УДК 336.6(075.8)

МУЛЬТИТРЕНДОВЫЙ ПОДХОД К ВЫБОРУ И ОЦЕНКЕ СТОИМОСТИ ОПЦИОНОВ

Давнис Валерий Владимирович,
доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета; vdavnis@mail.ru

Касаткин Сергей Евгеньевич,
ассистент Московского государственного университета им. Ломоносова; k_s_e@rambler.ru

Коротких Вячеслав Владимирович,
аспирант кафедры информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета; v.v.korotkikh@gmail.com

Рассматриваются вопросы, связанные с использованием результатов теории деривативов в организации биржевой торговли опционами. Отмечается, что инструменты, которые предлагает теория и которые используются биржей, обеспечивают инвесторов равными возможностями без указания ориентиров наиболее предпочтительного выбора. Предлагается инвесторам по аналогии с биржей, торгующей одним и тем же опционом, но с разными страйками, приобретать не один, а несколько опционов, ориентируясь не на риск-нейтральные оценки, а на риск-трендовые. Показана зависимость риск-трендовых оценок от уровня, на котором находится текущий тренд.

Ключевые слова: опцион, полный финансовый рынок, риск-нейтральная цена, риск-трендовая цена, формула Кокса – Росса – Рубинштейна, несимметричный риск.

Современная теория деривативов является основой для биржевой торговли опционами. Она позволяет понять необходимость создания ситуации полного рынка, в рамках которого удается получить риск-нейтральную стоимость опциона, часто называемую «справедливой» ценой. Несмотря на то, что справедливую цену понимают как теоретическую, являющуюся аналогом равновесной цены, по которой товар не продается и не покупается, биржи эту теоретическую цену используют в своей практической деятельности.

Расчет теоретической цены опционов обычно осуществляют с помощью модифицированной формулы Блэка–Шоулза [5]. Модификация предусматривает введение дополнительных параметров, обеспечивающих возможность подбора такого значения «подразумеваемой» волатильности, которое обеспечивает высокую точность расчетной величины текущей цены опциона. Но даже рамки этого подхода, наделяющие, по сути, формулу Блэка-Шоулза адаптивными свойствами, устраивают только биржу и, к сожалению, не всегда обеспечивают получение результатов, которыми могли бы пользоваться инвесторы в своей практической деятельности. По всей видимости, для решения вопросов, затрагивающих интересы инвесторов и связанных с обоснованием инвестиционных решений, необходимы новые идеи, позволяющие, несмотря на введенный термин «справедливая» цена, критически отнестись к монопольному положению риск-нейтральной цены опциона. Начало исследований в этом направлении было положено работой [1], в которой был введен термин риск-трендовая стоимость опциона и предложена модель для формирования таких оценок. Основой для реализации этого подхода стала регрессионная модель (B,S)-рынка [2], которая по существу является эконометрическим вариантом биномиальной модели [4], в котором реализована идея описания механизма формирования доходности акции, предложенная Башелье.

Выяснение возможностей формирования риск-трендовой цены опциона начнем с рассмотрения биномиальной модели. Биномиальная модель строится в предположении, что финансовые операции на рынке осуществляются только с двумя активами: банковским счетом $B=(B_t)_{t\geq 0}$ и одной акцией, цену которой будем обозначать $S=(S_t)_{t\geq 0}$. Такой рынок называют биномиальным, обозначают как (B,S)– рынок и эволюцию цен на этом рынке описывают двумя уравнениями

$$B_t=(1+r_t)B_{t-1}, \tag{1}$$

$$S_t=(1+\rho_t)S_{t-1}. \tag{2}$$

Предполагается, что в модели (1) – (2) банковская ставка r_t не измена, а доходность акции $\rho=(\rho_t)_{t\geq 1}$ является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин $\rho_1,\rho_2,\ldots,$ которые могут принимать два значения r_d и r_u ($r_d<r_u$) с вероятностями $p=\mathrm{P}(\rho_t=r_u)$ и $q=\mathrm{P}(\rho_t=r_d)$. Эта модель используется при установлении величины риск-нейтральной цены опциона.

Трудность в определении цены опциона порождается природой самого опциона. Оценивается стоимость возможности, которая предоставляется владельцу опционного контракта и которой он может воспользоваться, а может, эта возможность ему не потребуется. Материальным носителем цены этой возможности, естественно, считается базовый актив, т.е. актив, стоимость которого хеджируется опционом. Поэтому было предложено риск-нейтральную цену опциона определять стратегией минимального хеджирования, т.е. стоимостью специально сформированного портфеля, содержащего базовый актив. Для текущего момента времени этот портфель, обозначаемый (n, B), кроме базового актива, содержит заемные средства. Причем формируется он таким образом, чтобы выплаты по нему были аналогичны выплатам по опциону, т.е.

$$nS_t - B = c_0, \tag{3}$$

где c_0 – стоимость опциона в момент заключения контракта; n – количество акций, включенных в портфель (не обязательно целое); S_t – цена акции в момент заключения опционного контракта; B – сумма кредита.

