

---

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ НА ФАКТОРЫ ПРОИЗВОДСТВА**

---

**Кузнецов Сергей Борисович,**

кандидат физико-математических наук, доцент Сибирского института управления РАНХиГС; sbk@ngs.ru

В статье рассматриваются вопросы моделирования развития возобновляемых факторов производства. Предлагается дифференциальная система уравнений, моделирующая влияние экономической среды на факторы.

**Ключевые слова:** факторы производства, инвестиции, влияние экономической среды, рейтинг ведения бизнеса.

Моделирование процессов обновления возобновляемых факторов производства тесно связано с вопросами цикличности развития экономики. Все экономические изменения происходят под воздействием импульсов, которые могут быть внешними, так и внутренними – самозарождающимися. Эти толчки являются элементами разгона экономики и средством выхода из кризисов. Рагнар Фришем было отмечено, что «внешние импульсы действуют на экономическую систему, вызывая в ней волнообразные движения, подобно тому как внешний толчок в состоянии вызвать качание маятника». Но продолжительность волнообразного движения определяется «внутренней структурой качающейся системы» [7, с. 19].

Варьирование колебаниями осуществляется с помощью инвестиций, налоговой политики и процентной ставкой, кроме того, сопротивление экономической среды может существенно повлиять на частоту и амплитуды этих колебаний.

Влияние экономической среды на развитие факторов производства осуществляется через: изменение уровня налогов, доступность трудовых ресурсов, антимонопольное законодательство, возможности кредитования, конкуренцию, регистрацию и ликвидацию предприятий, постановления правительства, направленные на сдерживание или развитие факторов производства. На внешнеэкономическом уровне это влияние определяется: таможенным законодательством, миграционной политикой государств, ограничениями в привлечении иностранных капиталов, рабочей силы, уровнем международной торговли, различными видами эмбарго и т.п.

В пространстве с четырьмя степенями свободы: временем  $t$ , трудовыми ресурсами  $L$ , физическим капиталом  $K$  и человеческим капиталом  $H$  рас-

смотрим непрерывно распределенный векторный экономический показатель  $\vec{F}(\vec{r}, t) = (F_L(\vec{r}, t), F_K(\vec{r}, t), F_H(\vec{r}, t))$ , где  $\vec{r} = (L, K, H)$ . Например, в качестве векторного показателя может быть рассмотрен вектор инвестиций, направленных на развитие факторов производства, или скорость изменения факторов производства, или вектор, компонентами которого являются предельная фондоотдача, предельная производительность труда, предельная отдача человеческого капитала.

Выберем в пространстве факторов производства  $\Omega$  некоторую точку с координатами  $\vec{r} = (L, K, H)$  и рассмотрим замкнутый контур  $C$ , стягивающий поверхность  $S_1$ , на которой будем брать начальные условия для экономических объектов, и построим линию развития некоторого экономического показателя  $\vec{F}(\vec{r}, t)$  для этих объектов за время  $t$  до поверхности  $S_2$ . Получим коридор объемом  $w$  и с поверхностью  $\Gamma$ , который назовем коридором развития показателя. Коридор развития имеет то свойство, что через его боковую границу линии развития не проходят (см. рис.).

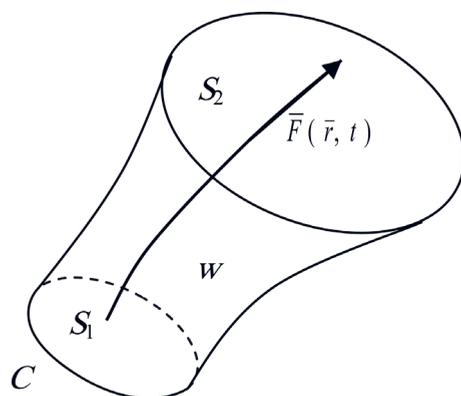


Рис. Коридор развития показателя

Величина  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(\vec{r}, t)$  представляет собой скорость обновления факторов производства. Для того чтобы задать векторное поле этих скоростей (пространство состояний экономики), необходимо построить семейство линий, касательные к которым в каждой точке пространства  $\Omega$  будут совпадать в данный момент времени с направлением скорости обновления факторов производства в этой точке. Такие линии для поля скоростей являются линиями развития этих факторов, а в случае произвольного векторного поля экономического показателя  $\vec{F}(\vec{r}, t)$  – линией развития этого показателя [5, с. 29-36].

