УДК 339.138

ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕКЛАМНОГО БЮДЖЕТА ФИРМЫ

Першин Максим Андреевич,
аспирант кафедры статистических методов Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;
p0844_pm@mail.ru

В работе формулируется в общем виде задача оптимального управления рекламными расходами фирмы в непрерывном времени без ограничения терминального объема продаж. Динамика модели задается дифференциальным уравнением, описывающим изменение объема продаж фирмы. Приводятся две спецификации общей задачи оптимального управления, основанные на рекламной модели Видала – Вольфа и модифицированной модели Видала – Вольфа, с решением.
Ключевые слова: оптимизация, рекламные расходы, задача оптимального управления, принцип максимума, модель Видала – Вольфа, модифицированная модель Видала – Вольфа.

Введение

Одним из инструментов, имеющихся в распоряжении фирмы для стимулирования и поддержания продаж своей продукции, является реклама. При разработке рекламной кампании любая фирма среди прочих вопросов сталкивается с проблемой определения рекламного бюджета. Востребованность в разрешении этой проблемы нарастает по мере развития конкуренции на рынке и необходимости оптимизации фирмой своих расходов для успешной деятельности в насыщенной конкурентной среде. Чрезмерное расходование средств на рекламу повысит коммерческие издержки фирмы, недофинансирование рекламной кампании может привести к потере потребительской аудитории, что, как показывает практика, повлечет еще более негативные финансовые результаты. Особенную актуальность эти вопросы приобретают во время экономических кризисов, когда, с одной стороны, фирме приходится, насколько это возможно, сокращать свои расходы, с другой стороны – «бороться» за потребителей. Этим определена актуальность исследования математических моделей, позволяющих построить оптимальную рекламную стратегию фирмы в целях стимулирования и поддержания продаж ее продукции в условиях ограниченного бюджета, чему посвящена настоящая работа.

Вопросами определения оптимального рекламного бюджета с применением достижений теории оптимального управления занимались такие зарубежные ученые, как С. Сети [9, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28], внесший наиболее значительный вклад в развитие данного направления, Б. Висколани [32], К. Дил [13], С. Йоргенсен [17, 18, 19], М. Нерлов [22], А. Прасад [9, 23], Г. Соргер [30], Дж. Фейхтингер [16], Р. Хартл [16], П. Чинтагунта [10, 11, 12], Дж. Эриксон [14, 15], К. Эрроу [22] и др. Среди российских исследователей данной проблематикой занимались Е.В. Астафьева [1], И.П. Бородина [5], А.Ф. Терпугов [2, 3] и др.

Формулировка оптимизационной задачи в общем виде

В общем виде динамическую детерминированную оптимизационную модель определения рекламных расходов при отсутствии ограничения на терминальный объем продаж можно сформулировать следующим образом:

$$\int_0^T F(x(t),u(t))dt \to \sup_{u(t)\in[0;U]}, \tag{1}$$

$$\dot{x} = f(x(t),u(t)),\ x(0)=x_0, \tag{2}$$

$$x(t)\geq 0, \tag{3}$$

$$u(t)\in[0,U], \tag{4}$$

где T – горизонт планирования, $x(t)$ – продажи в момент t, x_0 – продажи в начальный момент времени, $u(t)$ – расходы на рекламу в момент t, U – максимальный размер средств, которые могут быть направлены на рекламу в момент t.

Функционал (1) представляет собой критерий оптимизации, который представляет приведенную на начальный момент времени прибыль фирмы от реализации своей продукции за вычетом рекламных расходов. Дифференциальное уравнение (2) характеризует динамику изменения продаж фирмы под влиянием рекламы при заданном начальном объеме продаж. Ввиду естественных предположений о стимулирующем влиянии рекламы на объем продаж и постепенном снижении силы этого влияния по мере роста рекламных расходов можно ожидать, что $\frac{\partial f}{\partial u}\geq 0$ и $f''_{uu}\leq 0$. Ограничение (3) накладывает требование неотрицательности объема продаж. Ограничение рекламных расходов устанавливается в (4).

