УДК 519.2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ПРОИЗВОДСТВЕ, ХРАНЕНИИ И СБЫТЕ ТОВАРА С ПОСРЕДНИКОМ

Бутова Лилия Владиславовна[1], канд. техн. наук, доц.
Сумина Рита Семёновна[1], канд. техн. наук, доц.
Корчагина Елена Васильевна[2], канд. физ.-мат. наук, доц.
Шишкина Лариса Александровна[3], канд. экон. наук, доц.

[1]Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», ул. Старых большевиков, 54, Воронеж, Россия, 394064; e-mail: rsumina@mail.ru

[2]Воронежский институт Федеральной службы исполнения наказаний, ул. Иркутская, 1а, Воронеж, Россия, 394076

[3]Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I, ул. Мичурина, 1, Воронеж, Россия, 394087; e-mail: kz2009kzaf@gmail.com

Цель: разработка и анализ моделей процесса оптимального производства, хранения и сбыта продукции. *Обсуждение*: авторами уделяют значительное внимание моделированию процессов производства, хранения и сбыта продукции при условии конкуренции с учетом интересов посреднических торговых организаций. Анализ решения соответствующей многокритериальной задачи выявил, что использование посредника в данной задаче является необходимым условием для повышения прибыли предприятия. *Результаты*: обоснована целесообразность использования посредника для многокритериальной задачи о производстве, хранении и сбыте продукции; разработана математическая модель задачи об оптимальном производстве, хранении и сбыте продукции предприятия с учетом интересов посреднических торговых организаций.

Ключевые слова: планирование, управление, математическая модель.

DOI: 10.17308/meps.2016.1/1370

Введение

Математическое моделирование играет огромную роль в задачах экономического планирования и прогнозирования. Это обуславливается, в первую очередь, принципиальной невозможностью экспериментов в экономике и важностью соответствующих задач. Многие вопросы экономической политики предприятия в области производства, хранения и сбыта товара до сих пор остаются нерешенными. Всякий раз приходится рассматривать огромное количество вариантов. Существующие концепции зачастую весьма поразному оценивают факты и при разной трактовке трудно решить, какой теоретический подход наиболее адекватный. При этом, исходя из самого характера экономической науки, невозможно однозначно доказательно проверить эти теоретические изыскания. И хотя понятно, что реальная экономическая деятельность предприятия не может быть полностью описана никакой, даже самой предусмотрительной моделью, тем не менее необходима правильная расстановка акцентов при формализации.

Результаты моделирования задач планирования и управления показывают, что в реальной постановке эти задачи являются многокритериальными [5, 6, 7]. Так, часто встречающееся выражение «достичь максимального эффекта при наименьших затратах» уже означает принятие решения при двух критериях. Сложность и динамичность, а также высокий уровень неопределенности, являясь характерными свойствами экономических процессов, порождают специфические условия, которые необходимо учитывать при разработке прогнозных моделей. Оценка деятельности предприятий, трактуемых как управляемые системы, производится на основе более десятка критериев: выполнение плана производства по объему, по номенклатуре, плана реализации, прибыли по показателям рентабельности, производительности труда и т.д. При этом многокритериальные динамические задачи оптимального управления [8, 9] исследованы к настоящему времени недостаточно: существует небольшое число исследований [10, 11, 12], посвященных в основном линейным объектам с квадратичными функционалами.

Целью исследования является разработка и анализ математических моделей процесса оптимального производства, хранения и сбыта продукции с учетом интересов посреднических торговых организаций.

Постановка и содержательная интерпретация многокритериальной динамической задачи

Рассмотрим многокритериальную позиционную динамическую задачу при неопределенности (МДЗН), под которой понимается упорядоченный набор:

$$\Sigma, \Psi, Z, J\{U, Z, t_0, x_0\}. \quad (1)$$

В (1) изменение управляемой системы Σ описывается линейным векторным дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \gamma(u - x) \quad (2)$$

с начальным условием:

$$x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

где Ψ – множество стратегий U у ЛПР; Z – множество неопределенностей Z; $J\{U, Z, t_{0,} x_0\}$ – i-я компонента векторного критерия;

$J\{U,Z,t_{0,}x_0\} = J_1\{U,Z,t_{0,}x_0\}\ldots J_N\{U,Z,t_{0,}x_0\}$ применяется также множество номеров критериев $N = \{1,\ldots,N\}$.