В соответствии с эволюцией стоимости активов, включенных в портфель, стоимость этого портфеля в следующем периоде будет определяться в зависимости от ситуации одним из уравнений системы

$$nS_t\rho_u - RB = c_u, \tag{4}$$

$$nS_t\rho_d - RB = c_d, \tag{5}$$

где c_u – стоимость опциона (и одновременно стоимость портфеля) в случае роста цены акции; c_d – стоимость опциона (и одновременно стоимость портфеля) в случае падения цены акции; $\rho_u = 1 + r_u$ – множитель роста цены акции; $\rho_d = 1 + r_d$ – множитель падения цены акции; R – множитель наращения по безрисковой процентной ставке.

Чтобы определить состав портфеля, который имеет стоимость, равную цене опциона, необходимо знать *n* и *B*. Эти величины определяются по методу Крамера из системы (4) – (5)

$$n = \frac{c_u - c_d}{(\rho_u - \rho_d)S}, \quad B = \frac{\rho_d c_u - \rho_u c_d}{(\rho_u - \rho_d)R}. \tag{6}$$

С помощью полученного решения очевидным образом получается первоначальная стоимость опциона

$$c_0 = \left[\left(\frac{R - \rho_d}{\rho_u - \rho_d}\right)c_u + \left(\frac{\rho_u - R}{\rho_u - \rho_d}\right)c_d\right] / R. \tag{7}$$

Таким образом, формула (7) позволяет сделать вывод, что цена опциона в момент заключения опционного контракта равна дисконтированной стоимости взвешенных выплат, которые ожидаются в конце периода. В самой формуле не содержится переменных, которые учитывали бы отношение инвестора к риску. В силу этого получаемый расчет по этой формуле позволяет определить оценку стоимости опциона, понимаемую как стоимость в экономике, в которой действуют инвесторы, нейтральные к риску. Сумма весовых коэффициентов в (7) равна единице, что с учетом нейтральности к риску инвесторов позволяет их интерпретировать как риск-нейтральные вероятности.

Риск-нейтральная оценка стоимости опциона получается с помощью, так называемого, биномиального дерева. Смысл построения этого дерева в том, чтобы увидеть весь перспективный горизонт возможных вариантов эволюции цен базисного актива и рассчитать стоимость опциона с учетом всех предусмотренных биномиальным деревом вариантов. Фактически риск-нейтральная цена опциона – это математическое ожидание случайной величины, распределенной по биномиальному закону с риск-нейтральными вероятностями, т.е.

$$c = \left[\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \max(0; \rho_u^j \rho_d^{n-j} S - X) \right] / R^n . \qquad (8)$$

Предельное значение, получаемое по этой формуле, совпадает с оценкой, рассчитываемой по формуле Блека–Шоулза. Несмотря на практическое использование этих оценок, они получаются в идеальных условиях полного рынка, гарантирующего единственность риск-нейтральной вероятности. На наш взгляд, понятие полного рынка является абстракцией. Оно необходимо для понимания механизма определения справедливой цены и использования ее как барьера, отделяющего спрос от предложения, что является важным моментом биржевой торговли опционами, но не пригодным для решения задач, которые стоят перед инвестором.

Каждый раз принимая решение, инвестор, по крайней мере, должен определить, с каким страйком он покупает опцион, и целесообразность цены, которую имеет смысл платить за опцион с выбранным страйком.

Естественно, для решения этих задач необходимы шаги по расширению теории оценивания опционов, основанные на ослаблении требований к свойствам, которым должен удовлетворять фондовый рынок. Прежде всего, следует признать реальность того, что инвестор не безразличен к риску и живет в мире трендов, с которыми необходимо считаться при обосновании принимаемых решений. Более того, трендов много, они сменяют друг друга, выстраивая единственную траекторию прошлого с одновременным формированием многовариантной неопределенности будущего. Прошлое, как и будущее, многовариантно, но его варианты распределены во времени в отличие от вариантов будущего, которые концентрируются в каждом наступающем моменте времени. Из этого следует, что описание будущего должно быть основано на мультитрендовом подходе с использованием прошлого для идентификации возможных вариантов развития динамики в будущем.