В рамках модели предполагается, что фирма производит ровно столько продукции, сколько приобретается потребителями, то есть отсутствуют излишки продукции, которые не приносят выручки и увеличивают расходы, связанные с их хранением, а спрос определяется только двумя переменными – текущим объемом продаж и рекламными расходами.

Параметры модели могут быть как фиксированными, так и изменяться во времени. Поскольку в случае меняющихся со временем параметров модели для ее решения необходимо определение функции их изменения, то для простоты решения будем полагать параметры и ограничение рекламного бюджета постоянными на всем горизонте T. В случае введения параметров, зависящих от времени, методология решения не изменится, но возрастет сложность решения, связанная с вычислениями.

Модель Видала – Вольфа

Американскими исследователями М. Видалем и Х. Вольфом [31] предложена следующая модель изменения продаж под воздействием рекламы:

$$\dot{x} = \alpha u(t)\frac{(M - x(t))}{M} - \delta x(t), \tag{5}$$

где $x(t)$ – объем продаж, $u(t)$ – расходы на рекламу, $\alpha>0$ – коэффициент, характеризующий влияние рекламных расходов на продажи, $\delta \in [0;1]$ – коэффициент, характеризующий естественное снижение продаж вследствие «забвения» потребителями торговой марки фирмы, M – максимальный объем рынка, на котором реализуется продукция фирмы.

В основу модели (5) положены следующие предположения:

1) продажи возрастают по мере увеличения рекламных расходов;

2) эффект влияния увеличения рекламных расходов на рост объема продаж уменьшается по мере того, как продажи достигают уровня насыщения M у потребителей;

3) продажи снижаются при недостаточном уровне рекламы.

Предположим, что влияние рекламных расходов на изменение объема продаж не линейно, а пропорционально квадратному корню. При таком характере влияния рекламных расходов на объем продаж прирост положительного эффекта влияния рекламных расходов на изменение объема продаж будет уменьшаться по мере увеличения этих расходов, что связано с эффектом насыщения рекламными расходами. В литературе схожий подход к влиянию рекламных расходов на изменение объема продаж можно найти в работах С. Сети [21, 28] и Г. Соргера [30].

Тогда оптимизационная модель может быть представлена в виде задачи оптимального управления:

$$\begin{gathered}\int_0^T \frac{\left((p-c)x(t) - u^2(t)\right)}{e^{rt}}dt \to \sup_{u(t)\in[0;\sqrt{U}]}, \\ \dot{x} = \alpha u(t)\frac{(M - x(t))}{M} - \delta x(t),\ x(0) = x_0, \\ x(t) \geq 0,\ u(t) \in \left[0;\sqrt{U}\right],\end{gathered} \tag{6}$$

где $u^2(t)$ – расходы на рекламу, $u(t)$ – рекламное воздействие на изменение объема продаж при рекламных расходах $u^2(t)$, $p>0$ – цена единицы продукции, $c>0$ – переменные издержки, связанные с производством единицы продукции, r – ставка дисконтирования.

В целях упрощения записи задачи (6) произведем следующие замены:

$$s = \frac{x}{M},\ a = \frac{\alpha}{M},\ \pi = (p-c)M, \tag{7}$$

где s – доля рынка, занятая продукцией фирмы, $s(t) \in [0;1]$.

Тогда задачу (6) можно представить в следующем виде:

$$\int_0^T \frac{\left(\pi s(t)-u^2(t)\right)}{e^{rt}}dt \to \sup_{u(t)\in[0;\sqrt{U}]},$$

$$\dot{s} = au(t)(1-s(t)) - \delta s(t),\ s(0)=s_0, \tag{8}$$

$$s(t)\in[0;1],\ u(t)\in\left[0;\sqrt{U}\right].$$

Задачу оптимального управления (8) можно решить с помощью принципа максимума [7, 20, 29, 33]. В целях решения задачи оптимального управления (8) запишем гамильтониан

$$H(\lambda,t,x^*,u^*) = \max_{u\in[0;\sqrt{U}]}\left((\pi s-u^2)e^{-rt}+\lambda(au(1-s)-\delta s)\right). \tag{9}$$

Поскольку гамильтониан (9) вогнут по s и по u, то необходимые условия оптимальности, согласно принципу максимума, становятся достаточными.