С точки зрения экономической динамики можно предложить следующую интерпретацию задачи (1).

Рассматривается замкнутая (не имеющая прямых связей с внешним миром) экономическая система Σ (которая называется «производителем»). В качестве производителей могут выступать отдельные предприятия, целые отрасли. Во главе производителя стоит орган управления, принимающий (на основе, например, маркетинговых исследований) те или иные решения с учетом тех или иных целей. Возможности органа управления могут заключаться, в частности, в перераспределении фонда зарплаты, штрафах, премиях и других формах поощрения и наказания. Эти возможности для производителя обозначены в задаче (1) через Ψ. Состояние экономической системы Σ в каждый момент времени t описывается n-вектором $x(t)$, компоненты которого есть составляющие объема производства за время $t - t_0$. Кроме того, координатами $x(t)$ могут являться трудовые и природные ресурсы, виды фондов и услуг, разного рода условные «товары». В теории моделей экономической динамики изучаются в основном траектории движения экономики в пространстве «товаров» – траектории изменения векторов $x(t)$ с течением времени [1]. Вообще говоря, возможны различные траектории движения экономической системы, начинающиеся (при $t = t_0$) в одном и том же состоянии x_0 (при одном и том же количестве начального товара). Иначе говоря, последующее состояние экономики неоднозначно определяется предыдущим. Причиной этого являются:

во-первых, технологические возможности характеризуют не только производственные, но и потребительские, транспортные возможности, а также возможности сферы услуг, воспроизводство трудовых ресурсов и т.п.;

во-вторых, выбор решения органом управления, заключающегося в использовании конкретной стратегии u при $u(t,x) = P(t)x + p(t)$; стратегии устанавливают, какая доля произведенных к моменту времени t товаров $x(t)$ ЛПР считает нужным направить на рост или убыль прироста этой продукции $x(t)$ в единицу времени;

в-третьих, экономическая система, как правило, подвергается неожиданным, труднопрогнозируемым возмущениям как извне (изменение количества и номенклатуры поставок, изменение спроса на товары, выпускаемые данным производством), так и изнутри (появление новой технологии, поломка и замена оборудования, несовпадение реальных сроков пуска нового оборудования с планируемыми сроками и т.д.)

В задачах выбора решения, формализуемых в виде модели векторной оптимизации [2], первым естественным шагом следует считать выделение области компромиссов (или решений, оптимальных по Парето).

В настоящее время наблюдается тенденция к значительному росту влияния торговых посредников на рынке товаров и услуг. Это объясняется тем, что торговые посредники имеют прямой доступ к исключительно важной информации о состоянии и поведении рынка. Данные, поступающие с места продаж совместно со средствами связи, работающими в режиме реального времени, позволяют улавливать и учитывать изменения потребительского спроса сразу же, как только они возникают. Торговые посредники также успешно используют при реализации продукции частные торговые марки, в то время как производители сталкиваются со значительными сложностями и издержками при внедрении и распространении новых торговых марок. И, наконец, канал распределения развивается от стратегии «проталкивания» (в которой наиболее активная роль принадлежит производителям, побуждающим торговых посредников приобретать и доводить до потребителей их продукты) к стратегии «вытягивания» (эта стратегия ориентируется на запросы конечного потребителя, исходя из которых посредники начинают диктовать свои запросы производителям). Только тогда, когда потребитель покупает товар, окончательно материализуется вся цепочка создания добавленной стоимости в канале распределения, поэтому именно посредники лучше других участников канала распределения могут управлять процессом создания этой стоимости.

Конкурентные позиции торговых посредников на рынке определяются следующими качествами:

- готовностью развивать сотрудничество и партнерские отношения;
- гибкостью логистической системы, позволяющей приспосабливаться к потребностям партнеров по каналу;
- «подстроенными» под конкретного потребителя программами маркетинга и продаж;
- наличием информационных связей с партнерами для согласования действий;
- коротким, чувствительным к требованиям рынка, гибким и надежным циклом исполнения заказа, обеспечивающим быстрое пополнение запасов и удовлетворение запросов потребителей.

Многокритериальная задача о производстве, хранении и сбыте продукции при участии посредника

Проведем обобщение задачи, предполагая, что производитель взаимодействует с посредником, который, в свою очередь, продает товар конечному потребителю. Эта задача является многокритериальной, так как и потребитель, и посредник стремятся максимизировать свой доход.