В реальной экономике освоение инвестиций всегда происходит с запаздыванием. Моделирование запаздывания произведем с помощью распределенного лага. При этом предполагаем, что инвестиции, сделанные в момент  $\tau$  в объеме  $\bar{I}(\tau)$ , далее осваиваются постепенно, согласно убывающему экспоненциальному закону. Для объема освоенных инвестиций  $\bar{U}(t)$  имеет место равенство [2, с. 112-113]:

$$\frac{d\bar{U}(t)}{dt} = \rho(\bar{I}(t) - \bar{U}(t)),$$

где  $\rho$  – некоторая константа.

Соответственно, классическое уравнение чистых валовых инвестиций в неоклассической модели роста примет вид:

$$\frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \bar{U}(t). \quad (1)$$

В работе [4, с. 41-42] было доказано утверждение.

*Утверждение 1.* Для любого непрерывного и имеющего первые непрерывные производные внутри и на границах коридора развития векторного экономического показателя, зависящего от факторов производства, имеет место:

$$\int_{\Gamma} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \int_w \left( \frac{\partial F_L}{\partial L} + \frac{\partial F_K}{\partial K} + \frac{\partial F_H}{\partial H} + \frac{v_L}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial F_L}{\partial t} + \frac{v_K}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial F_K}{\partial t} + \frac{v_H}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial F_H}{\partial t} \right) dV, \quad (2)$$

Равенство (2) с использованием понятия динамической дивергенции (*DIV*) для нестационарных величин принимает вид [5, с. 51]:

$$\int_{\Gamma} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \int_w DIV(\bar{F}) dV.$$

Так как это уравнение имеет место для произвольного объема факторов производства  $w$ , то оно должно быть тождественно для всей экономики в целом.

*Утверждение 2.* Для скалярной функции  $\phi(\bar{r}, t)$ , описывающей поведение некоторого скалярного экономического показателя, выделим в области развития ограниченный изменяющийся во времени объем факторов производства  $w$ . Предположим, что функция  $\phi(\bar{r}, t)$  дифференцируема в выделенном объеме и на его границах. Будем считать, что объем  $w$  возникает из объема  $w_0 = w(t_0)$ , где  $t_0$  – начальный момент времени, путем непрерывных изменений элементов  $w_0$  вдоль линий, определяемых вектором скорости обновления факторов производства  $\bar{v}$ . Исходя из этого, имеет место тождество:

$$\frac{d}{dt} \int_w \phi(\bar{r}, t) dV = \int_w \left[ \frac{\partial \phi(\bar{r}, t)}{\partial t} + DIV(\phi \bar{v}) \right] dV, \quad (3)$$

$$\text{где } DIV(\phi \bar{v}) = \frac{v_L}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial(\phi v_L)}{\partial t} + \frac{v_K}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial(\phi v_K)}{\partial t} + \frac{v_H}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial(\phi v_H)}{\partial t} + \frac{\partial(\phi v_L)}{\partial L} + \frac{\partial(\phi v_K)}{\partial K} + \frac{\partial(\phi v_H)}{\partial H}.$$

*Доказательство.* Вычислим производную по подвижному объему в нашем пространстве:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_w \phi(\bar{r}, t) dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_w \phi(\bar{r}, t + \Delta t) dV - \int_w \phi(\bar{r}, t) dV}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_w [\phi(\bar{r}, t + \Delta t) - \phi(\bar{r}, t)] dV + \int_w \phi(\bar{r}, t) dV}{\Delta t} = \\ &= \int_w \frac{\partial \phi(\bar{r}, t)}{\partial t} dV + \int_{\Gamma} \phi(\bar{r}, t) \bar{v} \cdot d\bar{S}. \end{aligned}$$

Объем  $w - w_0$  всегда можно разбить на бесконечно малые объемы и для каждого написать полученное равенство. Если предположить, что объемы так малы, что в них  $|\bar{v}| = const$ , то  $dV = \bar{v} \cdot d\bar{S} \Delta t$ .