Из (9) оптимальный объем рекламного воздействия на изменение объема продаж

$$u^* = \begin{cases} 0,\ если\ \dfrac{\lambda a(1-s)e^{rt}}{2}<0; \\ \dfrac{\lambda a(1-s)e^{rt}}{2},\ если\ \dfrac{\lambda a(1-s)e^{rt}}{2}\in\left[0;\sqrt{U}\right]; \\ \sqrt{U},\ если\ \dfrac{\lambda a(1-s)e^{rt}}{2}>\sqrt{U}, \end{cases} \tag{10}$$

при оптимальном объеме рекламных расходов u^{*2}.

Доля продаж фирмы s и сопряженная переменная λ, от которых зависит оптимальный объем рекламного воздействия в (10), определяются системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{s} = \dfrac{a^2\lambda(1-s)^2e^{rt}}{2} - \delta s,\ s(0)=s_0, & (11) \\ \dot{\lambda} = -\pi e^{-rt} + \lambda\left(\dfrac{a^2\lambda(1-s)e^{rt}}{2}+\delta\right),\ \lambda(T)=0. & (12) \end{cases}$$

Решение системы (11)-(12) возможно осуществить с помощью численных методов [2, 6].

Найдем в явном виде стационарное решение задачи (8). Стационарные доля продаж фирмы $\bar{s}$ и сопряженная переменная $\bar{\lambda}$ определяются из системы уравнений (13)-(14):

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{a^2\lambda(1-s)^2e^{rt}}{2} - \delta s, & (13) \\ 0 = -\pi e^{-rt} + \lambda\left(\dfrac{a^2\lambda(1-s)e^{rt}}{2}+\delta\right). & (14) \end{cases}$$

Из (13) выражаем сопряженную переменную через долю продаж $\lambda = \dfrac{2\delta s}{a^2(1-s)^2e^{rt}}$, подставляем ее в (14) и после тривиальных преобразований получаем уравнение 3-й степени относительно (1-s)

$$(1-s)^3 + \frac{2\delta^2}{\pi a^2}(1-s) - \frac{2\delta^2}{\pi a^2} = 0. \tag{15}$$

Уравнение (15) имеет единственный корень, который можно найти по формуле Кардано [8]:

$$\bar{s}=1-\left(\sqrt[3]{\frac{\delta^2}{\pi a^2}+\sqrt{\frac{\delta^4}{\pi^2 a^4}+\frac{8}{27}\frac{\delta^6}{\pi^3 a^6}}}+\sqrt[3]{\frac{\delta^2}{\pi a^2}-\sqrt{\frac{\delta^4}{\pi^2 a^4}+\frac{8}{27}\frac{\delta^6}{\pi^3 a^6}}}\right), \tag{16}$$

при этом $\bar{s}\in[0;1]$.

Тогда оптимальный стационарный объем рекламных расходов определяется по формуле (17):

$$\bar{u}^2=\begin{cases} 0,\text{ если } \dfrac{\delta\bar{s}}{a(1-\bar{s})}<0; \\ \left(\dfrac{\delta\bar{s}}{a(1-\bar{s})}\right)^2,\text{ если } \dfrac{\delta\bar{s}}{a(1-\bar{s})}\in\left[0;\sqrt{U}\right]; \\ U,\text{ если } \dfrac{\delta\bar{s}}{a(1-\bar{s})}>\sqrt{U}. \end{cases} \tag{17}$$

Оптимальная стационарная доля рынка, описанная формулой (16), существует, если управление $\bar{u}^2=\left(\dfrac{g\bar{s}}{a(1-\bar{s})}\right)^2$ достижимо. При $\bar{u}^2=0$ или $\bar{u}^2=U$ оптимальная стационарная доля рынка $\bar{s}=\dfrac{a\bar{u}}{a\bar{u}+g}$.

