

---

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫМИ МОДЕЛЯМИ С УЧЕТОМ ЛАТЕНТНЫХ ФАКТОРОВ<sup>1</sup>**

---

**Савинов Геннадий Володарович,**

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Санкт-Петербургского государственного экономического университета; savinov@finес.ru

**Светуных Сергей Геннадьевич,**

доктор экономических наук, профессор кафедры организации и управления Национального минерально-сырьевого университета; sergey@svetunkov.ru

В статье рассматривается возможность применения моделей комплекснозначной экономики для моделирования процессов, имеющих латентные факторы, выявление которых – сложная задача. На примере макроэкономической модели производства России показывается возможность моделирования взаимодействия легальной и теневой экономики.

**Ключевые слова:** латентные факторы, комплексная переменная, экономико-математическая модель, теневая и легальная экономики.

Экономика любой страны, а особенно России представляет собой сложный симбиоз легальной и теневой экономики. Очевидно взаимное влияние этих составляющих друг на друга, но нет инструментов адекватного моделирования этого влияния. Помимо того очень часто экономисты сталкиваются с тем, что ряд изучаемых процессов имеет некоторые латентные, скрытые от анализа факторы, влияющие на результат. Для более адекватного моделирования необходимо эти факторы каким-то образом описать, но в части моделей и методов действительных переменных сделать это не получается.

Решение этой проблемы может быть осуществлено с помощью элементов теории функций комплексного переменного, применение которых в экономике определяет новое научное направление – комплекснозначную экономику [1].

Рассмотрим простую модель формирования дохода предприятия. Пусть

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-06-00316 «Комплекснозначный анализ эффективности развития минерально-сырьевого комплекса России».

$x$  – это объем производимой продукции. Часто на практике при анализе моделей производства этот показатель может быть определен лишь приближенно, так как он зависит от множества случайных факторов, способных оказать влияние на его величину. Заметим, что эти факторы могут не входить в рассматриваемую математическую модель и их влияние можно учесть, рассматривая показатель  $x$  как случайную величину

$$x = x_{cp} + \xi, \quad (1)$$

где  $x_{cp} = M(x)$  – математическое ожидание (среднее значение) показателя  $x$ , а  $\xi$  – случайная величина, имеющая нулевое математическое ожидание  $M(\xi) = 0$ , и имеющая смысл отклонения (колебания) показателя  $x$  от своего среднего значения.

Рассмотрим еще один показатель  $a$  – цену на продукцию, которую также будем рассматривать, как случайную величину:

$$a = a_{cp} + \eta, \quad (2)$$

где  $a_{cp} = M(a)$ ,  $\eta$  – некоторая случайная величина, имеющая нулевое математическое ожидание  $M(\eta) = 0$ .

Вычислим доход предприятия, как произведение количества выпущенной продукции на ее цену.

$$P = ax = (a_{cp} + \eta)(x_{cp} + \xi). \quad (3)$$

Математическое ожидание дохода будет равно:

$$M(P) = P_{cp} = a_{cp}x_{cp} + M(\eta\xi). \quad (4)$$

Корреляционный момент  $M(\eta\xi)$  можно представить в виде

$$M(\eta\xi) = r_{\eta\xi}\sigma_{\eta}\sigma_{\xi}, \quad (5)$$

где  $r_{\eta\xi}$  – коэффициент корреляции между случайными величинами  $\eta$  и  $\xi$ , а  $\sigma_{\eta}$  и  $\sigma_{\xi}$  – среднеквадратические отклонения этих величин.

