УДК 330.322

НОВЫЙ ПОДХОД К ПРИБЛИЖЕННОМУ РАСЧЕТУ СПРАВЕДЛИВОЙ ЦЕНЫ ОПЦИОНА НА БАЗЕ МОДЕЛИ БЛЭКА-ШОУЛЗА

Хацкевич Владимир Львович,
доктор технических наук, профессор кафедры математики и информатики Института заочного экономического образования Воронежского государственного университета; vlkhats@mail.ru

Предложен новый подход к приближенному решению задачи Блэка-Шоулза, основанный на методе степенных рядов. Получены приближенные формулы для справедливой цены опциона, использующие аппроксимацию краевого условия интерполяционными многочленами Лагранжа. Развитый метод позволяет получить приближенные формулы справедливой цены и в случае переменной процентной ставки и волатильности. В работе рассмотрены европейские опционы на покупку и на продажу, а также модель с дивидендами.

Ключевые слова: модель ценообразования опционов, уравнение Блэка-Шоулза, справедливая цена, метод степенных рядов, интерполяционный многочлен Лагранжа.

Введение. Опционы как важный класс производных финансовых инструментов широко используются на фондовых рынках. Современная теория ценообразования опционов включает два подхода: дискретный и непрерывный по времени. Наша работа базируется на непрерывном механизме ценообразования опционов и развивает некоторые аспекты этого направления.

Опираясь на теорию стохастических процессов, в 1973 г. Ф. Блэк и М. Шоулз [8], а также Р. Мертон [10] вывели фундаментальное уравнение, описывающее процесс непрерывного ценообразования опционов (см., напр., [3] гл. 10)

$$\frac{\partial Y}{\partial t}+rS\frac{\partial Y}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}=rY\ . \qquad (1)$$

Уравнение (1) – это линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Переменные в уравнении (1) имеют следующий смысл: S – стоимость базового финансового актива, t – время, $Y(t, S)$ – стоимость европейского опциона на покупку с моментом T исполнения по цене K, r – процентная ставка, σ – показатель волатильности.

Уравнение (1) в теории ценообразования опционов обычно рассматривается с краевым условием

$$Y(T,S) = \max\{S - K, 0\} \equiv (\mathrm{S}_{\mathrm{T}} - K)^{+}, \qquad (2)$$

характеризующим стоимость опциона к исполнению срока T. Величину $(\mathrm{S}_{\mathrm{T}} - K)^{+}$ иногда называют платежной функцией.

Отметим, что модель (1), (2) предполагает отсутствие налогов и транзакционных издержек, а также отсутствие выплат дивидендов по акциям. Она применима только к европейским опционам-колл (на покупку). Имеются также некоторые другие ограничения ([6] гл. 20).

Решая задачу (1), (2) методом разделения переменных Фурье, указанные авторы (впоследствии нобелевские лауреаты по экономике) получили замечательную формулу:

$$\mathrm{Y}(\mathrm{t,S}) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \qquad (3)$$

носящую имя Блэка-Шоулза. В формуле (3) – нормальная функция распределения, а величины d_1 и d_2 определяются выражениями

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S\sigma}{K} + (T-t)\left(r + \frac{{}^{2}}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\ln\frac{S\sigma}{K} + (T-t)\left(r - \frac{{}^{2}}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \qquad (4)$$

Позднее было установлено, что формулы (3), (4) могут быть получены с помощью предельного перехода из дискретной биноминальной модели Кокса-Росса-Рубинштейна, а также могут быть выведены из соображений, связанных с мартингалами на нейтральном к риску рынке. Кроме того, были получены результаты, распространяющие теорию Блэка-Шоулза на американские опционы и на опционы-пут. Был также рассмотрен случай возможных выплат дивидендов по базовому финансовому активу ([7] гл. VIII). Ниже мы остановимся на классическом варианте модели Блэка-Шоулза, а затем укажем возможные обобщения.

Для подсчета справедливой цены (рациональной стоимости) опциона в формулах (3), (4) полагают $t=0$ и $S=S_0$, где S_0 – стоимость базового финансового актива в момент покупки опциона. Опцион, который продается по более низкой цене, чем справедливая, рекомендуется покупать. В то же время продавцу опциона рекомендуется продавать его по цене не ниже справедливой.