Из (17) следует, что, чем больше стационарная доля рынка, занятая фирмой, тем выше ее стационарный объем рекламных расходов. Это связано с необходимостью фирме поддерживать свое присутствие на рынке в соответствии с оптимальной стационарной долей $\bar{s}$, которая определяется прибыльностью производства и реализации продукции π, эффективностью рекламы а и коэффициентом забвения потребителями продукции фирмы δ. При $\delta\neq 0$ нет такой политики управления рекламными расходами, при применении которой фирме удалось бы занять своей продукцией весь рынок на долгосрочную перспективу. При $\delta=0$ в долгосрочной перспективе продукция фирмы займет весь рынок, и фирме не придется ничего тратить на рекламу в целях поддержки своего присутствия на рынке ввиду высокой толерантности потребителей к ее продукции.

Стационарная оптимальная доля рынка $\bar{s}$ увеличивается при увеличении значений параметров α, характеризующего эффективность рекламных расходов на изменение продаж, и π, характеризующего прибыльность продаж, уменьшается при увеличении параметра δ, характеризующего снижение продаж со временем. Стационарный оптимальный объем рекламных расходов $\bar{u}^2$ увеличивается при увеличении значения параметра π и уменьшается при увеличении значения параметра δ. При увеличении значения параметра α до определенного уровня рекламные расходы $\bar{u}^2$ растут, при дальнейшем увеличении α рекламные расходы $\bar{u}^2$ снижаются.

Оптимальный объем рекламных расходов $u^{*2}(t)$ и соответствующий объем продаж $x^*(t)$ (рассчитаны с помощью метода Эйлера с шагом 0,0001 [2, 6]) при $M=50\ 000$ и $\dot{M}=0$ на всем горизонте планирования $T=5$ и прочих параметрах модели $p=25,\ c=15,\ r=0{,}06,\ \delta=0{,}7,\ \alpha=1{,}5,\ U=200\ 000,\ x_0=0$ представлены на рис. 1. При данных параметрах оптимальное стационарное решение $\bar{u}^2=114{,}59$ и $\bar{x}=22{,}93$.

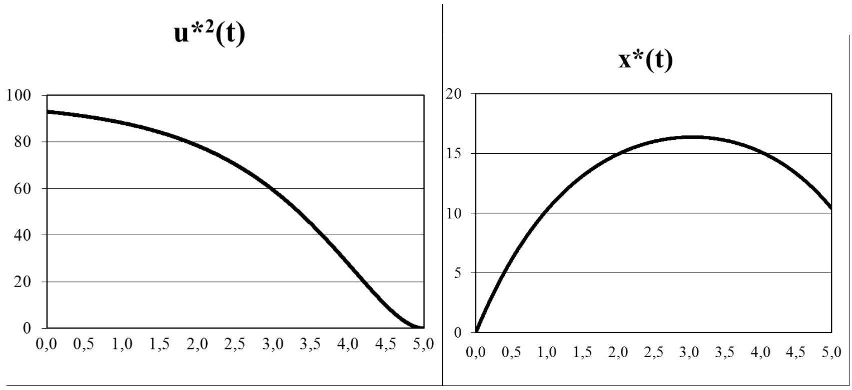

Рис. 1. Графики оптимального решения задачи (6)
при заданных параметрах

Модифицированная модель Видала – Вольфа

Развивая модель Видала – Вольфа, С. Сети [21, 23, 27, 28] предположил, что изменение продаж под воздействием рекламных расходов описывается следующим образом:

$$\dot{x} = \alpha u(t)\sqrt{\frac{(M - x(t)}{M}} - \delta x(t) \cdot \tag{18}$$

С учетом замен (7) задача оптимального управления

$$\int_0^T \frac{\left(\pi s(t) - u^2(t)\right)}{e^{rt}} dt \to \sup_{u(t)\in[0;\sqrt{U}]},$$

$$\dot{s} = au(t)\sqrt{1 - s(t)} - \delta s(t),\ s(0) = s_0, \tag{19}$$

$$s(t) \in [0;1],\ u(t) \in \left[0;\sqrt{U}\right].$$

В дифференциальном уравнении (18) $\sqrt{\frac{(M-x(t)}{M}}$, или $\sqrt{1-s(t)}$, на интервале $s(t)\in[0;1]$ можно представить как $\sqrt{1-s(t)} \approx 1 - s^2(t)$ или $\sqrt{1-s(t)} \approx (1-s(t)) + s(t)(1-s(t))$, где $(1-s(t))$ характеризует эффект снижения эффективности рекламных расходов при насыщении рынка, $s(t)(1-s(t))$ характеризует распространение информации о продукции фирмы среди потребителей продукции фирмы, или «диффузию» информации о продукции фирмы между уже купившими и теми, кто мог бы ее приобрести (так называемое «сарафанного радио») [30].