Рассмотрим многокритериальную задачу о производстве, хранении и сбыте товара с посредником. Обозначим через $Z_1(t)$ – количество товара на складе у производителя; $Z_2(t)$ – количество товара на складе у посредника; $Z_3(t)$ – количество товара у потребителя. Тогда обозначим за $U(t)$ – темп производства, $P_1(t)$ – количество продаж в единицу времени производителем; $P_2(t)$ – количество продаж в единицу времени посредником; k_1 – коэффициент потребления; k_2 – коэффициент затрат на хранение единицы товара производителя; k_3 – коэффициент затрат на хранение единицы товара посредника; $c_1(t)$ – цена единицы товара у производителя; $c_2(t)$ – цена единицы товара у посредника. Динамика изменений введенных величин описывается следующей системой уравнений:

$$\dot{Z}_1 = U - P_1, \quad (4)$$

$$\dot{Z}_2 = P_1 - P_2, \quad (5)$$

$$\dot{Z}_3 = P_2 - kZ_3, \quad (6)$$

$$P_1 = Z_1(a_1 - b_1 c_1), \quad (7)$$

$$P_2 = Z_2(a_2 - b_2 c_2), \quad (8)$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 – положительные постоянные.

Прибыль производителя и потребителя определяется функционалами:

$$J_1 = \int_0^T (c_1 P_1 - k_1 U - k_2 Z_1) dt \to \max, \quad (9)$$

$$J_2 = \int_0^T (c_2 P_2 - c_1 P_1 - k_3 Z_2) dt \to \max. \quad (10)$$

Взвешенный доход $J(t)$ определяется равенством:

$$J(\alpha) = \alpha J_1 + (1-\alpha) J_2, \quad (11)$$

$$J(\alpha) = \int_0^T \left(2\alpha c_1 P_1 - c_1 P_1 - k_1 U - k_2 Z_1 - k_3 Z_2 + c_2 P_2 - \alpha c_2 P_2 + \alpha k_3 Z_2\right) dt \to \max. \quad (12)$$

Исследуем зависимость взвешенного функционала от параметра α.

Для упрощения выкладок введем следующие обозначения:

$$\dot{Z} = f(Z, u), \quad (13)$$

$$Z(0) = Z_0; \quad (14)$$

$$Z(t_f) = Z_f. \quad (15)$$

Обозначим через $Z^*(t,\alpha)$, $c^*(t,\alpha)$ оптимальное решение задачи (13)-(15), тогда в условиях гладкой зависимости функционала от параметра α получим:

$$J^* = \int_0^{T_f} \alpha f_1(Z^*(\alpha,t), c^*(\alpha,t)) + (1-\alpha) f_2(z^*(\alpha,t), c^*(\alpha,t)).$$

Из условия стационарности $\frac{dJ}{d\alpha} = 0$ получим

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_0^{T_f} (f_1 - f_2) + \alpha\left(\frac{\partial f_1}{\partial Z} Z_\alpha'^* + \frac{\partial f_1}{\partial c} c_\alpha'^*\right) + (1-\alpha)\left[f_2 \frac{\partial f}{\partial Z} Z_\alpha'^* + \frac{\partial f_2}{\partial c} c_\alpha'\right] dt =$$

$$= \int_0^{T_f} \left[(f_1 - f_2) + Z_\alpha'^*\left(\alpha \frac{\partial f_1}{\partial Z} + (1-\alpha)\frac{\partial f_2}{\partial Z}\right) + c_\alpha'^*\left(\alpha \frac{\partial f_1}{\partial c} + (1-\alpha)\frac{\partial f_2}{\partial c}\right)\right] dt.$$

С другой стороны,

$$H = \alpha f_1 + (1-\alpha) f_2 + \lambda f.$$

И на оптимальных траекториях выполняются равенства:

$$\frac{dH}{dc}=0, \tag{16}$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{dH}{dZ}, \tag{17}$$

