УДК 656.025:519.17

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕВОЗОК В КРУПНОМАСШТАБНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ С УЧЕТОМ НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ДАННЫХ[1]

Лойко Валерий Иванович, д-р техн. наук, проф.
Павлов Дмитрий Алексеевич, канд. физ.-мат. наук, доц.
Яхонтова Ирина Михайловна, канд. экон. наук, доц.

Кубанский государственный аграрный университет им. И.Т. Трубилина, ул. Калинина, 13, Краснодар, Россия, 350044; e-mail: dp.logic@gmail.com

Цель: разработать многокритериальную дискретную модель задачи планирования и организации маршрутов пассажирских или грузовых перевозок в крупномасштабных транспортных сетях, позволяющую проводить оптимизацию с учетом недетерминированных данных. *Обсуждение*: в работе представлена методика решения задачи планирования оптимальных маршрутов в крупномасштабной транспортной сети с учетом ряда экономических требований, заданных в виде критериев, позволяющих оценивать найденную систему маршрутов с недетерминированными данными. В качестве недетерминированных данных рассматриваются интервальные оценки. Учет в задаче оптимизации недетерминированных данных позволит более адекватно оценивать реальные транспортные системы. Моделью представленной задачи является многокритериальная задача выделения на предфрактальном графе простых цепей. В этой модели в виде предфрактального графа выступает крупномасштабная транспортная сеть, где узлам транспортной системы соответствуют вершины графа, а ребрам – отрезки дорог, соединяющие соответствующие узлы транспортной системы. В качестве критериев оптимизации выступают основные экономические и социальные требования, предъявляемые к транспортной системе. Требуется выделить такую систему маршрутов, оптимальную по заданным критериям, чтобы каждый узел транспортной системы входил хотя бы в один маршрут. *Результаты*: предложен эффективный алгоритм, позволяющий автоматизировать бизнес-процессы, связанные с оптимизацией планированием и организацией маршрутов в крупномасштабной транспортной сети. Построена компьютерная реализация предложенного алгоритма на примере автотранспортной сети России, включающей 15360 транспортных узлов. Апробация построенного алгоритма показывает снижение вычислительной сложности при на-

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта. 17-06-00282 А и 17-02-00475-ОГН

хождении оптимальных маршрутов в сравнении с классическими методами.

Ключевые слова: крупномасштабные транспортные сети, организация маршрутов, предфрактальный граф, интервальные веса, многокритериальная дискретная оптимизация.

DOI: 10.17308/meps.2019.12/2063

1. Введение

Одной из важных задач при организации транспортных маршрутов в крупномасштабной транспортной сети является задача проектирования системы маршрутов особого вида, позволяющей попасть из любого узла транспортной системы в любой другой при ограничениях, накладываемых на время, длину пути, число пересадок и т.д. Как правило, при проектировании таких задач разного рода ограничения, выступающие в качестве критериев, не позволяют выбрать одну систему маршрутов, оптимальную по всем заданным критериям [1]. В этом случае целесообразней решение осуществлять из множества несравнимых альтернатив.

При планировании маршрутов в крупномасштабной транспортной сети [2-5] часто приходится работать с недетерминированными входными данными, что связанно с невозможностью точно оценить исходные данные реальных транспортных систем из-за экспертных рассуждений или погрешностей в измерениях. Эти данные часто приобретают вид интервальных чисел, меняющихся в области между заданными граничными значениями. Попытки задать однозначные (детерминированные) данные для оцениваемой системы приводят к неверному результату, вследствие чего из-за огрубления исходных данных происходит потеря информативности. В качестве примера интервальных значений в транспортной сети может выступать интервал времени доставки товара или транспортные расходы с указанием минимального и максимального значения на доставку из определенного пункта в заданный пункт.

В работах [2, 3] представлена методика решения задачи организации маршрутов в крупномасштабной транспортной сети с учетом экономических требований, заданных в виде критериев, позволяющих оценивать найденную систему маршрутов с детерминированными данными. Моделью такой задачи является многокритериальная задача выделения на предфрактальном графе простых цепей [3]. Эта задача включает в себя правило построения множества допустимых решений, многокритериальную функцию оценки решений с заданными критериями и правила сравнения и выбора альтернативных решений [6]. В качестве решения этой задачи выступает множество несравнимых альтернатив. Однако с учетом недетерминированности данных эта задача выбора с учетом многокритериальности становится более сложной в связи со сравнением интервальных значений, обобщением понятия оптимальной альтернативы и отыскания методов ее решения [7].