Задача оптимального управления (19), как и задача (8), решается с помощью принципа максимума [7, 20, 29, 33]. Для решения задачи (19) запишем гамильтониан

$$H(\lambda, t, x^*, u^*) = \max_{u\in[0;\sqrt{U}]}\left((\pi s - u^2)e^{-rt} + \lambda(au\sqrt{1-s} - \delta s)\right). \tag{20}$$

Поскольку гамильтониан (20) вогнут по s и по u, то необходимые условия оптимальности, согласно принципу максимума, становятся достаточными. Из (20) можно выразить оптимальный объем рекламного воздействия на изменение объема продаж

$$u^*=\begin{cases}0,\, если\, \dfrac{\lambda a\sqrt{1-s}e^{rt}}{2}<0;\\ \dfrac{\lambda a\sqrt{1-s}e^{rt}}{2},\, если\, \dfrac{\lambda a\sqrt{1-s}e^{rt}}{2}\in\left[0;\sqrt{U}\right];\\ \sqrt{U},\, если\, \dfrac{\lambda a\sqrt{1-s}e^{rt}}{2}>\sqrt{U},\end{cases} \tag{21}$$

при оптимальном объеме рекламных расходов u^{*2}.

Доля продаж фирмы s и сопряженная переменная λ, от которых зависит оптимальный объем рекламного воздействия в (21), определяются системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dot{s}=\dfrac{a^2\lambda(1-s)e^{rt}}{2}-\delta s,\quad s(0)=s_0, & (22)\\ \dot{\lambda}=-\pi e^{-rt}+\lambda\left(\dfrac{a^2\lambda e^{rt}}{4}+\delta\right),\quad \lambda(T)=0. & (23)\end{cases}$$

Решение системы (22) – (23) возможно осуществить с помощью численных методов [2, 6].

Найдем стационарное решение задачи (19). Стационарные доля продаж фирмы $\bar{s}$ и сопряженная переменная $\bar{\lambda}$ определяются из системы уравнений (24) – (25):

$$\begin{cases}0=\dfrac{a^2\lambda(1-s)e^{rt}}{2}-\delta s, & (24)\\ 0=-\pi e^{-rt}+\lambda\left(\dfrac{a^2\lambda e^{rt}}{4}+\delta\right). & (25)\end{cases}$$

Из (24) выражаем сопряженную переменную через долю продаж $\lambda=\dfrac{2\delta s}{a^2(1-s)e^{rt}}$, подставляем ее в (25) и после тривиальных преобразований получаем уравнение 2-й степени относительно (1-s)

$$\pi a^2(1-s)^2+\delta^2(1-s)-\delta^2=0,$$

корни которого $(1-s)=\dfrac{-\delta^2\pm\sqrt{\delta^4+4\pi a^2\delta^2}}{2\pi a^2}$. Поскольку в отношении доли продаж должно выполняться ограничение $s(t)\in[0;1]$, оптимальная стационарная доля продаж фирмы в общем объеме рынка определяется по формуле (26):

$$\bar{s}=1+\frac{\delta^2-\sqrt{\delta^4+4\pi a^2\delta^2}}{2\pi a^2}. \tag{26}$$

Оптимальный стационарный объем рекламных расходов определяется по формуле (27):

$$\bar{u}^2=\begin{cases}0,\, если\, \dfrac{\delta\bar{s}}{a\sqrt{1-\bar{s}}}<0;\\ \left(\dfrac{\delta\bar{s}}{a\sqrt{1-\bar{s}}}\right)^2,\, если\, \dfrac{\delta\bar{s}}{a\sqrt{1-\bar{s}}}\in\left[0;\sqrt{U}\right];\\ U,\, если\, \dfrac{\delta\bar{s}}{a\sqrt{1-\bar{s}}}>\sqrt{U}.\end{cases} \tag{27}$$

При $\bar{u}^2=0$ или $\bar{u}^2=U$ оптимальная стационарная доля рынка определяется из уравнения $0=a\bar{u}\sqrt{1-\bar{s}}-\delta\bar{s}$.