Просуммировав по всем объемам и взяв предел при числе разбиений, стремящихся к бесконечности, с объемами, стремящимися к нулю и при  $\Delta t \rightarrow 0$ , поверхность  $\Gamma$  и поверхность  $w - w_0$  начинают совпадать, а функция  $\phi(\bar{r}, t + \Delta t) \rightarrow \phi(\bar{r}, t)$ .

Применив к последнему равенству формулу из Утверждения 1 с  $\bar{F}(\bar{r}, t) = \phi(\bar{r}, t)\bar{v}$ , получим равенство (3).

Рассмотрим некоторый объем изменяющихся факторов производства под действием сил сопротивления экономической среды. Для любого фактора производства  $p$  имеет место равенство:

$$\frac{d}{dt} \int_w p(\bar{r}, t) dV = \int_w \left[ \frac{\partial p(\bar{r}, t)}{\partial t} + DIV(p\bar{v}) \right] dV,$$

где  $p$  – один из факторов производства ( $K, L, H$ ).

Изменение факторов производства обусловлено темпами освоения инвестиций в каждый момент времени, т.е. внутри всего изменяющегося объема факторов, и сопротивлением экономической среды, с которыми, в первую очередь, сталкиваются вновь появляющиеся факторы, «расположенные» на границе изменяющегося объема. Изменение должно быть пропорционально объему этих факторов. Математически это можно представить в виде:

$$\frac{d}{dt} \int_w p(\bar{r}, t) dV = \int_w U_p dV + \int_{\Gamma} p \bar{\sigma}_p \cdot d\bar{S}, \quad (4)$$

где  $\bar{\sigma}_p = (\sigma_{pK}, \sigma_{pL}, \sigma_{pH})$  – противодействия развитию факторов производства со стороны экономической среды.

Первое слагаемое правой части учитывает влияние инвестиций в целом на всю экономику системы, второе – существующее сопротивление экономической среды.

Сопротивление экономической среды приводит к изменению темпа развития факторов производства. Изменение развития происходит для всех факторов, поэтому противодействие необходимо описывать в виде тензора  $\sigma_{pl}$  где  $p, l$  – некоторые факторы производства.

Общее противодействие развитию представляет собой тензор третьего порядка:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{KK} & \sigma_{KL} & \sigma_{KH} \\ \sigma_{LK} & \sigma_{LL} & \sigma_{LH} \\ \sigma_{HK} & \sigma_{HL} & \sigma_{HH} \end{pmatrix}.$$

Тензор  $\sigma_{pl}$  назовем тензором сопротивления экономической среды. Для этого тензора имеет место равенство [5, с. 41-42]:

$$\int_{\Gamma} p \bar{\sigma}_p \cdot d\bar{S} = \int_w DIV(p \bar{\sigma}_p) dV.$$

С учетом последнего выражения равенство (4) примет вид:

$$\int_w \left[ \frac{\partial p(\bar{r}, t)}{\partial t} + DIV(p\bar{v}) \right] dV = \int_w (U_p + DIV(p\bar{\sigma}_p)) dV.$$

Объем факторов производства был выбран произвольным образом, поэтому имеет место равенство:

$$\frac{\partial p(\bar{r}, t)}{\partial t} + DIV(p(\bar{v} - \bar{\sigma}_p)) = U_p. \quad (5)$$

Тензор сопротивления должен зависеть от скорости изменения факторов производства и некоторого коэффициента сопротивления и иметь такую же размерность. Факторы производства у нас равноправные, поэтому тензор должен быть симметричный. Если градиенты скорости обновления факторов производства не очень велики, то можем для описания тензора взять только скорости и первые производные от них. Это предположение является естественным ограничением для всех экономических объектов, нельзя достичь большой скорости развития при малом изменении факторов производства. Составим тензор из линейной комбинации скорости изменения  $v_p$  и  $v_l$  и производных от скорости по факторам производства  $\frac{\partial v_l}{\partial p}$ , размерность которых соответствует темпу изменения и умноженных на некоторый коэффициент сопротивления  $\eta_l(l)$  размерности факторов производства.

Производные высших порядков не включаем в  $\sigma_{pl}$ , так как всегда можно разложить любую функцию в ряд Тейлора и отбросить малые величины. Это самое главное ограничение на пути получения уравнения развития экономики с учетом влияния сопротивления экономической среды.