Так как по смыслу все величины  $a_{cp}$ ,  $x_{cp}$ ,  $\sigma_{\eta}$  и  $\sigma_{\xi}$  не отрицательные, то минимальное значение  $P_{cp}$  будет достигаться при  $r_{\eta\xi} = -1$ . Кроме того, ясно, что  $\sigma_{\eta} = \sigma_a$ , а  $\sigma_{\xi} = \sigma_x$ . В итоге имеем:

$$\min P_{cp} = a_{cp}x_{cp} - \sigma_a\sigma_x. \quad (6)$$

Аналогично рассуждая, легко получить, что

$$\max P_{cp} = a_{cp}x_{cp} + \sigma_a\sigma_x. \quad (7)$$

Введем теперь в рассмотрение комплексные показатели:

$$x = x_{cp} + i\sigma_x, \quad a = a_{cp} + i\sigma_a, \quad P = P_{cp} + i\sigma_p. \quad (8)$$

Тогда имеем:

$$P = ax = P_{cp} + i\sigma_p = (a_{cp}x_{cp} - \sigma_a\sigma_x) + i(a_{cp}\sigma_x + \sigma_ax_{cp}).$$

Или

$$P = a\bar{x} = P_{cp} - i\sigma_p = (a_{cp}x_{cp} + \sigma_a\sigma_x) + i(-a_{cp}\sigma_x + \sigma_ax_{cp}). \quad (9)$$

Таким образом, получаем, что

$$\operatorname{Re}(ax) = \min P_{cp}, \quad (10)$$

$$\operatorname{Re}(a\bar{x}) = \max P_{cp}. \quad (11)$$

Следовательно, действительная часть комплексного дохода служит верхней или нижней оценкой его средней величины. Мнимая часть этого показателя может рассматриваться как оценка возможных отклонений от среднего при различном характере взаимодействия показателей  $a$  и  $x$ .

Заметим, что реальное значение коэффициента корреляции  $r_{\eta\xi}$  неизвестно, так как неизвестен совместный закон распределения случайных величин  $\eta$  и  $\xi$ . Именно поэтому и возникает необходимость в использовании верхних и нижних оценок.

Приведенная выше статистическая трактовка комплексных показателей рассматривает мнимую часть, как меру колебаний этого показателя под действием факторов, не входящих в модель или недостаточно точно оцениваемых в рассматриваемой модели.

Этот же подход, когда к мнимой части относятся скрытые факторы, можно трансформировать и на случай моделирования экономики с учетом ее «теневой» части. Показатели легальной экономики следует отнести к действительным частям экономических переменных, а показатели теневой экономики следует относить к мнимым составляющим. Придерживаясь этого правила, можно построить многообразнейшие модели, описывающие теневую экономику. Остановимся лишь на одной из них.

Введем следующие переменные:

$K_0$  – стоимость основных фондов, отраженная в статистических отчетах;

$K_1$  – стоимость основных фондов, используемая в нелегальном производстве;

$L_0$  – количество занятых на производстве;

$L_1$  – количество занятых в теневой экономике;

$Q_0$  – валовой внутренний продукт, отраженный в официальной статистике;

$Q_1$  – величина валового внутреннего продукта теневой экономики.

Простейшая степенная модель экономики с учетом теневого бизнеса имеет вид:

$$Q_0 + iQ_1 = a(K_0 + iK_1)^\alpha (L_0 + iL_1)^\beta. \quad (12)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – показатели степени функции, на величины и знаки которых мы не налагаем никаких ограничений.

С позиций наилучшей аппроксимации социально-экономических явлений с учетом теневых процессов более точной будет степенная производственная функция комплексных переменных с комплексными коэффициентами:

$$Q_0 + iQ_1 = (a_0 + ia_1)(K_0 + iK_1)^{b_0 + ib_1} (L_0 + iL_1)^{c_0 + ic_1}, \quad (13)$$

коэффициенты которой можно найти с помощью МНК [1]. Но модель с действительными коэффициентами (12) с позиций экономической сути моделируемого процесса представляется более обоснованной.

Действительно, если величины основных фондов и занятых в теневой экономике вдруг, благодаря усилиям власти, будут сведены к нулю, то и объем производимой продукции в теневой экономике будет равен нулю. Модель (12) как раз это и моделирует – если  $K_i=0$  и  $L_i=0$ , то очевидно, что и  $Q_i=0$ . А в модели с комплекснозначными коэффициентами (13) даже при равенстве нулю теневых ресурсов действительная переменная, возводимая в комплексную степень, будет в качестве результата давать комплексную переменную и вычислять объем теневого продукта, отнесенный в мнимую часть, и не равный нулю. То есть – такая модель менее точно отражает реальные процессы. Это первое обстоятельство.