Отметим, что стационарный оптимальный объем рекламных расходов $\bar{u}^2$ модели (19), как и в модели (8), прямо пропорционален стационарной оптимальной доле рынка $\bar{s}$, занимаемой продукцией фирмы, за исключением случая при $\delta = 0$, когда $\bar{s} = 1$ и $\bar{u}^2 = 0$.

Стационарная оптимальная доля рынка $\bar{s}$ увеличивается при увеличении значений параметров α, характеризующих эффективность рекламных расходов на изменение продаж, и π, характеризующего прибыльность продаж, уменьшается при увеличении параметра δ, характеризующего снижение продаж со временем. Стационарный оптимальный объем рекламных расходов $\bar{u}^2$ увеличивается при увеличении значения параметра п и уменьшается при увеличении значения параметра δ. При увеличении значения параметра α до определенного уровня рекламные расходы $\bar{u}^2$ растут, при дальнейшем увеличении α рекламные расходы $\bar{u}^2$ снижаются. Это обусловлено тем, что с определенного значения эффективность рекламных расходов становится такой высокой, что становится возможным добиться необходимого рекламного воздействия на продажи фирмы меньшими тратами на рекламу.

Оптимальный объем рекламных расходов $u^*2(t)$ и соответствующий объем продаж $x^*(t)$ (рассчитаны с помощью метода Эйлера с шагом 0,0001 [2, 6]) при $M=50\ 000$ и $\dot{M} = 0$ на всем горизонте планирования $T=5$ и прочих параметрах модели $p=25,\ c=15,\ r=0{,}06,\ \delta=0{,}7,\ \alpha=1{,}5,\ U=200\ 000,\ x_0=0,$ представлены на рис. 2. При данных параметрах оптимальное стационарное решение $\bar{u}^2 = 457{,}92$ и $\bar{x} = 45{,}83$.

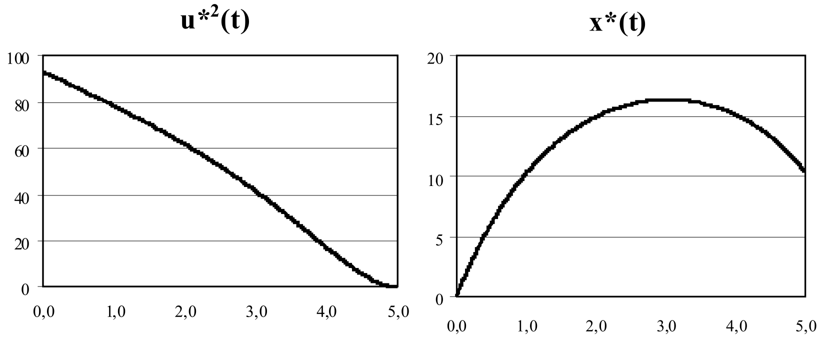

Рис. 2. Графики оптимального решения задачи (19)
при заданных параметрах

Выводы

В работе рассмотрены две задачи определения оптимального рекламного бюджета, в основе которых лежат рекламная модель Видала – Вольфа и ее модификация, предложенная С. Сети. Хотя решение данных задач находится численными методами, в явном виде удалось получить стационарное решение, к которому решение асимптотически стремится при $T \to \infty$. Важным достоинством рассмотренных задач является наличие обратной связи между объемом продаж и рекламными расходами, а также «нерелейность» управления.