Анализ задачи (1), (2) показывает, что сложность формулы (3), (4) связана с краевым условием (2), характерным для опционов на покупку. С другой стороны, как известно, (см., напр., [6] гл. 21) цена фьючерса с ценой K исполнения и днем поставки T вычисляется момент по формуле

$$X(t,S) = S - Ke^{-r(T-t)}, \qquad (5)$$

где $S = S(t)$ – цена актива, на которую выписан фьючерс, в момент времени t. Нетрудно проверить, что функция $X(t,S)$ удовлетворяет уравнению (1) и краевому условию

$$X(T,S) = S - K. \qquad (6)$$

Для опционов условие (2) превращается в условие (6) в случае, когда в начальный момент $t=0$, цена актива S не меньше цены исполнения опциона K и в дальнейшем при всех $0 \le t \le T$ также выполняется неравенство $S(t) \ge K$. Отметим, что в этом случае цена опциона (5) не зависит от волатильности. Кроме того, формула Блэка-Шоулза превращается в (5) при $\Phi(d_1) = \Phi(d_2) \approx 1$, т.е. когда величины d и d_1 не меньше 5. В частности, это будет справедливо при значениях t достаточно близких к T.

В случае, когда в начальный момент $S \le K$ и в дальнейшем $S(t) \le K$ при всех $t \in [0,T]$ условию (2) соответствует условие $Y(T,S) = 0$. Решение уравнения (1) с этим условием дает тривиальную цену опциона $Y(t,S) = 0$ при $\forall t \in [0,T]$.

1. Приближенное решение задачи (1), (2) методом степенных рядов.

Несмотря на наличие классической формулы Блэка-Шоулза ощущается потребность в сравнительно простых приближенных формулах для справедливой цены опциона.

В [3] гл. 10 рассмотрен вопрос о приближенном решении уравнения (1) при условии (2) (либо другом краевом условии) методом конечных разностей. Нами будет рассмотрен другой подход. Как известно, каждая непрерывная функция (каковой является правая часть (2)) на конечном отрезке изменения аргумента может быть с любой степенью точности аппроксимирована полиномом. Тогда возникает вопрос о решении уравнения (1) с краевым условием в виде полинома

$$Y(T,S) = g(S) = \sum_{j=0}^{n} a_j S^j \,. \qquad (7)$$

В силу специфики уравнения (1) задачу (1), (7) удобно решать с помощью степенных рядов, методом неопределенных коэффициентов. А именно, представим искомое решение задачи (1), (7) в виде степенного ряда по S с переменными коэффициентами

$$Y(t,S) = \sum_{j=0}^{n} f_j(t) S^j \,. \qquad (8)$$

При этом согласно условию (7)

$$f_j(T) = a_j \quad (j = 0,1,\dots,n) \,. \qquad (9)$$

Теорема 1. *Решение задачи (1) в случае, когда краевое условие имеет вид (7), дается формулой:*

$$Y(t,S) = a_0 e^{r(t-T)} + a_1 S + \sum_{j=2}^{n} e^{\gamma_j (T-t)} a_j S^j \,,$$

где $\gamma_j = (j-1)\left(r + \frac{1}{2} y^2 j\right)$.

Доказательство состоит в отыскании функций $\mathrm{f_j(t)}$. Для этого выражение (7) следует подставить в (1) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях S. Затем решаются полученные дифференциальные уравнения относительно функций $\mathrm{f_j(t)}$. При этом учитываются условия (9).

Более подробные рассуждения приведены в работе автора [5].

Следствие 1. В случае $Y(T,S) = S - K$ по теореме 1 получим решение вида

$Y(t,S)=S-Ke^{-r(T-t)}$, указанное выше как решение задачи о стоимости фьючерса.

Следствие 2. В случае $Y(T,S)=S^n$ по теореме 1, получим решение вида $Y(t,S)=e^{(n-1)\left(r+\frac{n}{2}y^2\right)(T-t)}S^n\ \ (0\le t\le T)$, приведенное в книге [9].

Отметим, что подход, примененный в теореме 1 позволяет рассматривать также случай переменной процентной ставки $r(t)$ и волатильности $\sigma(t)$. А именно, имеет место

Теорема 2. *В случае переменной процентной ставки* $r(t)$ *и волатильности* $\sigma(t)$ *решение задачи (1), (7) имеет вид:*

$$Y(t,S)=a_0e^{-\int_t r(\tau)d\tau}+a_1S+\sum_{j=2}^{n}e^{(j-1)\int_t^T\lambda_j(\tau)d\tau}a_j\mathrm{S}^{\mathrm{j}},$$

где $\lambda_j(\tau)=r(\tau)+\frac{1}{2}\sigma^2 j$.

Следствие 3. Пусть правая часть $g(S)$ краевого условия (7) может быть представлена в виде степенного ряда, так что

$$Y(T,S)=g(S)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jS^j\ . \qquad (10)$$

Тогда решение задачи (1), (10) также имеет вид степенного ряда, соответствующего либо теореме 1, либо теореме 2.

2. Применение интерполяционных многочленов Лагранжа.

Представление краевой функции $g(S)$ в виде степенного ряда Маклорена возможно для аналитической функции $g(S)$. В случае небольшой гладкости (в частности, непрерывности или кусочной непрерывности) $g(S)$ целесообразно приближать эту функцию интерполяционными полиномами Лагранжа [1].