следствием которых являются соотношения:

$$\alpha f_1' \ c+(1-\alpha)\dot{f}_2' \ +\lambda f_c' \ =0, \tag{18}$$

$$\dot{\lambda}=-(\alpha f_{1Z}' +(1-\alpha)f_{2Z}'+\lambda f_Z' \ ). \tag{19}$$

Запишем их в виде:

$$\alpha f_{1c}' \ +(1-\alpha)f_{2c}' \ =-\lambda f_c', \tag{20}$$

$$\alpha f_{1Z}' +(1-\alpha)f_{2Z}' =-\dot{\lambda}-\lambda f_Z' \tag{21}$$

и подставим в (12):

$$\frac{dJ^*}{d\alpha}=\int_0^{T_f}\left[(f_1-f_2)-Z_\alpha'^*\dot{\lambda}-\lambda\frac{df}{d\alpha}\right]dt. \tag{22}$$

Преобразуем второе слагаемое (22):

$$-\int_0^{T_f} Z_\alpha'^*\dot{\lambda}\,dt=-\int_0^{T_f} Z_\alpha'^* d\lambda=-(Z_\alpha'^*,\lambda)\,|_0^{T_f}\ +\int_0^{T_f}\lambda\frac{d}{dt}Z_\alpha'^* dt=$$

$$=-Z^*\lambda(T_f)+Z_\alpha'^*\lambda(0)+\int_0^{T_f}\lambda Z_\alpha'^* dt=(Z_\alpha'^*(0),\lambda(0))+\int_0^{T_f}\lambda\frac{df}{d\alpha}dt. \tag{23}$$

Подставив полученное соотношение в (12), получим равенство:

$$\frac{dJ}{d\alpha}=\int_0^{t_f}\left[(f_1-f_2)+\lambda\frac{df}{d\alpha}-\lambda\frac{df}{d\alpha}\right]dt+(\dot{Z}_\alpha^*(0),\lambda(0)). \tag{24}$$

Так как $\frac{dJ}{dt}=0$, то на оптимальных траекториях выполняется:

$$\int_0^{T_f}(f_1(Z^*,c^*)-f_2(Z^*,c^*))dt=-(Z_\alpha'^*(0),\lambda(0)). \tag{25}$$

Соотношение (25) определяет необходимое условие оптимальности взвешенного функционала (13) в многокритериальной задаче.

Одно из важных следствий соотношения (20) заключается в том, что если $Z_\alpha'^*(0)=0$, то на оптимальных траекториях выполняется равенство:

$$f_1(Z^*,c^*)=f_2(Z^*,c^*), \tag{26}$$

которое легко получается дифференцированием по верхнему пределу.

Это означает, что один из критериев является «лишним» и его можно заменить на уравнение связи

$$f_1(Z,c)=f_2(Z,c), \tag{27}$$

что позволяет свести задачу (9)-(12) к традиционной задаче оптимального управления.

Заключение

В результате проведенного исследования решена многокритериальная задача о производстве, хранении и сбыте продукции предприятия при участии посредника, которая адекватно учитывает конкуренцию критериев.

В результате проведенного исследования решена многокритериальная задача о производстве, хранении и сбыте продукции предприятия, при участии посредника, которая адекватно учитывает конкуренцию критериев. В результате получили решение, которое дает оптимальный результат по всем выбранным критериям, однако проведенное исследование не претендует на решение всех вопросов, связанных с математическим моделированием многокритериальных задач экономики.

Список источников

1. Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Москва, Наука, 1975.
2. Бусленко Н.П. *Моделирование сложных систем*. Москва, Наука, 1968.
3. Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н. *Лекции по теории сложных систем*. Москва, Сов. радио, 1973.
4. Бутова Л.В., Салимгареев Н.И., Минаев Е.С. Определение необходимого условия оптимальности взвешенного функционала в многокритериальной задаче // *Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции*, 2014, no. 5, ч. 1 (10-1), с. 23-26.
5. Вентцель Е.С. *Исследование операций*. Москва, Сов. радио, 1972.
6. Вовк А.А. *Оценка эффективности транспортного производства и резервов ее роста*. Москва, Крома, 2000.
7. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. *Введение в минимакс*. Москва, Наука, 1972.
8. Покровский А.В. Корректные решения уравнений с сильными нелинейностями // *Доклады АН*, 1984, т. 274, no. 5, с. 1037-1040.
9. Покровский А.В. Системы с сильными нелинейностями // *Математическая теория систем*, 1990, no. 2, с. 96-112.
10. Розен В.В. *Цель – оптимальность – решение: математические модели принятия оптимальных решений*. Москва, Радио и связь, 1982.
11. Соболь И.М., Статников Р.Б. *Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями.* Москва, Наука, 1981.
12. Шишкина Л.А., Сумина Р.С., Алейникова Н.А. Математическая модель ранжирования объектов с использованием нечетких переменных // *Современная экономика: проблемы и решения*, 2014, no. 11, с. 7-14.