В качестве модели крупномасштабной транспортной сети будем использовать предфрактальные графы [3, 8, 9]. Вершинам предфрактального графа соответствуют узлы транспортной системы (населенные пункты, промышленные объекты, станции). Ребрам – отрезки дорог, соединяющих узлы транспортной системы. Каждому ребру *e* ставится в соответствие некоторое число (в случае детерминированных данных) *w(e)*, обозначающее транспортные расходы или ограничения на перевозку между узлами, соединяющими это ребро. Преимуществами использования предфрактальных графов является простота и естественность представления крупномасштабной карты дорог [3].

2. Постановка задачи с недетерминированными данными

Постановка многокритериальной задачи на предфрактальных графах с недетерминированными весами отличается от постановки аналогичной задачи с детерминированными весами. В дальнейшем в качестве недетерминированности весов будут рассматриваться интервальные значения.

Обозначим через $G_L=(V_L,E_L)$ предфрактальный граф [9], порожденный множеством затравок $\mathrm{H}=\{H=(W,Q)\}$, где $|W|=n$ – множество вершин, ребер $|Q|=q$ – ребер затравки [5]. Поставим в соответствие всякому ребру $e^{(l)}\in E_L$ некоторый интервал $w(e^{(l)})=[\underline{w},\overline{w}]$ вещественных чисел, называемый интервальным весом. Экономический смысл интервального веса ребра – варьируемое значение транспортных расходов между двумя узлами соединяемых этим ребром. Предфрактальный граф $G_L=(V_L,E_L)$, в котором каждому ребру $e^{(l)}\in E_L$ поставлено в соответствие интервальное число $w(e^{(l)})=[\underline{w},\overline{w}]\subseteq[\theta^{l-1}a,\theta^{l-1}b]$, назовем интервально-взвешенным, где $l=\overline{1,L}$ – ранг ребра, $a>0, b>0, \theta\in(0,1)$ – коэффициент подобия.

В качестве интервальных операций используют интервальную арифметику [10].

На множестве допустимых решений (МДР) $X=X(G_L)=\{x\}$, $x=(V,E_x), E_x\subseteq E_L$ состоящем из всевозможных покрытий интервально-взвешенного предфрактального графа G_L простыми пересекающимися цепями, задается векторно-целевая функция (ВЦФ):

$$\mathrm{F}(X)=\{F(x)=(F_1(x),F_2(x),F_3(x),F_4(x),F_5(x)), x\in X\}, \tag{1}$$

$$F_1(x)=\sum_{e\in E_x} w(e)\to\min, \tag{2}$$

где $\sum_{e\in E_x} w(e)$ – сумма всех ребер, входящих в покрытие x;

$$F_2(x)=\min_{k=\overline{1,K}} w(C_k)\to\max, \tag{3}$$

где $w(C_k)$ – длина максимальной цепи из покрытия $x\in\{C_1,C_2,\dots,C_k,\dots,C_K\}$.

$$F_3(x)=N(x)\to\min, \tag{4}$$

где $N(x)$ – число всех максимальных цепей в покрытии x;

$$F_4(x)=i\to\min, \tag{5}$$

для любой смешенной цепи C^i из покрытия x.

$$F_5(x) = \left|\rho_x(u,v) - \rho_{G_L}(u,v)\right| \to \min, \qquad (6)$$

где $\rho_x(u,v)$ – расстояние между любыми вершинами $u,v \in V_L$ проходящее через ребра, принадлежащие покрытию x, а $\rho_{G_L}(u,v)$ – расстояние между любыми вершинами $u,v \in V_L$ в графе G_L.

Каждый из критериев (2)-(6) – это формальный параметр, имеющий строгую интерпретацию в приложении к транспортным системам [1]. Критерий (2) минимизирует расходы при эксплуатации транспортной системы. Критерий (3) направлен на ограничения, связанные с длиной маршрутов, т.к. на практике очень важно, чтобы маршрут строился таким образом, чтобы длина между его конечными остановками была наименьшей. Критерий (4) позволяет уменьшить общее число всевозможных маршрутов движения транспорта. Критерий (5) отвечает за региональную дифференциацию транспортных маршрутов для обеспечения удобства администрирования транспортной системы. Критерий (6) позволяет уменьшать количество узлов на пути следования транспорта до конечного пункта назначения.

