УДК 51-77

ВНУТРИИНДЕКСНЫЕ МОДЕЛИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

Давнис Валерий Владимирович,
доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета;
vdavnis@mail.ru

Касаткин Сергей Евгеньевич,
кандидат экономических наук, докторант Воронежского государственного университета; k_s_e@rambler.ru

Разинский Андрей Юрьевич,
аспирант Воронежского государственного университета;
humble@yandex.ru

Вводится понятие «внутренний индекс» и обсуждается возможность его применения при обосновании инвестиций в реальные и финансовые активы. Предлагается по аналогии с одноиндексными моделями оценивать внутрииндексные и использовать их для построения диагональной модели Шарпа. Рассмотрен вывод необходимых для этого формул и приведена их содержательная интерпретация. Приводятся результаты вычислительного эксперимента, позволившие рекомендовать предложенный подход для практического использования в задачах обоснования инвестиционных решений.

Ключевые слова: портфель реальных активов, портфель финансовых активов, биржевой индекс, внутренний индекс, диагональная модель Шарпа, волатильность, риск портфеля.

Введение

В [1] была рассмотрена проблема диверсификации инвестиций в реальные активы. Для формализованного решения этой проблемы было проведено исследование возможности применения аппарата портфельного инвестирования. К сожалению, среди известных моделей портфельного инвестирования нет подходящей для решения задачи, связанной с формированием оптимального портфеля реальных активов. В то же время идея формирования портфеля из реальных активов в настоящее время вызывает большой интерес, так как в явном виде ориентирует на практическую свою реализацию, для которой требуется, по нашему мнению, разработка специальных подходов.

Предполагаемые подходы, по крайней мере, должны предусмотреть решение вопросов, связанных с получением такого информационного описания ситуации формирования портфеля реальных активов, которая похожа на ситуацию формирования портфеля ценных бумаг. Только в этом случае можно говорить о некоторой приближенной корректности в реализации идеи заимствования аппарата моделирования инвестиционных процессов на фондовом рынке. Другими словами, требуется воспроизвести для реальных активов условия, в которых происходят биржевые операции с ценными бумагами. Такие условия, по понятным причинам, можно воспроизвести только искусственно и, к сожалению, не в полном объеме.

Воспроизведение исторического периода реальных активов

Адекватному воспроизведению, по нашему мнению, поддается только динамика внутренней нормы доходности реального актива. По замыслу, для подобного воспроизведения можно построить специальные модели, позволяющие на историческом периоде оценить значения внутренней нормы доходности реальных активов, в предположении, что активы функционировали в условиях исторического периода. Имеется в виду виртуальное, а не реальное функционирование, но в условиях, которые похожи на условия ожидаемого жизненного цикла инвестируемого актива.

Предложить универсальный подход для решения этой проблемы в любых ситуациях, которые могут иметь место при обосновании инвестиционных решений, практически невозможно. Поэтому, упрощая ситуацию, будем считать, что при формировании портфеля реальных активов уровень их доходности зависит от ценовой ситуации, сложившейся на соответствующем рынке. Это тот случай, который чаще других встречается в практике инвестирования в проекты. Например, если средства были вложены в строительство доходного дома, то, естественно, ожидаемая доходность будет зависеть от уровня арендной платы.

Логика расчета доходности реального актива отличается от расчета доходности финансового актива, но содержательный смысл этих величин отличается незначительным нюансом. Для финансового актива обычно вычисляется текущая доходность между двумя соседними котировками, а доходность реального актива является специальным образом усредненной величиной доходности за период окупаемости вложенных в него средств. Воспроизведение всей динамики внутренней ставки доходности на историческом периоде получается, если воспользоваться процедурой скользящего «окна», размеры которого соответствуют длине периода окупаемости. Перемещение окна по данным, характеризующим стоимость аренды, позволит с помощью известной формулы, которая для случая скользящих расчетов на историческом периоде модифицируется следующим образом:

$$r_{ij} = Arg\left[\sum_{t=-m+j}^{-m+j+n} S_{it}(1+r_i)^t - I_{i0}(1+r_f)^t = 0\right], \quad (1)$$

$$i = 1, 2, ..., p; \quad j = 1, 2, ..., m-n,$$

r_{ij} – доходность i-го реального актива на историческом отрезке времени в момент j; S_{it} – доход, полученный на историческом периоде в момент времени t от вложений в i-ый реальный актив; $(1+r_i)$ – дисконтный множитель по искомой ставке внутренней доходности i-го актива; $(1+r_f)$ – дисконтный множитель приведения инвестиций в актив к расчетному моменту времени по безрисковой ставке.

