

---

## О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ЛОГНОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ<sup>1</sup>

---

**Родин Владимир Александрович**<sup>1</sup>, д-р физ.-мат. наук, проф.  
**Поликарпов Евгений Сергеевич**<sup>2</sup>, канд. техн. наук

<sup>1</sup>Воронежский государственный университет, Университетская пл., 1, Воронеж, Россия, 394006; e-mail: rodin\_v@mail.ru

<sup>2</sup>Главное управление Министерства внутренних дел Российской Федерации по Красноярскому краю, ул. Дзержинского, 18, Красноярск, Россия, 660017; e-mail: binox@mail.ru

*Цель:* в работе представлены новые применения логнормального распределения для построения моделей прогноза для некоторых финансовых и экономических задач. *Обсуждение:* во введении приведены известные примеры задач, решение которых использует логнормальное распределение. Авторы показывают многообразие источников проявления логнормального распределения в различных областях жизнедеятельности человека. *Заключение:* в авторской части представлен ряд моделей, использующих логнормальное распределение, в частности модели прогрессивной шкалы налогообложения, модель работы пункта централизованной охраны, а также модель оценки величины материального ущерба от пожаров и взрывов в РФ.

**Ключевые слова:** математические модели налогообложения, логнормальное распределение, финансовый и экономический риск последствий пожаров, функция стохастического распределения, модель подоходного налога.

**DOI:** 10.17308/meps.2015.1/67

### 1. Введение

Основной задачей при построении математической модели работы или последствий случайного процесса является определение вида закона распределения [1], вернее определения достоверности предполагаемого уравнения регрессии. Эта задача предшествует построению прогностической математической модели. В данной работе, опираясь на исследования, опубликованные в работах [2-4], мы раскрываем новые факты появления и применения логнормального распределения. К удивительным фактам относится многообразие источников проявления логнормального распределения (lognormal distribution) в различных областях жизнедеятельности человека.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-01-00614-а.

В работе мы сначала приведем некоторые известные оригинальные проявления, а затем опишем авторские модели применения логнормального закона.

## 2. Примеры

1) Теория, выдвинутая Салли Ледерманом (Sully Ledermann) в 50-х годах, гласит, что употребление алкоголя распределяется (имеет вероятностное распределение) между пьющими в том или ином человеческом сообществе по логнормальной кривой и отличается только параметрами. Возобновление внимания в настоящее время к этой теме вызвано мерами контроля над алкоголем, направленным на улучшение здоровья населения России.

2) Лазерный луч CD привода преодолевает некоторое расстояние перед считыванием с диска. Разобьем это расстояние на несколько участков. На каждом таком участке интенсивность луча лазера ослабевает (например, из-за наличия пыли в воздухе), т.е. имеем коэффициент потерь. Предельный переход показывает, что итоговый (суммарный) коэффициент потерь на всем расстоянии будет распределен по логнормальному закону.

3) Для вероятностной оценки стоимости актива в теории применяют логнормальное распределение. Это обусловлено следующими причинами. Во-первых, цена актива не может быть отрицательной. Во-вторых, инфляция оказывает давление на цены в сторону их повышения, и сама временная сущность денег поддерживает это повышение: стоимость денег сегодня меньше, чем стоимость денег вчера, но больше, чем стоимость денег завтра (изменение денежной суммы во времени). Кривая логнормального распределения всегда положительна и имеет правостороннюю асимметрию, т.е. она указывает на большую вероятность цены отклониться вверх. Принято считать, что логнормальное распределение достаточно хорошо моделирует изменение цены активов, которыми торгуют на конкурентных рынках аукционного типа для длинных рассматриваемых периодов.

## 3. Новые применения логнормального распределения

1) Модель прогрессивной шкалы. Известно [1], что легальный доход в расчёте на одного налогоплательщика в России представляет собой случайную величину  $X$ , принимающую значения  $x \in [0, +\infty)$  и распределённую по логнормальному закону с плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$
 где  $\sigma \geq 0$ . В этом пункте, следуя исследованиям работы [3], рассмотрим определенную модель прогрессивной шкалы налогообложения на доходы физических лиц в России. И оценим финансовый эффект от возможного введения такого вида налога. Напомним, что в РФ до настоящего времени применяется единая (равномерная, не зависящая от величины дохода) налоговая ставка в 13%. Отметим также, что в ведущих мировых державах применяется прогрессивная шкала подоходного налога.