Результатом решения задач многокритериальной дискретной оптимизации является выделение множества несравнимых альтернатив, которое можно сократить методами теории принятия решений.

Множество альтернатив включает в себя: МДР *X*; наборов несравнимых альтернатив, называемых паретовским множеством $\tilde{X}$; полное множество альтернатив X^0, $X^0 \subseteq \tilde{X}$, являющееся минимальным по мощности, т.е. $|X^0| : F(X^0) = F(\tilde{X})$. Для них справедливо включение $X^0 \subseteq \tilde{X} \subseteq X$.

Главная проблема решения многокритериальных задач дискретной оптимизации состоит в нахождении эффективных алгоритмов поиска множества альтернатив.

При вычислении ВЦФ $\mathrm{F}(X)$ (1) для нахождения допустимых решений $X = \{x_i\}, i = \overline{1,m}$ по критерию $F_1(x)$ (2), при работе с интервалами, применяется суммирование граничным методом [10]. В них для заданных интервалов $w_1(e) = [\underline{w}_1(e), \overline{w}_1(e)]$, $w_2(e) = [\underline{w}_2(e), \overline{w}_2(e)]$ сумма вычисляется по формуле:

$$w_1(e) + w_2(e) = [\underline{w}_1(e) + \underline{w}_2(e), \overline{w}_1(e) + \overline{w}_2(e)]. \qquad (7)$$

В результате критерий $F_1(x)$ (2) принимает вид:

$$F_1(x) = [\sum_{e \in E_x} \underline{w}(e), \sum_{e \in E_x} \overline{w}(e)] \to \min. \qquad (8)$$

Результатом целевой функции $F_2(x)$ (3) с интервальными данными является интервал, получаемый при помощи операции сравнения интервалов:

$$F_2(x) = \min_{k=\overline{1,K}} \{[\underline{w}(C_k), \overline{w}(C_k)]\} \to \max. \qquad (9)$$

В случае интервальных весов для определения оптимальности используют разные способы [7, 11]. В этой работе используется паретовское определение оптимальности. Для этого вычисляются интервальные значения по критериям (8)-(9) для оценки качества МДР $x \in X$.

Для сравнения решений $x_1, x_2 \in X$ при интервальных целевых функциях (8)-(9) допустимое решение x_1 назовем лучше x_2 ($x_1 \prec x_2$), если в (8)-(9) при минимизируемой целевой функции справедливо неравенство $F_1(x_1) \geq F_1(x_2)$, а при максимизируемой функции $F_2(x_1) \geq F_2(x_2)$ и хотя бы одно из этих неравенств – строгое. Решения x_1, x_2 являются эквивалентными, если $F(x_1) = F(x_2)$, в противном случае – несравнимыми.

Парето оптимальное решение $\tilde{x} \in X$, в таком случае определяется как $x \prec \tilde{x}$ при отсутствии элемента $x \in X$.

Полное множество альтернатив X^0 – минимальное по включению подмножество паретовского множества $\tilde{X}$.

Для двух интервалов $w_1(e) = [\underline{w}_1(e), \overline{w}_1(e)]$, $w_2(e) = [\underline{w}_2(e), \overline{w}_2(e)]$ бинарное отношение $\subset$ строгого включения $w_1(e) \subset w_2(e)$ означает выполнение $\underline{w}_2(e) < \underline{w}_1(e)$ и $\overline{w}_1(e) < \overline{w}_2(e)$.

3. Методика решения

Рассмотрим взвешенный интервальными весами предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, где $|W| = n$. Обозначим через β_1^{int} алгоритм, работающий на графе G_L с интервальными весами, который выделяет на нем остовное дерево $T = (V_L, E_T)$ минимального веса (ОДМВ) [12].

Основная идея алгоритма β_1^{int} заключается в том, что он работает на каждой подграф-затравке $z_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$, из множества $Z(G_L)$ отдельно. Таким образом, выполняется $\dfrac{n^L - 1}{n - 1}$ процедур, соответствующих количеству подграф-затравок, на каждой из которых выделяется ОДМВ $T_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{T_s^{(l)}})$. Объединение всех ОДМВ на каждой из подграф-затравок $z_s^{(l)}$ строит ОДМВ для предфрактального графа G_L.