Такой линейной комбинацией, удовлетворяющей перечисленным требованиям, может быть выражение:

$$\sigma_{pl} = \left( \eta_l(l) \frac{\partial v_l}{\partial p} + \eta_p(p) \frac{\partial v_p}{\partial t} + \gamma_l v_l + \gamma_p v_p \right),$$

где  $\eta_l$ ,  $\eta_p$  – коэффициенты сопротивления, отражающие связь развития факторов  $l$  и  $p$  производства с инвестициями,  $\gamma_p$  и  $\gamma_l$  – коэффициенты пропорциональности. Коэффициенты  $\eta_l$ ,  $\eta_p$  зависят от факторов производства и имеют их размерность,  $\gamma_p$  и  $\gamma_l$  – константы, не имеющие размерности.

Предположим, что сопротивление среды отсутствует, т.е.  $\eta_l(l) = \eta_p(p) = 0$  и экономическая среда однородна, т.е. тензор заменяется вектором  $(2\gamma_K v_K, 2\gamma_L v_L, 2\gamma_H v_H)$ , тогда экономика развивается стабильно. При  $\gamma_K = \gamma_L = \gamma_H = 1/2$  уравнение (5) сводится к классическому уравнению чистых валовых инвестиций в неоклассической модели роста и описывает состояние «идеальной» экономики (1).

В качестве коэффициентов сопротивления экономической среды  $\bar{\eta} = (\eta_K, \eta_L, \eta_H)$  можно взять линейные функции от процентилей значений рейтинга ведения бизнеса (Doing Business) [9], а для компоненты человеческого капитала линейную функцию от индекса развития человеческого потенциала [1]. Попытки моделирования с использованием данных исследования Doing Business проводилось в работе [3, с. 27-28].

Полученную систему (5) назовем системой уравнений развития экономики с тензором сопротивления экономической среды. Это векторное уравнение является разновидностью уравнения Навье-Стокса и отличается от него дополнительными членами.

Проблема существования решения уравнения Навье-Стокса оказалась настолько трудной, что она вошла в список наиболее тяжелых математических проблем XXI столетия [8, с. 12].

Данное дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений. Для выбора единственного решения, соответствующего рассматриваемой задаче, данную систему необходимо дополнить условиями однозначности – математическим описанием частных особенностей конкретной задачи.

Условия однозначности включают:

- геометрические условия, которые описывают объемы факторов производства для каждой конкретной экономической системы;
- экономические условия, служащие для задания экономических свойств среды;
- граничные условия, в которых описывают особенности протекания процессов на границах экономической системы;
- временные условия, которые определяют особенности протекания экономических процессов, изучаемой системы во времени.

Геометрическими условиями являются используемые объемы факторов производства, которые прослеживаются в изучаемом временном интервале. Если временной интервал является полностью или частично прогнозным, то геометрические условия могут быть заданы только приблизительно.

Экономические условия описываются индексами ведения бизнеса и развития человеческого потенциала. Для прогнозных интервалов индексы могут быть просчитаны эконометрическими моделями.

Временные условия задаются известными начальными условиями изучаемой экономической системы. Для прогнозного интервала имеем те же проблемы, что и при ранее рассмотренных условиях.

Полученная система уравнений с некоторыми начальными данными и краевыми условиями, скорее всего, будет некорректной, так как многочисленные попытки доказать корректность ряда задач для уравнения Навье-Стокса (в частности, теоремы существования и единственности в трехмерном случае) оказались безрезультатными.

«В настоящее время появилось большое количество задач, требующих анализа некорректных постановок. Ж. Лере предположил, что причина возникших трудностей кроется не в недостатках существующего математического аппарата, а в фундаментальных свойствах самих уравнений» [6, с. 14]. Примером из таких свойств может быть неединственность решения уравнения Навье-Стокса. Одним из способов преодоления трудностей является

учет малого «шума» и случайных процессов, происходящих в экономике. Но на современном этапе анализа экономических явлений такое усложнение задачи может привести к отрицательному результату.