Второе обстоятельство, по которому следует отдать предпочтение модели (12), а не модели (13), заключается в характере исходных данных. Действительно, если статистические данные по легальной экономике, хотя и засорены ошибками, но их порядок и тенденции не особенно искажаются этими ошибками. А вот информация о теневой экономике и ее слагаемых такому учету не поддается по определению. Здесь приходится использовать экспертные оценки, точность которых, очевидно, крайне не велика. В таких условиях, когда исходные данные не точны, усложнять модель с целью повышения ее точности – затея бесперспективная. Поэтому простой модели (13) следует отдать предпочтение и по этому основанию.

Проведем предварительный анализ свойств предлагаемой модели экономической динамики с учетом теневой экономики. Применяя экспоненциальную форму записи, преобразуем модель (12) к следующему виду:

$$Q_0 + iQ_1 = a(K_0^2 + K_1^2)^{\frac{\alpha}{2}} (L_0^2 + L_1^2)^{\frac{\beta}{2}} e^{i(\alpha \arctg \frac{K_1}{K_0} + \beta \alpha \arctg \frac{L_1}{L_0})}. \quad (14)$$

Откуда легко определить, как модель учитывает влияние факторов на легальную и нелегальную части экономики. Объем официально отражаемого производства:

$$Q_0 = a(K_0^2 + K_1^2)^{\frac{\alpha}{2}} (L_0^2 + L_1^2)^{\frac{\beta}{2}} \cos(\alpha \arctg \frac{K_1}{K_0} + \beta \alpha \arctg \frac{L_1}{L_0}). \quad (15)$$

Аналогично можно определить, как предлагаемая модель описывает нелегальный выпуск:

$$Q_1 = a(K_0^2 + K_1^2)^{\frac{\alpha}{2}} (L_0^2 + L_1^2)^{\frac{\beta}{2}} \sin(\alpha \arctg \frac{K_1}{K_0} + \beta \alpha \arctg \frac{L_1}{L_0}). \quad (16)$$

Как видно, модель описывает влияние всех ресурсов – легальных и нелегальных – и на официальную, и на теневую экономику. Имеет ли это место в реальной экономике?

Действительно, занятые в теневой экономике  $L_1$  производят нелегальный продукт, который через официальные продажи в определенной части легализируется и отражается как часть реального ВВП  $Q_0$ , а занятые в легальном производстве зачастую, не подозревая того, производят продукт, скрываемый от налогообложения и включаемый в оборот теневой экономики. Кроме того, оплата за труд этих людей способствует тому, что свои доходы они направляют в существенной части на удовлетворение потребностей с помощью товаров, легально производимых в экономике.

Точно также и на основных фондах  $K_0$ , официально отражаемых в бухгалтерских балансах, производят продукцию для теневого оборота, а в различного рода «подпольных» цехах на оборудовании, которое мы отнесем к основным фондам теневого бизнеса  $K_1$ , производят товары, реализуемые в официальном обороте. Комплекснозначная степенная функция отражает эти сложные взаимосвязи.

Посмотрим, какие именно тенденции описывает предложенная модель. Предположим вначале, что ситуация в изучаемом регионе или стране такова, что способствует увеличению предпринимателей, работающих нелегально в теневой экономике, а ресурсы, привлекаемые к легальному производству, остаются постоянными. То есть возрастают как капиталы  $K_1$ , привлекаемые к нелегальному производству, так и количество занятых в теневой экономике  $L_1$ . Как следует из (15), это приводит к тому, что растут оба сомножителя  $(K_0^2 + K_1^2)^{\frac{\alpha}{2}}$  и  $(L_0^2 + L_1^2)^{\frac{\beta}{2}}$ , и уменьшается тригонометрический сомножитель – косинус возрастающих углов уменьшается. Так каким образом усиление теневой экономики влияет на легальную экономику? Ответ на этот вопрос определяется значениями показателей степени  $\alpha$  и  $\beta$ . Если они меньше единицы, то рост степенных составляющих будет происходить в меньшей степени, чем рост косинусоиды – моделируется либо стабильность, либо некоторое снижение легального производства. Чем ближе к нулю эти показатели, тем более отрицательным становится воздействие теневой экономики на легальную.