АЛГОРИТМ β_1^{int}

Вход: взвешенный интервальными весами предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ с заданным вектором коэффициентов важности границ интервалов (λ_1, λ_2).

Выход: ОДМВ $T = (V_L, E_T)$.

Шаг 1. На предфрактальном графе G_L выделить множество подграф-затравок $Z(G_L) = \{z_s^{(l)}\}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$. Провести нумерацию всех ребер G_L с учетом принадлежности к множеству $Z(G_L)$.

Шаг 2. Выделить на каждой подграф-затравке $z_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$, из $Z(G_L)$, применяя алгоритм Прима [12], ОДМВ $T_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{T_s^{(l)}})$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$.

Шаг 3. В результате выполнения шага 2 выделяется множество из $\dfrac{n^L - 1}{n - 1}$ ОДМВ $T_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{T_s^{(l)}})$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$. Объединив эти множества, получаем ОДМВ $T = (V_L, E_T)$ ◄

Теорема 1. Алгоритм β_1^{int} строит на взвешенном интервальными весами предфрактальном $G_L = (V_L, E_L)$ графе ОДМВ $T = (V_L, E_T)$.

Теорема 2. Вычислительная сложность алгоритма β_1^{int}, выделяющего ОДМВ $T = (V_L, E_T)$ на интервально взвешенном предфрактальном (n, L)-графе $G_L = (V_L, E_L)$, с затравкой $H = (W, Q)$, $|W| = n$, $|V_L| = N = n^L$, равна $O(2Nn^2)$.

В случае, когда алгоритм β_1^{int} выделяет ОДМВ $x_1 = T = (V_L, E_T)$, на интервально взвешенном предфрактальном (n, L)-графе $G_L = (V_L, E_L)$, которое совпадает с гамильтоновой цепью предфрактального графа, то покрытие x_1 является оптимальным по критериям $F_1(x)$ и $F_3(x)$: $F_1^0(x_1) = \min_{x \in X} F_1(x)$, $F_3^0(x_1) = \min_{x \in X} F_3(x)$.

Теорема 3 демонстрирует оценки работы алгоритма β_1^{int}, выделяющего покрытие x_1 для критериев (4) и (6), не являющихся оптимизируемыми.

Теорема 3. Алгоритм β_1^{int} строит на интервально взвешенном предфрактальном (n, L)-графе $G_L = (V_L, E_L)$, с затравкой $H = (W, Q)$ покрытие $x_1 = T = (V_L, E_T)$, являющееся оптимальным по критерию $F_1^0(x_1) = \min_{x \in X} F_1(x)$, и с оценками по следующим критериям: $F_3(x_1) \in [1; n^{L-1}(n-1)]$, и $F_5(x_1) \in [0; n^L - 2]$.

4. Апробация и результаты

Компьютерная реализация работы алгоритма β_1^{int} апробировалась на автотранспортной сети РФ, соединяющей 15360 узлов транспортной системы с выделением маршрутов оптимальных по критерию (2).

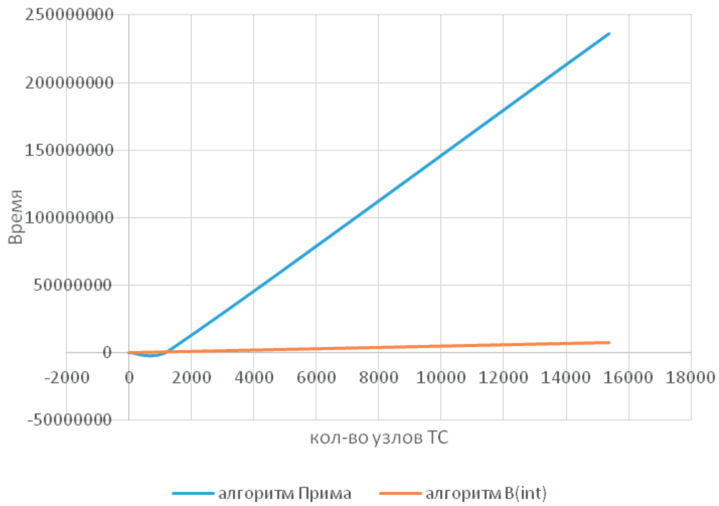

Рис. 1. Сравнение вычислительной сложности реализации алгоритма β_1^{int} с алгоритмом Прима