#### **Список источников**

1. Индекс развития человеческого потенциала – информация об исследовании [электронный ресурс]. – URL: <http://gtmarket.ru/ratings/human-development-index/human-development-index-info>.
2. Колемаев, В.А. Математическая экономика [текст] / В.А. Колемаев. – М.: Юнити – Дана. – 2002. – 399 с.
3. Кузнецов, С.Б. Моделирование обновления факторов производства [текст] / С.Б. Кузнецов // Экономический анализ: теория и практика. – 2010. – № 40. – С. 25 – 31.
4. Кузнецов, С.Б. Моделирование поведения экономических показателей [текст] / С.Б. Кузнецов // Вестник ЧГУ. – 2011. – Вып. 32. – № 16 (231). – С. 41 – 43.
5. Кузнецов, С.Б. Векторный анализ факторов производства [текст] / С.Б. Кузнецов. – LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH&Co. – 2011. – 415 с.
6. Малинецкий, Г.Г. Математические основы синергетики. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент [текст] / Г.Г. Малинецкий. – М.: КомКнига. 2005. – 312 с.
7. Хансен, Э. Экономические циклы и национальный доход [текст] / Э. Хансен. – М.: Директ-Медиа, 2007. – 644 с.
8. Smile, S. Mathematical problems for next century [текст] // S. Smile // Mathematical Intelligencer. – 1998. – V. 20. – P. 7 – 15.
9. World development report 2012 (Doing business) [электронный ресурс]. – URL: <http://www.russian.doingbusiness>.

---

## **MODELING OF INFLUENCE OF THE ECONOMIC ENVIRONMENT ON AGENTS OF PRODUCTION**

---

**Kuznetsov Sergei Borisovich,**

Ph.D. of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Siberian Institute of Management Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration; sbk@ngs.ru

In the article discusses the modeling development of renewable production factors. It is proposed system of differential equations modeling the impact of the economic environment on the factors.

**Keywords:** factors of production, investment, the impact of the economic environment, rating business dealing.

---

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

---

Журнал «Современная экономика: проблемы и решения» принимает к публикации материалы, содержащие результаты оригинальных исследований, оформленных в виде полных статей (до 20 страниц) и кратких сообщений (до 5 страниц).

Опубликованные материалы, а также материалы, представленные для публикации в других журналах, к рассмотрению не принимаются.

Для публикации авторы предоставляют следующие материалы в редакцию журнала (по электронной почте: journal.MEPR@yandex.ru):

1. **Статью**, набранную в текстовом редакторе Microsoft Word и оформленную в соответствии с требованиями: формат А4, шрифт – 14 Times New Roman, интервал – полуторный; поля: левое – 30 мм; верхнее и нижнее – 20 мм; правое – 15 мм.

Не рекомендуется использовать нумерацию страниц и автоматическую расстановку переносов.

Формулы помещаются в текст с использованием редактора формул Microsoft Equation со следующими установками: обычный 14 пт; крупный индекс 9 пт; мелкий индекс 7 пт; крупный символ 18 пт; мелкий символ 12 пт.

Рисунки должны иметь четкое изображение и быть выдержаны, как правило, в черно-белой гамме.

Рисунки и таблицы должны быть пронумерованы и иметь названия; на них должны быть ссылки в тексте.

Таблицы являются частью текста и не должны создаваться как графические объекты.

Обязательным является указание УДК.

Список источников приводится в конце статьи в алфавитном порядке в соответствии с ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления».

Статья должна носить по преимуществу аналитический, а не описательный характер. В ней должен быть четкое отражение авторский подход к решению исследуемой проблемы.

2. **Аннотацию** (2-3 предложения) на русском и английском языках.

3. **Ключевые слова** на русском и английском языках.

4. **Сведения об авторе** (на русском и английском языках): ФИО полностью, ученая степень, ученое звание, место работы, должность, контактный телефон, адрес электронной почты, адрес для пересылки журнала.

Рукописи всех статей, поступивших в журнал, проходят через институт рецензирования. Максимальный срок рецензирования – от даты поступления до вынесения решения – составляет 1 месяц.

**Плата с авторов за рецензирование статей не взимается. Плата за публикацию взимается в случае положительной рецензии.**

**Плата с аспирантов за рецензирование и публикацию статей (без соавторов) не взимается.**

Авторы имеют право использовать все материалы в их последующих публикациях при условии, что будет сделана ссылка на публикацию в журнале «Современная экономика: проблемы и решения».

**Материалы, не соответствующие указанным требованиям, рассматриваться не будут.**