Если же показатели степени больше единицы, то степенные сомножители возрастают быстрее, нежели уменьшается косинусоида. Поэтому в этом случае моделируется положительное влияние теневой экономики на результаты легального производства.

Как эти ресурсы, вовлекаемые в теневой бизнес, оказывают влияние на его объемы? Ответ на этот вопрос можно получить из второй составляющей модели, которая обозначена как равенство (16). Степенные сомножители растут с ростом ресурсов  $K_1$  и  $L_1$ . Растет и тригонометрический сомножитель – синусоида с ростом угла увеличивает свои значения. Значит, моделируется однозначный рост теневого производства вне зависимости от того, какими являются показатели степени – близкими к нулю, или больше единицы.

Теперь вновь предположим, что конъюнктура производства такова, что предпринимателям нет смысла развивать теневое производство, и они, зафиксировав его на определенном уровне, вкладывают ресурсы в легальные производства. То есть растут капиталы  $K_0$ , привлекаемые к легальному производству, как и количество занятых в экономике  $L_0$ . Как на такое изменение ресурсов отреагирует модель (12)?

Динамика легального производства, определяющаяся произведением степенных сомножителей и тригонометрического (15) сомножителя, будет такой. Степенные сомножители растут, и этот рост определяется показате-

лями степени. Аргумент косинусоиды с ростом  $K_{0t}$  и  $L_0$  будет уменьшаться. Косинус уменьшающегося угла увеличивается. Следовательно, объем легального производства увеличивается в любом случае.

А что происходит с нелегальной экономикой? Степенные составляющие также возрастают, а вот тригонометрический сомножитель – синусоида – уменьшается. Поэтому в зависимости от значений показателей степени и соотношения ресурсов легальной и нелегальной экономики объем нелегального производства может как возрасти, так и уменьшиться. А может оставаться стабильным. Если при этом показатели степени меньше единицы, то рост степенных сомножителей происходит в меньшей степени, чем уменьшение синусоиды.

Получается, что модель верно отражает возможные варианты воздействия ресурсов легальной и теневой экономики друг на друга.

По имеющимся данным построить модель (12) не сложно – это уже делалось в предыдущих параграфах. Но, как уже говорилось, основная сложность, с которой приходится сталкиваться при построении модели (12), отсутствие достоверной информации о переменных, относящихся к теневой экономике в России и в других странах. Поскольку известны экспертные оценки того, сколько занято человек в теневой экономике России (средняя оценка – 40%) и какой оборот составляет теневая экономика по отношению к официально регистрируемому ВВП (средняя оценка мнений экспертов – 45%), можно использовать эти данные для построения модели. Однако неизвестной является величина стоимости основных фондов (капитала), используемых в теневой экономике. Нам экспертная оценка этой величины не встречалась. Для ее определения предлагается следующий подход. По имеющимся статистическим данным России вычисляем параметры степенной производственной функции действительных переменных. Модель имеет вид:

$$Q_t = 0,5241K_t^{0,569}L_t^{0,579}. \quad (17)$$

Поскольку показатели степени отражают вклад каждого ресурса в результаты производства, а технологии теневой экономики незначительно отличаются от технологий официальных производств, тем более, что существенная часть теневого продукта вырабатывается на тех же технологических линиях, то можно использовать эти коэффициенты для модели (12):

$$Q_{0t} + iQ_{1t} = 0,5241(K_{0t} + iK_{1t})^{0,569}(L_{0t} + iL_{1t})^{0,579}. \quad (18)$$