Изложенный в работе подход к определению рекламных расходов мог бы применяться крупными и средними предприятиями при планировании своей рекламной кампании. Несмотря на то, что полученное при применении данного подхода решение является оптимальным, его применение на практике затруднено следующими проблемами:

1) необходимость оценки параметров модели на горизонте T, что может быть весьма затруднительным на практике и в случае ошибки привести к неверным результатам;

2) условия, описываемые параметрами модели, могут меняться в течение горизонта T, а решение по рекламному бюджету необходимо принять на начальный момент времени.

Тем не менее указанные проблемы преодолимы путем повышения качества как самих моделей, так и методов определения их параметров. В качестве направлений повышения качества моделей можно указать построение стохастических моделей, а также привлечение теории игр для случаев, когда на рынке есть несколько крупных участников, значительно влияющих на решения друг друга. Повышение качества оценок параметров модели целесообразно осуществлять посредством задействования статистических и эконометрических методов.

Список источников

1. Астафьева, Е.В. Математическая модель влияния рекламы на деятельность фирмы, производящей однородную продукцию: дис. канд. физ.-мат. наук [текст] / Е.В. Астафьева. – Томск, 2006. – 108 с.
2. Ахмедова, Д.Д. Математическая модель функционирования страховой компании с учетом расходов на рекламу [текст] / Д.Д. Ахмедова, А.Ф. Терпугов // Изв. вузов. Физика. – 2001. – № 1. – С. 25 – 29.
3. Ахмедова, Д.Д. Оптимизация деятельности страховой компании с учетом расходов на рекламу [текст] / Д.Д. Ахмедова, О.А. Змеев, А.Ф. Терпугов // Вестник Томского государственного университета. – Томск: Том. ун-т, 2002. – № 275. – С. 181 – 185.
4. Бабенко, К.И. Основы численного анализа [текст] / К.И. Бабенко. – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 848 с.
5. Бородина, И.П. Разработка и анализ систем управления рекламными коммуникациями фирмы на потребительском рынке: дис. … канд. тех. наук [текст] / И.П. Бородина. – Таганрог, 2005. – 189 с.
6. Демидович, Б.П. Численные методы анализа [текст] / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
7. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория [текст] / М. Интрилигатор. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 576 с.
8. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры [текст] / А.Г. Курош. – 9-е изд. – М.: Наука, 1968. – 431 с.
9. Bass, F.M. Advertising competition with market expansion for finite horizon firms [текст] / F.M. Bass, A. Krishnamoorthy, A. Prasad, S.P. Sethi // Journal of Industrial and Management Optimization. – 2005. – № 11. – Pp. 1 – 19.

10. Chintagunta, P.K. Dynamic duopoly models of advertising competition: estimation and a specification tests [текст] / P.K. Chintagunta, D. Jain // Journal of Economics and Management Strategy. – 1995. – № 41. – Pp. 109 – 131.

11. Chintagunta, P.K. Pricing Strategies in a Dynamic Duopoly: A Differential Game Model [текст] / P.K. Chintagunta, V.R. Rao // Management Science. – 1996. – № 42 . – Pp. 1501 – 1514.

12. Chintagunta, P.K. Marketing Investment Decisions in a Dynamic Duopoly: A Model and Empirical Analysis [текст] / P.K. Chintagunta, N.J. Vilcassim // International Journal of Research in Marketing. – 1994. – № 11. – Pp. 287 – 306.

13. Deal, K.R. Optimizing Advertising Expenditures in a Dynamic Duopoly [текст] / K.R. Deal // Operations Research. – 1979. № 27. – Pp. 682 – 692.

14. Erickson, G. Differential game models of advertising competition [текст] / G. Erickson // European Journal of Operations Research. – 1995. – № 83. – Pp. 431 – 438.

15. Erickson, G.M. Dynamic conjectural variations in a Lanchester oligopoly [текст] / G.M. Erickson // Management Science. – 1997. – № 43. – Pp. 1603 – 1608.

16. Feichtinger, G. Dynamic Optimal Control Models in Advertising: Recent Developments [текст] / G. Feichtinger, R.F. Hartl, S.P. Sethi // Management Science. – 1994. – № 40, 2. – Pp. 195 – 226.

17. Jorgensen, S. Dynamic cooperative advertising in a channel [текст] / S. Jorgensen, S.P. Sigue, G. Zaccour // Journal of Retailing. – 2000. – № 76. – Pp. 71 – 92.

