексно сопряженных точек:

$$\lambda_1(\varepsilon), \bar{\lambda}_1(\varepsilon), \quad \lambda_2(\varepsilon), \bar{\lambda}_2(\varepsilon) \qquad (21)$$

спектра матрицы

$$A(\varepsilon) = \frac{\partial X}{\partial x}(0, \varepsilon).$$

трансверсально пересекают мнимую ось (условие "общего положения") с резонансом 1 : 2, а остальная часть спектра находится при всех рассматриваемых значениях ε внутри левой комплексной полуплоскости.

Такое пересечение мнимой оси описывается системой соотношений

$$\mathrm{Re}\,\lambda_1(0)=0,\qquad \mathrm{Re}\,\lambda_2(0)=0,\qquad \mathrm{Im}\,\lambda_1(0)=\omega_1, \tag{22}$$
$$\mathrm{Im}\,\lambda_2(0)=\omega_2;$$
$$q\,\omega_1=p\,\omega_2\quad p,q\in\mathbb{Z},\ \ \mathrm{HOD}(\mathrm{p},\mathrm{q})=1.$$

Будем изучать эту задачу методом конечномерной редукции. Пусть

$$\omega=\frac{\omega_1}{p}=\frac{\omega_2}{q},\quad k(\varepsilon)=q\,\mathrm{Im}\,\lambda_1(\varepsilon)-\mathrm{p}\,\mathrm{Im}\,\lambda_2(\varepsilon).$$

и пусть для данного резонанса выполняется условие трансверсальности:

$$\det\frac{\partial(Re\,\lambda_1,Re\,\lambda_2,k)}{\partial(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}\neq 0. \tag{23}$$

От дифференциального уравнения перейдем к операторному уравнению:

$$f(x,\varepsilon)=0, \tag{24}$$

в котором $x=x(t)$ и принадлежит банахову пространству Π^1_T – непрерывно дифференцируемых -периодических функций, f – фредгольмово отображение:

$$f(\cdot,\varepsilon)\colon x(t)\longrightarrow y(t),\ \ y(t)=\dot{x}(t)-X(x(t),\varepsilon)$$

действующее из Π^1_T в банахово пространство Π_T^0 – непрерывных -периодических функций.

К уравнению (24) можно применить схему редукции Ляпунова–Шмидта, сводящую это уравнение к уравнению в конечномерном пространстве [13]

$$\theta(\xi)=0,\ \ \xi\in\mathbb{R}^n \tag{25}$$
$$\theta(\xi)=(\theta_1(\xi),\theta_2(\xi),\theta_3(\xi),\theta_4(\xi))^T.$$

Для простоты рассмотрим уравнени:

$$\dot{x}=\nu(A(\varepsilon)x+X_2(x)+X_3(x)), \tag{26}$$

в котором $X_2(x)$, $X_3(x)$ — однородные полиномы на $\mathbb{R}^4$ второго и третьего порядков с векторными коэффициентами (система с квадратично-кубической нелинейностью). Параметр $\nu=1+\varepsilon_4$ введен для нормировки периода.

Такого типа уравнения встречаются при математическом моделировании экономической динамики [14], [15].

Если расширить трехмерный параметр ε до четырехмерного, потребовав выполнения регулярности пересечения мнимой оси точками спектра (ранг матрицы Якоби левых частей (23) равен четырем), то различные значения параметра ν будут поглощаться различными значениями параметра ε. Следовательно, можно рассматривать циклы фиксированного периода $T=\frac{2\pi}{w}$, не потеряв остальные циклы (так как циклы другого периода превращаются в циклы данного периода сменой значений параметра ε).

Далее предположим, что

$$A(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\alpha_1(\varepsilon)&-\beta_1(\varepsilon)&0&0\\ \beta_1(\varepsilon)&\alpha_1(\varepsilon)&0&0\\ 0&0&\alpha_2(\varepsilon)&-\beta_2(\varepsilon)\\ 0&0&\beta_2(\varepsilon)&\alpha_2(\varepsilon)\end{pmatrix},$$

при

$$\alpha_1 = Re\lambda_1,\ \alpha_2 = Re\lambda_2,\ \beta_1 = Im\lambda_1,\ \beta_2 = Im\lambda_2.$$

Запишем уравнение (24) в операторном виде:

$$f(x,\varepsilon,\nu) = 0, \qquad (27)$$

где

$$f(x,\varepsilon,\nu) = \dot{x} - \nu(A(\varepsilon)x + X_2(x) + X_3(x)),$$
$$f\colon \Pi_T^1 \to \Pi_T^0, \quad T = 2\pi \quad (w = 1).$$

Справедливы следующие утверждения:

1) подпространство $N := Ker\,\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,1)$ порождено векторами $\{e_j\}$:

$$N = Lin\{e_1, e_2, e_3, e_4\},$$
$$e_1 = (\cos(t), \sin(t), 0, 0)^T, \quad e_2 = (-\sin(t), \cos(t), 0, 0)^T,$$
$$e_3 = (0, 0, \cos(2t), \sin(2t))^T, \quad e_4 = (0, 0, -\sin(2t), \cos(2t))^T;$$

2) подпространство N и его ортогональное дополнение $N^{\perp} \cap E$ инвариантны относительно $\frac{\partial f}{\partial x}(0,\varepsilon,\nu)\ \forall\, \varepsilon, \nu$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\varepsilon,\nu)(N) \subset N, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,\varepsilon,\nu)(N^{\perp} \cap E) \subset N^{\perp} \cap E.$$

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,1)h = \dot{h} - A(0)h,$$

то элементы ядра N определяются уравнением $\dot{h} = A(0)h$,

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & -w_1 & 0 & 0 \\ w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w_2 \\ 0 & 0 & w_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, перейдя к линеаризованному уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\varepsilon,\nu)h = 0$$

при $\varepsilon = 0$ и $\nu = 1$, получим:

$$N = \mathrm{Ker}\,\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,1) = \mathrm{Span}(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3, \mathrm{e}_4).$$

Доказательство второго утверждения осуществляется непосредственной проверкой.

Пространство Π_T^1 разлагается в прямую сумму подпространства N и ортогонального к нему дополнения $N^{\perp} \cap \Pi_T^1$ (в метрике $L_2\,[0,T]$). То есть:

$$x = u + v \quad u \in N \quad v \perp N \quad u = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4.$$

Уравнение (26) эквивалентно системе:

$$\begin{cases} f^{(4)}(u + v, \varepsilon, \nu) = 0, \\ f^{(\infty-4)}(u + v, \varepsilon, \nu) = 0, \end{cases}$$

где

$$f^{(4)}(u + v, \varepsilon, \nu) = \sum_{j=1}^{n} < f(u + v, \varepsilon, \nu), e_j > e_j,$$

$$f^{(\infty-4)}(u+v,\varepsilon,v)=f(u+v,\varepsilon,v)-f^{(4)}(u+v,\varepsilon,v),$$

$$<x,y>=\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{j=1}^4 x_j(t)y_j(t)dt, \qquad <e_i,e_j>=1$$

По теореме о неявной функции, из второго уравнения системы v явно выражается через ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4.

Для ключевого отображения Θ, соответствующего операторному уравнению (27) (или, что эквивалентно, задаче о 2π-периодических решениях системы дифференциальных уравнений (26)), в случае резонанса 1:2 имеет место следующее представление:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & -\beta_1 & 0 & 0\\ \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_2 & -\beta_2\\ 0 & 0 & \beta_2 & \alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}a_1 & -b_1 & 0 & 0\\ b_1 & a_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & -b_2\\ 0 & 0 & b_2 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_4\\ \xi_1\xi_4-\xi_2\xi_3\\ \xi_1^2-\xi_2^2\\ 2\xi_1\xi_2\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}c_1\mathcal{J}_1+d_1\mathcal{J}_2 & -c_2\mathcal{J}_1-d_2\mathcal{J}_2 & 0 & 0\\ c_2\mathcal{J}_1+d_2\mathcal{J}_2 & c_1\mathcal{J}_1+d_1\mathcal{J}_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c_3\mathcal{J}_1+d_3\mathcal{J}_2 & -c_4\mathcal{J}_1-d_4\mathcal{J}_2\\ 0 & 0 & c_4\mathcal{J}_1+d_4\mathcal{J}_2 & c_3\mathcal{J}_1+d_3\mathcal{J}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix}+$$

$$+O(|\xi|^4).$$

Коэффициенты α_i, β_i, a_i, b_i, c_i, d_i в представлении отображения Θ, указанном в теореме, явно выражаются через коэффициенты исходной динамической системы.

Таким образом, подставив соответствующее выражение v в первое уравнение системы, получим уравнение типа (25), в котором

$$\theta(\xi)=\begin{pmatrix}\alpha_1\xi_1-\beta_1\xi_2\\ \beta_1\xi_1+\alpha_1\xi_2\\ \kappa_1\xi_3-\delta_1\xi_4\\ \delta_1\xi_3+\kappa_1\xi_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\theta_{3,1}(\xi)\\ \theta_{3,2}(\xi)\\ \theta_{3,3}(\xi)\\ \theta_{3,4}(\xi)\end{pmatrix}+O(|\xi|^4)=0,$$