Для функции $g(S)$, задаваемой равенством (2), т.е. $g(S)=\max\{S-K,0\}$ интерполяционный полином Лагранжа, построенный по трем точкам $S_1=0,5K$, $S_2=K$, $S_3=1,5K$, имеет вид

$$I(S)=K-1,5S+\frac{1}{K}S^2\approx g(S). \qquad (11)$$

Эта формула выведена в работе автора [4]. В соответствии с теоремой 1 и формулой (11) имеет место

Следствие 4. Приближенное решение задачи (1), (2) имеет вид

$$Y(t,S)\approx Ke^{r(t-T)}-1,5S+\frac{S^2}{K}e^{(r+\sigma^2)(T-t)}.$$

Если мы хотим получить более точную формулу, то можно взять, например, пять точек $S_1=0,5K$, $S_2=0,75K$, $S_3=K$, $S_4=1,25K$, $S_5=1,5K$.

С помощью следствия 4 получается

Следствие 5. Справедливая цена европейского опциона на покупку приближенно равна

$$Y(0,S_0)\approx Ke^{-rT}-1,5S_0+\frac{S_0^2}{K}e^{(r+\sigma^2)T}.$$

Следствие 5 можно использовать для анализа зависимости справедливой цены опциона от различных факторов. Для этого вычисляются частные производные функции *Y*. Из соответствующих выражений видно, что при достаточно больших $T > 0$ имеем $\frac{\partial Y}{\partial S_0} > 0, \frac{\partial Y}{\partial K} < 0, \frac{\partial Y}{\partial \mathrm{r}} > 0, \frac{\partial Y}{\partial \sigma^2} > 0, \frac{\partial Y}{\partial T} > 0$. Это подтверждает известные выводы (см. [6] гл. 20) о том, что с ростом S_0 растет стоимость европейского опциона-колл, с ростом цены исполнения K уменьшается стоимость опциона, с ростом процентной ставки – увеличивается, с ростом риска r – увеличивается, с ростом T – увеличивается.

Полученные формулы производных можно применять для приближенного подсчета эластичности справедливой цены опциона по различным факторам, от которых она зависит.

В работе автора [5] продемонстрирован другой подход к решению задачи (1), (2), опирающийся на приближении функции $g(S)$ с помощью системы ортогональных полиномов Лежандра $\mathrm{P_m}$. Сформулируем результат, вытекающий из [5], как следствие теоремы 1.

Следствие 6. Справедливая цена европейского опциона на покупку приближенно равна

$$Y(0, S_0) \approx -\frac{9}{16} K e^{-rT} + \frac{23}{16} S_0 - \frac{15}{16} e^{(r+\sigma^2)T} S_0^2 \cdot$$

Формулы следствий 5 и 6, так же как формула Блэка-Шоулза (3) относятся к случаю постоянной процентной ставки r и волатильности σ. Теорема 2 позволяет привести приближенную формулу справедливой цены и для случая переменной процентной ставки и волатильности. А именно, из теоремы 2 и формулы (11) вытекает

Теорема 3. *Приближенная справедливая цена европейского опциона на покупку в случае переменной процентной ставки r(t) и волатильности* $\sigma(t)$ имеет вид:

$$Y(0, S_0) \approx \mathrm{K} e^{-\int_0^T r(\tau) d\tau} - 1{,}5 S_0 + \frac{S_0^2}{K} \mathrm{e}^{-\int_0^T (r(\tau) + \sigma^2(\tau)) d\tau}.$$

3. Случай европейских опционов-пут (на продажу)

Пусть P_T – рациональная стоимость стандартного опциона-пут (на продажу) европейского вида с платежной функцией $(K - S_T)^+$. Как известно (см., напр., [6] гл. 20) имеет место паритет европейских опционов-пут и -колл.

$$P_T = C_T - S_0 + K e^{-rT}. \tag{12}$$

Здесь $C_T = Y(0, S_0)$ – решение задачи (1), (2) при $t = 0$ и $S = S_0$, т.е. рациональная стоимость (справедливая цена) европейского опциона-колл с платежной функцией $(S_T - K)^+$.

Из формулы (12), используя следствие 5, получим

Следствие 7. Приближенная рациональная стоимость европейского опциона-пут характеризуется формулой

$$P_T = 2K e^{-rT} - 2{,}5 S_0 + \frac{S_0^2}{K} e^{(r+\sigma^2)T}.$$

Рассмотрим случай выплат дивидендов от обладания акцией. Как известно (см., напр., [7] гл.8 §1), рациональная стоимость опциона-колл $C_T(\delta, r)$ и опциона-пут $P_T(\delta, r)$ европейского типа при наличии дивидендов от акции задаются формулами:

$$C_T(\delta, r) = e^{-\delta T} C_T(0, r-\delta)$$

и соответственно

$$P_T(\delta, r) = e^{-\delta T} P_T(0, r-\delta).$$

Здесь $\delta \geq 0$ – параметр, характеризующий интенсивность выплат дивидендов, а величины $C_T(0, r-\delta)$ и $P_T(0, r-\delta)$ обозначают соответствующие справедливые цены в случае отсутствия дивидендов с заменой r на $(r-\delta)$.