18. Jorgensen, S. Stackelberg leadership in a marketing channel [текст] / S. Jorgensen, S.P. Sigue, G. Zaccour // International Game Theory Review. – 2001. – № 3. – Pp. 13 – 26.

19. Jorgensen, S. Cooperative advertising in a marketing channel [текст] / S. Jorgensen, S. Taboubi, G. Zaccour // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2001. – № 110. – Pp. 145 – 158.

20. Kamien, M.I. Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management [текст] / M.I. Kamien, N.L. Schwartz. – 2nd ed. – Amsterdam, The Netherlands: Elsevier. – 1991. – P. 399.

21. Krishnamoorthy, A. Optimal Pricing and Advertising in a Durable-Good Duopoly [электронный ресурс] / A. Krishnamoorthy, A. Prasad, S.P. Sethi. – 2009. – 33 p.– URL: http://ssrn.com/abstract=1114989.

22. Nerlove, M. Optimal Advertising Policy under Dynamic Conditions [текст] / M. Nerlove, K. Arrow // Economica. – 1962. – № 29. – Pp. 129 – 142.

23. Prasad, A. Competitive Advertising under Uncertainty: Stochastic Differential Game Approach [текст] / A. Prasad, S.P. Sethi // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2004. – № 123. – Pp. 163 – 185.

24. Sethi, S.P. Optimal Control of the Vidale-Wolfe Advertising Model [текст] / S.P. Sethi // Operations research. – 1973. – № 21. – Pp. 998 – 1013.

25. Sethi, S.P. Some explanatory remarks on the optimal control of the Vidale-Wolfe advertising model [текст] / S.P. Sethi // Operations Research. – 1974. – № 22. – Pp. 1119 – 1120.

26. Sethi, S.P. Optimal Control of a Logarithmic Advertising Model [текст] / S.P. Sethi // Operations research. – 1975. –№ 26. – Pp. 317 – 319.

27. Sethi, S.P. Deterministic and Stochastic Optimization of a Dynamic Advertising Model [текст] / S.P. Sethi // Optimal Control Applications and Methods. – 1983. – № 4. – Pp. 179 – 184.

28. Sethi, S.P. Optimal Advertising and Pricing in a New-product Adoption Model [текст] / S.P. Sethi, , A. Prasad, X. He // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2008. – № 139 (2). – Pp. 351 – 360.

29. Sethi, S.P. Optimal control theory: applications to management science and economics [текст] / S.P. Sethi, G.L. Thompson. – 2nd ed. – USA: Springer, 2006. – P. 505.

30. Sorger, G. Competitive Dynamic Advertising: a Modification of the Case Game [текст] / G. Sorger // Journal of Economic Dynamics and Control. – 1989. – № 13. – Pp. 55 – 80.

31. Vidale, M.L. An Operations Research Study of Sales Response to Advertising [текст] / M.L. Vidale, H.B. Wolfe // Operations Research. – 1957. – № 5. – Pp. 370 – 381.

32. Viscolani, B. On optimal advertising policies and equilibria [текст] / B. Viscolani. – Firenze, 2007. – 14 p.

33. Weber, T.A. Optimal Control Theory with Applications in Economics [текст] / T.A. Weber. – Moscow: MSU CMC Publications Department, MAKS Press, 2009. – P. 176.

THE DYNAMIC DETERMINED OPTIMIZING MODEL OF DEFINITION THE ADVERTISING FIRM BUDGET

Pershin Maxim Andriyovych,
Post-graduate student, National Research University Higher School of Economics (HSE); p0844_pm@mail.ru

In the article the problem of optimum control by advertising expenses of firm in continuous time without restriction of terminal sales volume is formulated in a general view. Dynamics of model is set by the differential equation describing change ofcompany sales. Two specifications of the general problem of the optimum control, based on advertising model Vidal – Wolf and the modified model Vidal – Wolf, with the decision are provided.

Keywords: optimization, advertising expenses, problem of optimum control, principle of a maximum, model Vidal – Wolf, modified model Vidal – Wolf.