Например, (Интернет) для нескольких стран на 2012 г. налог с «больших заработков»: Швеция – 56,6%; Дания – 55,4%; Нидерланды, Испания – 52,0%; Австрия, Бельгия, Великобритания – 50%; Финляндия – 49,0%; Ирландия – 48%; Португалия – 46,5%; Германия и даже Греция – 45%.

Отдельно рассмотрим положения о подоходном налоге в Китае: в соответствии с действующим в 2012 г. налоговым регулированием, в Китае существует девять порогов уровня дохода при начислении прогрессивного подоходного налога, при которых минимальный налог – 5% – начисляется при годовых доходах 2.0 – 2,5 тысячи юаней (8,5 – 10,7 т. руб.), а максимальный налог – по ставке 45% – взимается с годовых доходов выше 102 тысяч юаней (435,5 т. руб.). Проект предусматривает сохранение минимальной налоговой ставки при доходах до 3 тысяч юаней (12 т. руб.), а максимальная ставка налога будет начисляться на доходы граждан, начиная с 82 тысяч юаней (350 т. руб.). Данные изменения значительно снизят средний уровень налогообложения и позитивно отразятся на финансовом состоянии почти 200 миллионов китайских налогоплательщиков. Аналитики склонны предполагать, что часть китайского населения с наиболее низким уровнем доходов получит наибольшие преимущества от введения новых порогов подоходного налогообложения.

Эти данные говорят о том, что богатые слои общества в этих странах напрямую помогают достойно жить слоям населения с низким доходом. Что в целом приводит, как мы знаем, к высокому уровню жизни в этих странах и стабильности их развития. Авторам не известны функции распределения легальных доходов в этих странах и возможно они отличны от логнормального распределения. Оправдание «равномерного налога» в России и нежелание ввести прогрессивный налог на «богатых» оправдывают в печати малой мощностью слоя богатых в России, что заведомо неверно в настоящее время.

В работе [3], основываясь на факте логнормального распределения доходов в России, построена модель более мягкая, чем в Греции. Приведем основные положения этой работы.

2) Определение модельной налоговой шкалы. Пусть  $T = (t_0; a_1, t_1; \dots; a_k, t_k)$  – упорядоченный набор  $2k+1$  чисел. Числа  $a_1, \dots, a_k$  строго возрастают и называются делениями шкалы. Числа  $t_0, t_1, \dots, t_k$ , из промежутка  $[0, 1)$  называются налоговыми ставками. Величина налога определяется вектором  $T$  по формуле:

$$N(x) = \begin{cases} t_0 x, & 0 \leq x \leq a_1 \\ t_1 x, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \dots & \dots \\ t_k x, & x > a_k \end{cases} \quad (1)$$

Налоговая шкала называется прогрессивной, если налоговые ставки строго возрастают. В отличие от нормального закона математическое ожидание и дисперсия случайной величины  $X$  для данного логнормального закона взаимозависимы. Формулы для их определения имеют вид:

$$\mu^* = M(X) = e^{\mu + \sigma^2/2}, \quad s = (\sigma^*)^2 = D(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}. \quad (2)$$

Эти формулы имеют два параметра, которые связаны с нормальным распределением и статистическими данными. Пусть  $N$  – количество налогоплательщиков,  $t(x)$  – ставка подоходного налога, зависящая от величины дохода. Тогда совокупный налог, собранный со всех налогоплательщиков, равен  $S = N \int_0^{\infty} t(x) x f(x) dx$ . Если  $t(x) = const$ , то получим равномерную шкалу налогообложения:  $S = N \int_0^{\infty} Const x f(x) dx = Const N \mu^*$ . В настоящее время в России ставка равна 13%, поэтому  $S_R = 0.13 N \mu^*$ .

В работе [3] описан алгоритм и приведена компьютерная программа, позволяющая, сравнивая с указанным совокупным налогом  $S_R$ , численно оценить эффективность введения построенной прогрессивной модели налогообложения доходов физических лиц, задавая параметры распределения  $\mu$  и  $\sigma$ .

Предположим, что в формуле (1) с бедных людей, доход которых не превышает некоторого значения  $a_1$ , налог вообще не берётся  $t_0 = 0$  (социальная направленность налоговой политики). Также примем  $t_{n+1} = 0$ , т.е. со сверхбогатых людей налог в общепринятом смысле также не берётся, поскольку, во-первых, вероятность иметь очень высокий доход пренебрежимо мала (смотри ниже), а, во-вторых, по отношению к этим людям должна, на наш взгляд, проводиться особая политика помощи государству.