Используя следствие 5, отсюда получим

Следствие 8. Рациональная цена европейского опциона-колл при наличии дивиденда от акций, характеризующихся интенсивностью выплат $\delta \geq 0$, приближенно равно:

$$C_T(\delta, r) \approx Ke^{-rT} - 1,5e^{-\delta T} S_0 + \frac{S_0^2}{K} e^{(r-2\delta+\sigma^2)T}.$$

Аналогично с помощью следствия 7 можно указать приближенную формулу для рациональной стоимости европейского опциона-пут.

4. Заключение.

В настоящей работе приведены приближенные формулы справедливой цена европейских опционов. Они выведены на базе подхода к решению уравнения Блэка-Шоулза (1) с помощью степенных рядов с переменными коэффициентами. Предлагаемый подход оказался удачным в связи со спецификой уравнения (1).

Интересным, на взгляд автора, является факт, что развитый метод позволяет получить приближенные формулы справедливой цены опциона также в случае переменной процентной ставки и переменной волатильности. Формулы для переменной процентной ставки и волатильности могут быть выведены с использованием эконометрических методов по данным предыдущих периодов.

Рассмотрены европейские опционы на покупку и на продажу, а также модель с дивидендами.

Для аппроксимации краевых условий полиномами в работе продемонстрированы два варианта, основанных на интерполяционных многочленах Лагранжа и ортогональных полиномах Лежандра соответственно.

Кроме практических подсчетов справедливой цены опциона выведенные в работе формулы в силу своей простоты позволяют проводить качественный анализ зависимости справедливой цены опциона от различных факторов.

Полученные в работе результаты могут быть развиты в нескольких направлениях:

- могут быть рассмотрены другие краевые условия;
- на базе продемонстрированного подхода интересно было бы рассмотреть американские опционы.

Список источников

1. Основы вычислительной математики [текст] / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
2. Олвер, Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции [текст] / Ф. Олвер. – М.: Мир, 1986. – 381 с.
3. Уотшем, Т. Дж. Количественные методы в финансах [текст] / Т. Дж. Уотшем, К. Паррамоу. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999. – 527 с.
4. Хацкевич, В.Л. Приближенный анализ справедливой цены опциона на основе уравнения Блэка-Шоулза [текст] / В.Л. Хацкевич // Современная экономика: проблемы и решения. – Воронеж: ВГУ, 2012. – № 5 (29). – С. 159 – 166.
5. Хацкевич, В.Л. Решение уравнения Блэка-Шоулза, описывающего формирование цен на опционы, и некоторые свойства полиномов Лежандра [текст] / В.Л. Хацкевич // Системы управления и информационные технологии. – Воронеж: Научная книга, 2012. – №3 (49). – С.28 – 32.
6. Шарп, У. Инвестиции [текст] / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 1028 с.
7. Ширяев, А.Н. Основы стохастической финансовой математики [текст] / А.Н. Ширяев. – М.: ФАЗИС, 1998. – Т. 2. – 1011 с.
8. Black, F. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. – «Journal of Political Economy» [текст] / F. Black, M. Scholes. – May, 1973. – Pp. 637 – 654.
9. Hull, J. Options, Futures, and Other Derevatives [текст] / J. Hull. – Prentice Hall, 2002.
10. Merton, R.C. Theory of Rational Option Pricing [текст] / R.C. Merton // Bell Journal of Economics and Management Science. – 1973. – № 1. – Pp. 141 – 183.

NEW APPROACH TO APPROXIMATE CALCULATION OF THE FAIR PRICE OPTION, BASED ON BLACK-SHOLES MODEL

Khatskevich Vladimir Lvovich,
Dr. Sc. in engineering, Professor of the Chair of Mathematics and informatics of Institute of the correspondence economic education, Voronezh State University; vlkhats@mail.ru

New approach to the approximate solution of Black-Scholes task, based on a method of power series is offered. Approximate formulas for the fair price option, using approximation of a regional condition by interpolation polynomials Lagrange are received. The developed method allows receiving approximate formulas of the fair price and in case of a variable interest rate and volatility. In work the European options for purchase and for sale, and also model with dividends are considered.
Keywords: option pricing model, Black-Scholes equation, fair price, method of power series, interpolation polynomial Lagrange.