где

$$\theta_{3,1}(\xi)=(\alpha_2\xi_1-\beta_2\xi_2)(\xi_1^2+\xi_2^2)+(\alpha_3\xi_1-\beta_3\xi_2)(\xi_3^2+\xi_4^2),$$

$$\theta_{3,2}(\xi)=(\beta_2\xi_1+\alpha_2\xi_2)(\xi_1^2+\xi_2^2)+(\beta_3\xi_1+\alpha_3\xi_2)(\xi_3^2+\xi_4^2),$$

$$\theta_{3,3}(\xi)=(\kappa_2\xi_3-\delta_2\xi_4)(\xi_1^2+\xi_2^2)+(\kappa_3\xi_3-\delta_3\xi_4)(\xi_3^2+\xi_4^2),$$

$$\theta_{3,4}(\xi)=(\delta_2\xi_3+\kappa_2\xi_4)(\xi_1^2+\xi_2^2)+(\delta_3\xi_3+\kappa_3\xi_4)(\xi_3^2+\xi_4^2),$$

а коэффициенты $\alpha_i,\beta_i,\kappa_i,\delta_i,\ i=\overline{1,3}$, зависящие от ε и v, явно выражаются через коэффициенты исходного уравнения (5).

Аналогичные выводы справедливы в случае резонанса 1:3 и др.

На основе полученного представления ключевого уравнения можно получить полную информацию о резонансном циклогенезе (синхронезации) взаимодействующих экономик.

Список источников

1. Кузнецов, Ю.А. Обобщенная модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала. III [текст] / Ю.А. Кузнецов, О.В. Мичасова // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование. Оптимальное управление. – 2010. – №3 (1). – С. 177 – 190.

2. Кузнецов, Ю.А. Человеческий капитал: формирование, измерение, вклад в экономический рост [текст] / Ю.А. Кузнецов, О.В. Мичасова // Экономический анализ: теория и практика. – 2010. – №26 (191). – С. 21 – 33.

3. Митягин, Б.С. Заметки по математической экономике [текст] / Б.С. Митягин // Успехи математических наук. – 1972. – Т 27, вып. 3. – С. 3 – 19.

4. Занг, В.–Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории [текст] / В.–Б. Занг. – М.: Мир, 1999. – 335 с.

5. Пу, Е. Нелинейная экономическая динамика [текст] / Е. Пу. – Ижевск: Издательский дом "Удмуртский университет", 2000. – 200 с.

6. Замков, О.О. Математические методы в экономике. Учебник МГУ им. М.В. Ломоносова [текст] / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – изд. "ДИС", 1998. – 368 с.

7. Воркуев, Б.Л. Модели макро- и микроэкономики [текст] / Б.Л. Воркуев. – М.: ТЕИС, 1999. – 235 с.

8. Колемаев, В.А. Математическая экономика: учебник для вузов [текст] / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.

9. Рыков, В.В. Обработка нечисловой информации. Управление знаниями [текст] / В.В. Рыков. – М.: МФТИ, 2005. – 158 с.

10. Костин, В.А. Оптимизация мультипликатора в модели сбалансированного роста экономики с показателями ”мультипликатор–акселератор” [текст] / В.А. Костин, Ю.И. Сапронов // Математические модели и операторные уравнения. – Том 3. Воронеж: ВГУ, 2005. – 86 с.

11. Бибиков, Ю.Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации [текст] / Ю.Н. Бибиков. – Ленинград: Изд. ЛГУ, 1991. – 144 с.

12. Хэссард, Б. Теория и приложения бифуркации рождения цикла [текст] / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. – М.: Мир, 1985. – 280 с.

13. Карпова, А.П. Приближенное вычисление амплитуд циклов, бифурцирующих при наличии резонансов [текст] / А.П. Карпова, Ю.И. Сапронов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2008. – Вып. 3. – С. 12 – 22.

14. Магницкий, Н.А. Новые методы хаотической динамики [текст] / Н.А. Магницкий, С.В. Свиридов. – М.: URSS, 2004. – 319 с.

15. Магницкий, Н.А., Сидоров, С.В. Распределенная модель саморазвивающейся рыночной экономики [текст] / Н.А. Магницкий, С.В. Сидоров // Нелинейная динамика и управление // Под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. – 2002. – Вып. 2. – С. 243 – 262.

SEARCH OF BEST TRACKS OF ECONOMIC DEVELOPMENT BASED ON CYCLICITY

Dudchak Vladimir Vlasyevich,
Dr. Sc. of Economy, Deputy General Director of JSC "Concern "Sozvezdiye"; dudchak@sozvezdie.su
Skaptsov Yuriy Petrovich,
Head of Planning and Economic Department of JSC "Concern "Sozvezdiye"; syp@sozvezdie.su
Malikov Aleksandr Arkadyevich,
Head of Economic Service of JSC "Concern "Sozvezdiye";
syp@sozvezdie.su

The problem of modeling cyclogenesis in economic systems is considered. The algorithm for calculating the amplitudes of periodic orbits of a dynamic system model, bifurcating from the steady state is offered. On the basis of the presented algorithm article provides information on the resonant cyclogenesis (synchronization) of several interacting economies.
Keywords: mathematical model of economic growth, business cycles, an algorithm for calculating the amplitude of cycles.