Формула сбора прогрессивного налога имеет вид:

$$S = N \mu^* \sum_{k=1}^n t_k \left[ \Phi \left( \frac{\ln a_{k+1} - \mu - \sigma^2}{\sigma} \right) - \Phi \left( \frac{\ln a_k - \mu - \sigma^2}{\sigma} \right) \right],$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx$  функция Лапласа.

Понятие бедный или богатый относительно, мы будем сравнивать персональный доход с математическим ожиданием –  $\mu^*$ . Так, в модели лица, зарабатывающие меньше значения –  $\mu^*/5$ , полностью освобождены от налога, остальное в формуле приведенной ниже:

$$t(x) = \begin{cases} 0.13, & 0.2\mu^* \leq x < 5\mu^* \\ 0.15, & 5\mu^* \leq x < 10\mu^* \\ 0.20, & 10\mu^* \leq x < 20\mu^* \\ 0.30, & 20\mu^* \leq x < 50\mu^* \\ 0.45, & 50\mu^* \leq x < 90\mu^* \end{cases}$$

В указанной работе (по данным 2012 г.) показано, что, освободив полностью от налога малоимущий слой населения, с помощью прогрессивной шкалы можно не только сохранить прежний уровень сбора суммы налога  $S_R$ , но и увеличить его.

Отметим, что в настоящее время эффект от введения любой прогрессивной шкалы подоходного налога в России будет более существенным, так как с 2012 по 2014 г. значительно вырос по мощности слой богатых людей в России.

## 2) Модель работы Пункта централизованной охраны (ПЦО)

Рассмотрим интенсивный режим работы ПЦО – период времени снятия с охраны объектов. Временное расстояние между соседними сигналами, приходящими на одну линию, есть величина случайная и так как работа ПЦО относится к системам массового обслуживания, то первым предположением является предположение о показательном распределении этой величины. Эмпирическая диаграмма показала значительное расхождение с графиком показательного распределения. Это расхождение не случайное и не имеет отношение к объективно поступающим на линию информационным сигналам, которые имеют экспоненциальный закон [6], а при обслуживании этот закон существенно и принципиально искажается для значений близких к нулю. В работе [4] с помощью критерия Пирсона проверялись различные гипотезы о функциональном виде регрессии этого закона. Показано, что логнормальное распределение наилучшим образом согласуется с эмпирическими данными (рис.). Для определения параметров  $(\mu, \sigma)$  в работе были использованы свойства распределения, которые можно записать в виде системы для определения моды и математического ожидания  $M[X]$ :

$$\begin{cases} \ln Mod = \mu - \sigma^2 \\ \ln M[X] = \mu + \sigma^2/2. \end{cases}$$

Моду определяли из эмпирических графиков, а математическое ожидание заменялось средним значением  $\bar{X}$ . На рисунке ниже представлены логнормальное распределение: теоретические – сплошной линией, эмпирическое – пунктирной.

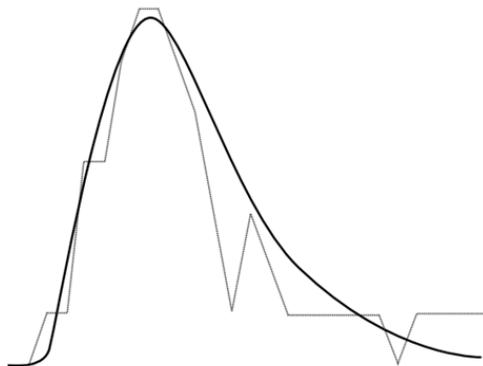


Рис. Теоретические и эмпирические плотности распределения

## 3) Материальный ущерб от пожаров и взрывов

Исследования, проведённые в работе [5] по материалам российской и зарубежной статистики, показали, что и количество пострадавших, и величина материального ущерба от пожаров и взрывов корректно описываются логнормальной моделью плотности распределения:

$$\rho_{\mu, \sigma_u}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u u} \exp\left(-\frac{[\ln(u) - \ln(\mu)]^2}{2\sigma_u^2}\right),$$

где  $\rho_{\mu, \sigma_u}(u)$  – плотность логнормально распределенной случайной величины потерь  $u$  собственниками объектов от пожаров;  $\mu$  – медианное значение для соответствующего распределения величины потерь от пожаров;  $\sigma_u$  – дисперсия нормального распределения логарифма величины потерь от пожаров  $\ln(u)$ . Параметры  $\mu$  и  $\sigma$  определялись с помощью обработки статистических данных ГПС МЧС по Воронежской области.