MULTI-OBJECTIVE MODEL FOR PRODUCTION, STORAGE AND DISTRIBUTION OF GOODS WITH INTERMEDIARIES

Butova Liliya Vladislavovna[1], Cand. Sc. (Eng.), Assist. Prof.
Sumina Rita Semyonovna[1], Cand. Sc. (Eng.), Assist. Prof.
Korchagina Elena Vasil'evna[2], Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assist. Prof.
Shishkina Larisa Aleksandrovna[3], Cand. Sc. (Econ.), Assist. Prof

[1] Russian Air Force Military Educational and Scientific Center «Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin», Starikh Bolshevikov st., 54, Voronezh, Russia, 394064; e-mail: rsumina@mail.ru

[2] Voronezh Institute of Federal Penitentiary Service of Russia, Irkutskaya, 1a, Voronezh, Russia, 394076

[3] Voronezh State Agricultural University, Michurin st., 1, Voronezh, Russia, 394087; e-mail: kz2009kzaf@gmail.com

Purpose: multi-objective simulation for production, storage and distribution of goods with intermediaries. *Discussion*: the author pays attention to modeling the processes of production, storage and distribution in the interests of the intermediary trading companies. Analysis of the solution of the corresponding multi-objective problem revealed that the using the intermediary in this problem is necessary condition for increasing business profits. *Results*: we argued the expediency of using an intermediary to multi-objective problems on the production, storage and distribution of products. In addition, we developed an optimization model for production, storage and distribution of enterprise, taking into account the interests of the intermediary trading companies.

References

1. Arnol'd V.I. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniia.* Moscow, Nauka, 1975. (In Russ.)

2. Buslenko N.P. *Modelirovanie slozhnykh sistem*. Moscow, Nauka, 1968. (In Russ.)

3. Buslenko N.P., Kalashnikov V.V., Kovalenko I.N. *Lektsii po teorii slozhnykh sistem*. Moscow, Sov. radio, 1973. (In Russ.)

4. Butova L.V., Salimgareev N.I., Minaev E.S. Opredelenie neobkhodimogo usloviia optimal'nosti vzveshennogo funktsionala v mnogokriterial'noi zadache. *Aktual'nye napravleniia nauchnykh issledovanii XXI veka: teoriia i praktika. Sbornik nauchnykh trudov po materialam mezhdunarodnoi zaochnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii,* 2014, no. 5, vol. 1 (10-1), pp. 23-26. (In Russ.)

5. Venttsel' E.S. *Issledovanie operatsii*. Moscow, Sov. radio, 1972. (In Russ.)

6. Vovk A.A. *Otsenka effektivnosti transportnogo proizvodstva i rezervov ee rosta*. Moscow, Kroma, 2000. (In Russ.)

7. Dem'ianov V.F., Malozemov V.N. *Vvedenie v minimaks.* Moscow, Nauka, 1972. (In Russ.)

8. Pokrovskii A.V. Korrektnye resheniia uravnenii s sil'nymi nelineinostiami. *Do-*

klady AN, 1984, vol. 274, no. 5, pp. 1037-1040. (In Russ.)

9. Pokrovskii A.V. Sistemy s sil'nymi nelineinostiami. *Matematicheskaia teoriia sistem*, 1990, no. 2, pp. 96-112. (In Russ.)

10. Rozen V.V. *Tsel' – optimal'nost' – reshenie: matematicheskie modeli priniatiia optimal'nykh reshenii.* Moscow, Radio i sviaz', 1982. (In Russ.)

11. Sobol' I.M., Statnikov R.B. *Vybor optimal'nykh parametrov v zadachakh so mnogimi kriteriiami.* Moscow, Nauka, 1981. (In Russ.)

12. Shishkina L.A., Sumina R.S., Aleinikova N.A. Matematicheskaia model' ranzhirovaniia ob"ektov s ispol'zovaniem nechetkikh peremennykh. *Sovremennaia ekonomika: problemy i resheniia*, 2014, no. 11, pp. 7-14. (In Russ.)