Применение данной формулы для воспроизведения внутренних доходностей реальных активов имеет смысл только в случае, когда исторический период превосходит период окупаемости, т.е. $m > n$. Причем желательно, чтобы это превосходство обеспечивало необходимое для построения портфеля количество данных. Если возникают проблемы с длиной получаемых временных рядов, то можно использовать, например, метод «складного ножа» и за счет некоторого огрубления повысить статистическую надежность расчетов. В принципе можно считать, что задача формирования набора данных, необходимого для формирования портфеля реальных активов, решаема, но требует в каждом конкретном случае специальных усилий для адаптации имеющихся возможностей к условиям конкретной ситуации.

Рынок реальных активов с внутренней оценкой доходности

У инвестора всегда есть выбор для вложений своего капитала и поэтому условно существование такой возможности можно принять за неорганизованный рынок реальных активов. Говорить о каких-то правилах или механизмах функционирования подобной инвестиционной деятельности не имеет смысла. Каждый инвестор в подобной ситуации действует в соответствии со своими предпочтениями, не имея даже приближенных ориентиров для оценки своих предпочтений. Но потребность в ориентирах подобного рода, безусловно, есть. На организованных рынках, как правило, вводится биржевой индекс, характеризующий среднюю доходность рынка и позволяющий строить оценочные модели, с помощью которых упорядочиваются предпочтения инвесторов.

В практике обоснования инвестиционных решений обычно используют модель Линтнера – Шарпа [2]:

$$Er_i = r_f + \beta[r_I - r_f], \quad (2)$$

которая строится в виде регрессионного уравнения на основе данных о доходностях биржевого индекса и финансового актива.

Если это уравнение переписать в виде:

$$Er_i - r_f = \beta[r_I - r_f], \quad (3)$$

то механизм получения прибыли от вложений в рыночные активы хорошо интерпретируется. В соответствии с этой интерпретацией прибыль является премией за риск, пропорциональной рыночному риску.

Построение подобной оценочной модели для реальных активов является заманчивой идеей. Основная проблема, преодоление которой требует специального подхода, заключается в отсутствии обобщающего показателя (индекса). Предлагается для этих целей использовать внутренний индекс, под которым понимается усредненная доходность по тем активам, которые включаются в портфель инвестора.

С введением понятия «внутренний индекс» одноиндексная модель Линтнера – Шарпа превращается во внутрииндексную модель, которая отражает взаимосвязь актива с портфелем, в который он включен:

$$Er_i = r_f + \beta[r_b - r_f], \tag{4}$$

где $r_b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$ – внутренний индекс.

Модель позволяет все активы портфеля разделить на те, доходность которых в среднем выше доходности портфеля, и те, доходность которых ниже.

Предлагаемый подход, обеспечивая возможность модификации аппарата обоснования инвестиционных решений для случаев инвестирования в реальные активы, в то же время является универсальным и не исключает возможность практического применения для финансовых активов. На формальном уровне применение внутрииндексных оценочных моделей не отличается от применения одноиндексных моделей. Но содержательная интерпретация результатов моделирования в каждом конкретном случае может требовать специального рассмотрения.

Диагональная модель Шарпа на основе внутрииндексных моделей

Смысл основной возможности, которую удается сохранить, применяя внутрииндексные модели для построения диагональной модели портфельного инвестирования, в формальном получении тех же самых выводов, которые имеют место в случае применения одноиндексных моделей. Эти выводы касаются доходности и риска портфеля.

Характеристики (доходность, риск) финансовых активов, описываемых внутрииндексными моделями, определяются в соответствии с формулами:

$$\overline{r_i} = \alpha_i + \beta_i \overline{r_b}, \tag{5}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_b^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2, \tag{6}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_b^2, \tag{7}$$

где $\overline{r_i}$, $\overline{r_b}$– математические ожидания доходности i-го актива и внутреннего индекса; σ_i^2, σ_b^2– дисперсии доходностей i-го актива и внутреннего индекса; σ_{ij} – ковариация доходностей i-го и j-го активов; $\sigma_{i\varepsilon}$– остаточная дисперсия внутрииндексной модели i-го актива.

При выводе этих формул использовались свойства случайных величин ε_{ti}, которыми они наделены в силу естественных предположений о нулевом математическом ожидании и взаимной независимости.