На рис. 1 представлены кривые вычислительной сложности реализации алгоритмов Прима и β_1^{int} для моделирования транспортной сети автодорог России посредством предфрактального графа $G_4 = (V_4, E_4)$ ранга

L=4. Где предфрактальному графу ранга *L=1* соответствует карта дорог, соединяющих федеральные округа (ФО). Ребра предфрактального графа, появившиеся на ранге *L=2,* соответствуют дорогам, соединяющим края или республики, входящие в состав ФО. На ранге *L=3* в качестве ребер рассматриваются дороги, соединяющие территориальные единицы, входящие в края или республики, т.е. районы, области. На ранге *L=4* ребрам соответствуют дороги между населенными пунктами каждого из рассматриваемого района или области, а вершинам – населенные пункты.

Сравнив алгоритмы Прима и β_1^{int} на $G_4 = (V_4, E_4)$ при количестве узлов транспортной сети 15360, вычислительная сложность β_1^{int} в 30 раз меньше алгоритма Прима.

Таким образом, предложен эффективный алгоритм, позволяющий автоматизировать бизнес-процессы, связанные с оптимизацией планирования и организации маршрутов в крупномасштабной транспортной сети.

Список источников

1. Экономика пассажирского транспорта: учеб. пособие / Под общей ред. проф. В.А. Персианова. Москва, КНОРУС, 2012.
2. Павлов Д.А., Лойко В.И., Ковалева К.А. Оптимизация эксплуатационных затрат при планировании маршрутов в крупномасштабных транспортных сетях // *Современная экономика: проблемы и решения*, 2018, no. 8 (104), с. 8-16.
3. Павлов Д.А. Моделирование крупномасштабной транспортной сети предфрактальными графами // *Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ)*. Краснодар, КубГАУ, 2017, no. 07 (131), с. 1035-1045.
4. Handbook of Optimization in Complex Networks. Theory and Applications / M.T. Thai, P.M. Pardalos (eds.) // *Springer*, 2012.
5. Danila B., Yu Y., Marsh J. A. & Bassler K. E. (2006). *Optimal transport on complex networks.* Physical Review E, 74(4), 046106.
6. Перепелица В.А. Многокритериальные модели и методы для задач оптимизации на графах // *LAP LAMBERT Academic Publication*, 2013.
7. Тебуева Ф.Б. *Математические модели и методы для задач многокритериального выбора на графах в условиях недетерминированности исходных данных*: дис. … д-ра ф.-м. наук. Ростов н/Д: ЮФУ, 2014.
8. Кочкаров Р.А. *Многовзвешенные предфрактальные графы с недерминированными весами. Приложения в экономике, астрофизике и сетевых коммуникациях*. Москва, ЛЕНАНД, 2017.
9. Кочкаров А.М. *Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход.* Нижний Архыз, Изд. центр «CYGNUS», 1998.
10. Назаренко Т.И., Марченко Л.В. *Введение в интервальные методы вычислительной математики*. Иркутск, Изд-во Иркутского университета, 1982.
11. Шарый С.П. *Конечномерный интервальный анализ.* Новосибирск, Институт вычислительных технологий СО РАН, 2013.
12. Лекции по теории графов: учеб. пособие / В.А. Емеличев [и др.]. Москва, Наука, 1990.

OPTIMIZATION OF TRANSPORTATION IN A LARGE-SCALE TRANSPORT NETWORK TAKING INTO ACCOUNT NON-DETERMINED DATA[1]

Loyko Valery Ivanovich, Dr. Sc. (Tehn.), Full Prof.
Pavlov Dmitry Alekseevich, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.
Yahontova Irina Mihaylovna, Cand. Sc. (Econ.), Assoc. Prof.