Откуда можно получить оценку основных фондов, используемых в теневой экономике России. Для этого прологарифмируем левую и правую части этого равенства (будем использовать главные значения логарифмов):

$$\ln \sqrt{Q_{0t}^2 + Q_{1t}^2} + i \operatorname{arctg} \frac{Q_{1t}}{Q_{0t}} = \ln 0,5241 + 0,569 \left[ \ln \sqrt{K_{0t}^2 + K_{1t}^2} + i \operatorname{arctg} \frac{K_{1t}}{K_{0t}} \right] + 0,579 \left[ \ln \sqrt{L_{0t}^2 + L_{1t}^2} + i \operatorname{arctg} \frac{L_{1t}}{L_{0t}} \right].$$

Теперь можно вычислить неизвестную величину капитала, находящегося в теневой экономике России.

Впрочем, особенности свойств комплексных переменных позволяют упро-

стить эту задачу. Поскольку два комплексных числа равны друг другу только тогда, когда равны друг другу их действительные и мнимые части, то применительно к экспоненциальной форме это означает, что должны быть равны друг другу модули комплексных чисел и их полярные углы. Поэтому из (18) можно получить и более удобные для вычислений выражения:

$$(Q_{0t}^2 + Q_{1t}^2)^{\frac{1}{2}} = 0,5241(K_{0t}^2 + K_{1t}^2)^{\frac{0,569}{2}} (L_{0t}^2 + L_{1t}^2)^{\frac{0,579}{2}}. \quad (19)$$

Или

$$\arctg \frac{Q_{1t}}{Q_{0t}} = 0,569 \arctg \frac{K_{1t}}{K_{0t}} + 0,579 \arctg \frac{L_{1t}}{L_{0t}}. \quad (20)$$

Решая любое из приведенных уравнений относительно величины основных фондов теневой экономики  $K_{0t}$ , получим, что они составляют величину 37% от официальной величины основных фондов России в последние годы. То есть чуть больше трети основных фондов России определяется моделью как включенные в оборот теневой экономики.

Этот подход можно использовать и на уровне региональной экономики при анализе и моделировании социально-экономического развития регионов.

Конечно, результаты расчетов по полученной модели (18) носят в существенной части условный характер, поскольку она базируется на ряде упрощений и допущений; и при появлении относительно достоверных значений переменных, отнесенных к теневой экономике, коэффициенты модели (18) должны быть пересчитаны и наверняка изменятся. Но важно другое – модель классификационной комплекснозначной функции может быть использована для моделирования экономики с учетом ее теневой составляющей.

Модели действительных переменных в этом отношении представляют собой менее тонкий инструмент исследования и анализа.

#### **Список источников**

1. Svetunkov, Sergey. Complex-Valued Modeling in Economics and Finance – Springer Science+Business Media [текст] / S. Svetunkov. – New York, 2012. – 318 p.
2. Светуныков, С.Г. Моделирование теневой экономики с помощью степенной производственной функции комплексных переменных [текст] / С.Г. Светуныков, И.С. Савков // Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении : сб. научн. трудов. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2009. – Вып. 19.

---

## **MODEL BUILDING OF SOCIAL AND ECONOMIC PROCESS BY COMPLEX-VALUED MODEL BASED ON LATENT FACTORS**

---

**Savinov Gennady Volodarovich,**

Dr. Sc. of Technical Science, Professor, Chief of Chair Higher mathematics of Saint-Petersburg State University of Economics; savinov@finec.ru

**Svetunkov Sergey Gennadievich,**

Dr. Sc. of Economy, Professor of the Chair Organization and Management of The National University of Mineral Resources «Mining»; sergey@svetunkov.ru

The article discusses the applicability of complex-valued models to simulate the economy holding latent factors, identify them – is a difficult task. As an example of the macroeconomic Russian production model demonstrates the ability model building of cooperation between legal and shadow economy.

**Keywords:** latent factors, complex variable, economic and mathematical model, legal and shadow economy.