Построение для каждого актива, включаемого в портфель, внутрииндексной модели:

$$r_i = \alpha_i + \beta_i r_b + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n} \tag{8}$$

позволяет через коэффициенты этих моделей выразить среднюю доходность портфеля в виде двух составляющих

$$\mathrm{E}(r_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i + (\sum w_i \beta_i)\,\mathrm{E}(r_b)\,. \tag{9}$$

Первая составляющая формируется под воздействием каждого отдельно рассматриваемого актива, а вторая есть результат взаимодействия активов, включенных в портфель. Причем это взаимодействие реализуется путем бета-взвешивания внутреннего индекса.

По аналогии с диагональной моделью Шарпа [3] перепишем (9) в более компактном виде:

$$\mathrm{E}(r_p) = \sum_{i=1}^{n+1} w_i \alpha_i\,, \tag{10}$$

где

$$w_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \tag{11}$$

$$\alpha_{n+1} = \mathrm{E}(r_a)\,. \tag{12}$$

Введение дополнительной переменной обеспечивает единообразие в формализованной записи модели портфельного инвестирования.

Известно, что дисперсия портфеля представима в виде:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1\, j\neq i}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}\,. \tag{13}$$

Если в (13) подставить вместо дисперсии выражение (6), а вместо ковариации – выражение (7), то формулу (13) удается записать в компактном виде

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n+1} w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2\,, \tag{14}$$

где $w_{n+1}^2 = (w_1\beta_1 + w_2\beta_2 + \cdots + w_n\beta_n)^2$ – квадрат портфельной беты; $\sigma_{\varepsilon n+1}^2 = \sigma_b^2$ – дисперсия внутреннего индекса.

Таким образом, дисперсия портфеля, как и его доходность, имеет две составляющих. Первая составляющая формируется из остаточных дисперсий внутрииндексных моделей, а вторая равна значению дисперсии внутреннего индекса, умноженному на квадрат портфельной беты.

Если ввести специальным образом модифицированные обозначения

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ w_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \\ -1 \end{pmatrix},$$

то диагональная модель портфельного инвестирования может быть записана следующим образом:

$$\mathbf{w}' \textstyle\sum_d \mathbf{w}, \tag{15}$$

$$\mathbf{w}'\alpha = \mu\,, \tag{16}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{i} = 1, \tag{17}$$

$$\mathbf{w}'\beta = 0, \tag{18}$$

где Σ_d – диагональная матрица остаточных дисперсий; μ – уровень доходности, который инвестор ожидает получить от сформированного портфеля.

По замыслу, модель (15)–(18) предназначена для обоснования оптимальной структуры портфеля, сформированного из реальных активов. Именно для этой цели было введено понятие «внутренний индекс», с помощью которого удается сформировать аналог диагональной модели Шарпа для реальных активов. Но расчетные значения внутреннего индекса могут быть получены и для финансовых активов. А это значит, аналог диагональной модели Шарпа может быть построен и для финансовых активов. Именно эта возможность позволяет осуществить корректное сравнение моделей с использованием данных фондового рынка.

Сравнительный анализ моделей

Специфика предлагаемой для формирования портфеля реальных активов модели ориентирована на ситуацию, в которой данные для ее построения формируются специальным образом и, кроме того, используются внутрииндексные модели вместо одноиндексных. Возникает естественная необходимость в сравнении данной модели с другими моделями портфельного инвестирования. По результатам этого сравнения можно сделать окончательный вывод о практической пригодности или непригодности этой модели. По понятным причинам такое сравнение можно провести, используя данные только фондового рынка.

Для сравнения было сформировано три портфеля, которые условно назовем одноиндексным, однокомпонентным и внутрииндексным. Во всех трех случаях использовалась диагональная модель Шарпа. Но в первом случае диагональная модель строилась на основе одноиндексных моделей, во втором – на основе однокомпонентных моделей [4], а в третьем – на основе внутрииндексных моделей. Результаты расчетов приводятся ниже.

Таблица 1

Регрессионные модели финансовых активов

Модель	Характеристики модели	Активы			
		Сбербанк	Роснефть	Лукойл	Норникель
Одноиндексная	Альфа	0,0069	0,1308	-0,0062	0,0829
	Бета	1,2036	0,9512	0,8414	0,3983
	Детерминация	0,6671	0,6366	0,7041	0,2327
Однокомпонентная	Альфа	0,0347	-0,1038	0,018	0,0913
	Бета	0,6898	0,5143	0,4531	0,2332
	Детерминация	0,8295	0,7044	0,7729	0,3018
Внутрииндексная	Альфа	0,0279	-0,1154	0,0082	0,0794
	Бета	1,3693	1,0962	0,9612	0,5733
	Детерминация	0,7436	0,728	0,7912	0,415

Анализ бета-коэффициентов показал, что во всех моделях одинаково оценена предпочтительность эффективности активов. Все модели показали один и тот же самый эффективный актив, одну и ту же упорядоченность активов по бета-коэффициенту. Следовательно, результаты, получаемые при использовании внутреннего индекса вместо рыночного, будут корректны и иметь содержательный смысл.