Эконометрическая модель, с помощью которой предполагается формировать варианты динамики цен на базовый актив, в некотором смысле, по нашему мнению, должна являться аналогом уравнения, предложенного Башелье

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} , \qquad (9)$$

где μ – средний уровень доходности; Δt – небольшой отрезок времени, на котором эта модель имеет смысл; σ – риск, измеренный среднеквадратическим отклонением; ε – случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение.

Первое слагаемое этого уравнения представляет собой непрерывную составляющую, с помощью которой рассчитывается ожидаемый уровень доходности акции, а с помощью второго слагаемого определяется величина риска, которая в каждый момент времени изменяет уровень ожидаемой доходности в зависимости от знака и значения случайной величины ε. Если следовать реализованной в (9) идее, то эконометрическая модель должна иметь дискретно-непрерывную природу, которую можно записать в виде:

$$S_t = a_0 + a_1 S_{t-1} + d\, x_t + \delta_t, \tag{10}$$

где S_t – стоимость базисной акции в момент времени *t*; a_0, a_1 – оцениваемые параметры той части модели, которая отвечает за тренд уровня стоимости базисной акции; *d* – оцениваемый параметр стохастической составляющей, характеризующий средний уровень возможного отклонения фактически наблюдаемой доходности от тренда и интерпретируемый как величина риска; x_t – ненаблюдаемая дискретная переменная, принимающая случайным образом два значения: 1 или – 1; δ_t – ненаблюдаемая случайная величина, характеризующая ту часть вариации моделируемой переменной, которая не объясняется включенными в модель регрессорами.

Модель (10) позволяет идентифицировать только два варианта возможных трендов. Каждая дискретная переменная, принимающая два значения и вводимая в модель, позволяет удваивать число моделируемых вариантов. В обобщенном виде дискретно-непрерывная модель записывается следующим образом:

$$S_t = a_0 + a_1 S_{t-1} + \mathbf{d}\,\mathbf{x}'_t + \delta_t, \tag{11}$$

где $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k)'$ – вектор оцениваемых параметров; $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt})'$ – вектор независимых дискретных переменных, принимающих значения +1 и –1.

Упростим ситуацию и будем рассматривать случай *k*=2. Выпишем для этой ситуации, используя оцененную модель, все возможные случаи по аналогии с построением прогнозного образа [3]. Их четыре

$$S_t = a_0 + a_1 S_{t-1} + d_1 + d_2 \tag{12}$$

$$S_t = a_0 + a_1 S_{t-1} + d_1 - d_2 \tag{13}$$

$$S_t = a_0 + a_1 S_{t-1} - d_1 + d_2 \tag{14}$$

$$S_t = a_0 + a_1 S_{t-1} - d_1 - d_2. \tag{15}$$

Применяемая для построения этой модели многоступенчатая процедура такова, что всегда $d_1 > d_2 > 0$. Опираясь на это неравенство, можно без труда интерпретировать тренды. В рассматриваемой ситуации тренд (12) можно интерпретировать как высокий, (13) – выше среднего, (14) – ниже среднего, (15) – низкий тренд. В качестве примера рассмотрим оцененную мультитрендовую модель для акций Сбербанка:

$$S_t = 1{,}00289 S_{t-1} + 1{,}61686 x_{1t} + 1{,}06560 x_{2t}$$
$$(0{,}00094) \quad (0{,}10053) \quad (0{,}10130).$$

Естественно предположить, что величина скачков, необходимых для построения CRR-модели, зависит от того, в соответствии с каким трендом эволюционирует стоимость актива. Поэтому для каждого тренда определяются эти скачки в виде средней величины положительных отклонений от соответствующего тренда и средней величины отрицательных отклонений от этого же тренда на историческом периоде. Отклонения для каждого тренда приведены в табл. 1.

Таблица 1

Величины скачков в зависимости от уровня тренда

Скачки	Тренды			
	высокий	выше среднего	ниже среднего	низкий
Вверх	0,54275	1,203421	1,464716	2,701655
Вниз	-3,21572	-1,51285	-0,99536	-1,10684

На основе средних скачков определяются множители роста цены ρ_{uk} и множители ее падения ρ_{dk}. Величины этих множителей приведены в табл. 2.

Таблица 2

Множители наращения в зависимости от тренда

Множители наращения	Тренды			
	высокий	выше среднего	ниже среднего	низкий
Тренд	1,002147	1,001648	1,001387	1,000233
Вверх	1,007414	1,013573	1,016061	1,000533
Вниз	0,97094	0,986657	0,991415	0,999467

Если ввести в рассмотрение множитель наращения по *k*-му тренду R_k (значения верхней строки табл. 2), то в рамках CRR-модели можно определить риск-трендовые вероятности

$$p_k = \frac{R_k - \rho_{dk}}{\rho_{uk} - \rho_{dk}}, \qquad (16)$$

расчетные значения которых приведены в табл. 3.