Kuban State Agrarian University. I.T. Trubilina, Kalinina st., 13, Krasnodar, Russia, 350044; e-mail: dp.logic@gmail.com

Purpose: the authors develop a multi-criteria discrete model of the planning problem and organizing passenger or freight transportation routes in large-scale transport networks, which allows optimization based on non-deterministic data. *Discussion*: the authors present a methodology for solving the problem of planning optimal routes in a large-scale transport network, taking into account a number of economic requirements specified in the form of criteria that allow one to evaluate the found route system with non-deterministic data. Authors consider interval estimates as non-deterministic data. Consideration in the task of optimizing non-deterministic data will allow a more adequate assessment of real transport systems. The model of the presented problem is the multicriteria problem of isolating simple chains on a prefractal graph. In this model in the form of a pre-fractal graph a large-scale transport network appears, where the nodes of the transport system correspond to the vertices of the graph, and the edges represent segments of roads connecting the corresponding nodes of the transport system. The optimization criteria are the main economic and social requirements for the transport system. It is required to select such a route system that is optimal according to the given criteria so that each node of the transport system is included in at least one route. *Results*: the authors proposed an effective algorithm that allows automate business processes related to the optimization of planning and routes in a large-scale transport network. In addiction the authors constructed a computer implementation of the proposed algorithm on the example of the motor transport network of Russia, including 15360 transport nodes. Testing the constructed algorithm shows a decrease in computational complexity when finding optimal routes in comparison with classical methods.

Keywords: large-scale transport networks, organization of routes, pre-fractal graph, interval weights, multicriteria discrete optimization.

[1] The authors performed this research with financial support Russian Foundation for Basic Research (RFBR) in the framework of a scientific project no. 17-06-00282 A, 17-02-00475-ОГН.

References

1. Ekonomika passazhirskogo transporta [Economy of passenger transport]: ucheb. posobie / Pod obshchey red. prof. V.A. Persianova. Moscow, KNORUS, 2012. (In Russ.)

2. Pavlov D.A., Loyko V.I., Kovaleva K.A. Optimizatsiya ekspluatatsionnykh zatrat pri planirovanii marshrutov v krupnomasshtabnykh transportnykh setyakh [Optimization of operational costs in route planning in large-scale transport networks]. *Sovremennaya ekonomika: problemy i resheniya*, 2018, no. 8 (104), pp. 8-16. (In Russ.)

3. Pavlov D.A. Modelirovanie krupnomasshtabnoy transportnoy seti predfraktalynymi grafami [Simulation of large-scale transport network by prefractal graphs]. *Politematicheskiy setevoy elektronnyy nauchnyy zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyy zhurnal KubGAU)*. Krasnodar, KubGAU, 2017, no. 07 (131), pp. 1035-1045. (In Russ.)

4. Handbook of Optimization in Complex Networks. Theory and Applications / M.T. Thai, P.M. Pardalos (eds.). *Springer*, 2012.

5. Danila B., Yu Y., Marsh J.A. & Bassler K. E. (2006). *Optimal transport on complex networks.* Physical Review E, 74(4), 046106.

6. Perepelitsa V.A. Mnogokriterialynye modeli i metody dlya zadach optimizatsii na grafakh. *LAP LAMBERT Academic Publication*, 2013. (In Russ.)

7. Tebueva F.B. *Matematicheskie modeli i metody dlya zadach mnogokriterialynogo vybora na grafakh v usloviyakh nedeterminirovannosti iskhodnykh dannykh*: dis. … d-ra f.-m. nauk. Rostov n/D, JuFU, 2014. (In Russ.)

8. Kochkarov R.A. *Mnogovzveshennye predfraktalynye grafy s nedeterminirovannymi vesami* [Multiweighted pre-fractal graphs with nondeterministic weights]. Prilozheniya v ekonomike, astrofizike i setevykh kommunikatsiyakh. Moscow, LENAND, 2017. (In Russ.)

9. Kochkarov A.M. *Raspoznavanie fraktalynykh grafov. Algoritmicheskiy podkhod* [Recognition of fractal graphs. An algorithmic approach]. Nizhniy Arkhyz, Izd. tsentr «CYGNUS», 1998. (In Russ.)

10. Nazarenko T.I., Marchenko L.V. *Vvedenie v intervalynye metody vychislitelynoy matematiki* [Introduction to interval methods of computational mathematics]. Irkutsk, Izd-vo Irkutskogo universiteta, 1982. (In Russ.)

11. Sharyy S.P. *Konechnomernyy intervalynyy analiz.* Novosibirsk, Institut vychislitelynykh tekhnologyy SO RAN, 2013. (In Russ.)

12. Lektsii po teorii grafov [Lectures on graph theory]: ucheb. posobie / V. A. Emelichev [i dr.]. Moscow, Nauka, 1990. (In Russ.)