Вопрос возможного использования альтернативных внутренних индексов не обсуждался, но в расчетах, по сути, использовалось два индекса. В однокомпонентных моделях использовалась в качестве индекса первая главная компонента, а во внутрииндексных моделях – средняя доходность активов, включаемых в портфель. Индекс в виде средней доходности естественным образом разделил все активы на те, у которых бета-коэффициент больше единицы, и те, у которых бета-коэффициент меньше единицы. Индекс в виде первой главной компоненты вместе с максимально возможным риском имеет высокий уровень доходности. Поэтому бета-коэффициенты всех активов в однокомпонентных моделях оказались меньше единицы.

Оптимальные портфельные решения приведены в табл. 2.

Таблица 2

Портфельные инвестиционные решения

Активы	Портфели		
	Одноиндексный	Однокомпонентный	Внутрииндексный
Сбербанк	-0,1045	-0,2315	-0,2124
Роснефть	0,0927	0,0446	0,0634
Лукойл	0,3654	0,4965	0,4307
Норникель	0,6464	0,6903	0,7184
Риск	1,3860	1,3633	1,4790

По своей структуре сформированные портфели незначительно отличаются друг от друга. Это важный аргумент в пользу возможности использования внутренних индексов в практике обоснования инвестиционных решений, особенно в тех случаях, когда формируются портфели активов, не охваченных биржевой торговлей.

Отметим две особенности построенных портфелей. Несмотря на самый высокий бета-коэффициент, Сбербанк включен в портфель с отрицательным значением весового коэффициента, означающим, что от этого актива нужно освободиться через механизм коротких продаж. Этот случай объясняется высокой волатильностью актива и возможностью сформировать портфель, обеспечивающий требуемую доходность, из активов с меньшим риском.

Вторая особенность в том, что из трех портфелей с одним и тем же уровнем доходности наименьший риск у портфеля, для построения которого использовалась в качестве внутреннего индекса первая главная компонента, имеющая самую большую дисперсию. Этот случай не имеет тривиального объяснения и требует, по всей вероятности, специального исследования.

Сравнительный анализ моделей по результатам вычислительного эксперимента показал, что введенное понятие «внутренний индекс» имеет несколько вариантов количественного представления и может использоваться в практике обоснования инвестиционных решений как финансовых, так и реальных активов.

Список источников

1. Давнис, В.В. Проблемы реального инвестирования на основе портфельных решений [текст] / В.В. Давнис, С.Е. Касаткин, А.Ю. Разинский // Современная экономика: проблемы и решения. – 2012. – № 11 (35). – С. 149 – 155.
2. Sharpe, W.F. Capital Asset Price: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk [текст] / W.F. Sharpe // Journal of Finance. – 1964. – Vol. 19. – № 3. – P. 425 – 442.
3. Шарп, У. Инвестиции [текст] / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли. – М.: ИНФРА-М, 2006. – XII. – 1028 с.
4. Давнис, В.В. Однокомпонентная модель портфельного инвестирования [текст] / В.В. Давнис, С.Е. Касаткин, А.А. Ардаков // Современная экономика: проблемы и решения. – 2012. – № 5 (29). – С. 150 – 157.

INTERIOR INDEX MODELS AND THEIR APPLICATION IN PROBLEMS OF PORTFOLIO INVESTMENT

Davnis Valery Vladimirovich,
Dr. Sc. of Economy, Professor, Chief of the Chair of information technologies and mathematical methods in economy ofVoronezh State University; vdavnis@mail.ru

Kasatkin Sergey Evgenyevich,
Postdoctoral student of Voronezh State University; k_s_e@rambler.ru

Razinsky Andrey Yuryevich,
Post-graduate student ofVoronezh State University;
humble@yandex.ru

The concept «interior index» is entered and possibility of its application is discussed at justification of investments into real and financial assets. It is offered by analogy to single-index models to estimate interior index and to use them for creation of diagonal model of Sharp. The conclusion of formulas necessary for this purpose is considered and their substantial interpretation is given. Results of the computing experiment, allowed to recommend the offered approach for practical use in problems of justification of investment decisions are given.

Keywords: portfolio of real assets, portfolio of financial assets, stock index, interior index, Sharp's diagonal model, volatility, portfolio at risk.