Величина достоверности аппроксимации при этом  $R^2 \approx 0,95$ , что свидетельствует о корректности применения логнормального закона распределения для величин доказанных прямых убытков от пожаров на объектах.

#### **4. Заключение**

В работе рассмотрено три новых применения логнормального распределения для построения прогностических моделей в финансовой и экономической сферах.

#### **Список источников**

1. Колмаков И.Б. Прогнозирование показателей дифференциации денежных доходов населения // *Проблемы прогнозирования*, 2006, no. 1, с. 136-162.
2. Скрыль С.В., Тростянский С.Н. *Безопасность социоинформационных процессов. Теория синтеза прогностических моделей*. Воронеж, Воронежский институт МВД России, 2008.
3. Горлов С.К., Родин В.А. Особенности логнормального распределения и прогрессивная шкала подоходного налога в России // *Вестник ВИ МВД России*, 2012, no. 2. с. 65-72.
4. Родин В.А., Синегубов С.В. Поведение потока сигналов на ПЦО с учетом задержки на обслуживание // *Вестник ВИ МВД России*, 2014, no. 3, с. 22-28.
5. Родин В.А., Синегубов С.В., Тростянский С.Н. Некоторые применения логнормального распределения // *XXII Межд. Конф. Математика, Экономика, Образование. Южный федеральный университет*. Ростов-на-Дону. Тез. док. 2014, с. 142.
6. Синегубов С.В. *Имитационное моделирование систем массового обслуживания с повторными вызовами на примере пульта централизованной охраны*. Дис. ВИ МВД России, 2001.

---

# SOME APPLICATIONS OF THE LOGNORMAL DISTRIBUTION<sup>1</sup>

---

**Rodin Vladimir Aleksandrovich**<sup>1</sup>, Dr. Sc. (Phys.-Math.), Prof.  
**Polikarpov Evgeniy Sergeevich**<sup>2</sup>, Cand. Sc. (Eng.)

<sup>1</sup>Voronezh State University, University sq., 1, Voronezh, Russia, 394006;  
e-mail: rodin\_v@mail.ru

<sup>2</sup>MIA General Administration for the Krasnoyarsk Region, Dzerzhinskogo st., 18,  
Krasnoyarsk, Russia, 660017; e-mail: binox@mail.ru

*Purpose:* this paper presents some ideas for using a normal distribution in financial and economic forecasting issues. *Discussion:* in the introduction there are some known issues used the lognormal distribution. The authors demonstrate the variety of lognormal distribution manifestations in different areas of human activity. *Conclusion:* in the author's part a number of models using a lognormal distribution, such as surtax model, centralized model of point guards, as well as the model estimates of property damage from fires and explosions in the Russian Federation, are represented.

**Keywords:** mathematical models of the taxation, lognormal distribution, financial and economic risk of consequences of fires, function of stochastic distribution, surtax model.

## Reference

1. Kolmakov I.B. Prognozirovanie pokazatelei differentsiatsii denezhnykh dokhodov naseleniia. *Problemy prognozirovaniia*, 2006, no. 1, pp. 136-162. (In Russ.).
2. Skryl S.V., Trostianskii S.N. *Bezopasnost sotsioinformatsionnykh protsessov. Teoriia sinteza prognosticheskikh modelei*. Voronezh, Voronezhskii institut MVD Rossii, 2008. (In Russ.).
3. Gorlov S.K., Rodin V.A. Osobennosti lognormal'nogo raspredeleniia i progressivnaia shkala podokhodnogo naloga v Rossii. *Vestnik VI MVD Rossii*, 2012, no. 2. pp. 65-72. (In Russ.).
4. Rodin V.A., Sinegubov S.V. Povedenie potoka signalov na PTsO s uchetom zaderzhki na obsluzhivanie. *Vestnik VI MVD Rossii*, 2014, no. 3, pp. 22-28. (In Russ.).
5. Rodin V.A., Sinegubov S.V., Trostianskii S.N. Nekotorye primeneniia lognormal'nogo raspredeleniia. *XXII Mezhd. Konf. Matematika, Ekonomika, Obrazovanie. Iuzhnyi federal'nyi universitet*. Rostov-na-Donu. Tez. dok. 2014. pp. 142. (In Russ.).
6. Sinegubov S.V. *Imitatsionnoe modelirovanie sistem massovogo obsluzhivaniia s povtornymi vyzovami na primere pul'ta tsentralizovannoi okhrany*. Dis. VI MVD Rossii, 2001. (In Russ.).

---

<sup>1</sup> The work has been supported by grant of RFBR No.11-01-00614-a.