Таблица 3

Риск-трендовые вероятности

Вероятность скачка	Тренды			
	высокий	выше среднего	ниже среднего	низкий
Вверх	0,855593	0,556958	0,404606	0,290623
Вниз	0,144407	0,443042	0,595394	0,709377

Расчеты по формуле (8) с использованием риск-трендовых вероятностей из таблицы 3 позволяют получить соответственно риск-трендовые оценки стоимости опциона. Для рассматриваемого примера эти оценки приведены в табл. 4.

Таблица 4

Риск-трендовые оценки стоимости опциона колл

Тренды	Страйк						
	98	100	102	104	106	108	110
Высокий	9,61E-15	3,19E-15	2,46E-16	1,15E-16	7,81E-18	3,56E-18	1,99E-19
Выше среднего	2,643158	1,832683	1,1999	0,783927	0,491643	0,284305	0,161499
Ниже среднего	24,07586	22,07791	20,08361	18,09702	16,12371	14,17183	12,27602
Низкий	71,71493	69,71493	67,71493	65,71493	63,71494	61,71495	59,71497

Получилось четыре варианта оценок. По замыслу, все они должны отличаться от риск-нейтральной цены, позволяя инвестору определять ориентиры своего выбора в зависимости от доминирующего на фондовом рынке тренда. Вытекающие из проведенных расчетов ориентиры оказались несколько неожиданными, хотя вполне объяснимыми. Самая низкая стоимость опциона оказалась для случая, когда в момент заключения контракта стоимость базового актива эволюционировала в соответствии с самым высоким трендом. Объясняется это тем, что несмотря на высокую вероятность дальнейшего повышения стоимости актива, величина этого повышения небольшая, а следовательно потери инвестора от того, что он вовремя не защитил планируемую покупку от возможного повышения цены, могут оказаться ниже самого повышения.

Для опциона пут результат аналогичен, но имеет противоположный смысл: при высоком тренде самая высокая стоимость опциона.

Особенность предложенного подхода не только в реализации возможности определения риск-трендовых оценок стоимости опционов, но и в том, что расчеты с использованием разноуровневых трендов обнажают проблему несимметричных рисков, которые имеют место на фондовом рынке и влияние которых на стоимость опционов требует специального изучения.

Список источников

1. Давнис, В.В. Моделирование риск-трендовых оценок стоимости опционов [текст] / В.В. Давнис, С.Ю. Богданова // Современная экономика: проблемы и решения. – Воронеж, 2010. – № 1. – С. 119 – 129.
2. Давнис, В.В. Эконометрический вариант биномиальной модели эволюции цен на финансовом рынке [текст] / В.В. Давнис, П.В. Сурков // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2007. – № 3. – Т. 2. – С. 144 – 150.
3. Давнис, В.В. Трекинг-анализ и план альтернативных решений [текст] / В.В. Давнис, Н.Ю. Сивцова // Современная экономика: проблемы и решения. – Воронеж, 2013. – № 7 (43) – С. 108 – 115.
4. Ширяев, А.Н. Основы стохастической финансовой математики [текст] / А.Н. Ширяев. – М.: Фазис, 1998. – 1056 с.
5. Black, F. The Pricing of Options and Corporate Liabilities [текст] / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81. – P. 637 – 654.

MULTITREND APPROACH TO THE CHOICE AND ESTIMATED VALUE OF OPTIONS

Davnis Valery Vladimirovich,
Dr. Sc. of Economics, Professor, Chief of Information Technologies and Mathematical Methods in Economy department of Voronezh State University; vdavnis@mail.ru

Kasatkin Sergey Evgenyevich,
Assistant to Lomonosov Moscow State University; k_s_e@rambler.ru

Korotkikh Vyacheslav Vladimirovich,
Post-graduate student of Information Technologies and Mathematical Methods in Economy department, Voronezh State University; v.v.korotkikh@gmail.com

Issues surrounding usage of the theory derivatives resultsin the organization of exchange trade in options are considered. It is noted that tools which are offered by the theory and which are used by the exchange, provide investors with equal opportunities without indication of reference points of the most preferable choice. It is offered to investors by analogy to the exchange trading in the same option, but to different strikes to get not one, but several options,focusing not on the risk-neutral valuation, buton risk – trend. Dependence risk – trend estimates are shown from level at which there is the current trend.
Keywords: option, the full financial market, risk – the neutral price, risk – the trend price, Cox-Ross-Rubinstein option pricing model, asymmetrical risk.