УДК 65.012.122 : 519.17

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО СЕТЕВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЗАДАЧ С УЧЕТОМ СОКРАЩЕНИЯ ИЗДЕРЖЕК[1]

Павлов Дмитрий Алексеевич, канд. физ.-мат. наук, доц.
Барановская Татьяна Петровна, д-р экон. наук, проф.
Ковалева Ксения Александровна, канд. экон. наук, доц.

Кубанский государственный аграрный университет им. И.Т. Трубилина, ул. Калинина, 13, Краснодар, Россия, 350044; e-mail: dp.logic@gmail.com

Цель: разработать оптимальный алгоритм распределения задач в производственной сети предприятия, сокращающий издержки. *Обсуждение*: строится дискретная оптимизационная модель в теоретико-графовой постановке с учетом многокритериальности, где выбор решения происходит среди множества несравнимых альтернатив. В качестве структуры организационной сети с проходящими в ней информационными потоками предлагается использовать предфрактальные графы, которые естественным образом отображают устройство связей ее внутренних подразделений. В построенной модели вершинам соответствуют группы сотрудников предприятия, а ребрам – информационно-производственные связи. Ребрам ставится в соответствие числовые значения, обозначающие стоимость обеспечения информационно-производственных связей между сотрудниками. В формализованной математической постановке изучаемая проблема сводится к многокритериальной задаче о покрытии предфрактального графа непересекающимися цепями. *Результаты*: построен и обоснован алгоритм, оптимизирующий критерий, отвечающий за сокращение издержек при распределении производственных задач в организационной сети предприятия.

Ключевые слова: распределение производственных задач, предфрактальные и фрактальные графы, многокритериальная дискретная оптимизация.

DOI:

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта 18-010-00891 А

Введение

Необходимость качественного выполнения социальных и народнохозяйственных задач влечет за собой решение не только организационных и производственных задач, но и вопросов оптимального формирования групп сотрудников-исполнителей [11]. Исследуемая в настоящей работе проблема связана с организацией производственного процесса путем оптимального (с учетом стоимости) распределения задач в организационной структуре предприятия [1, 3, 5, 9, 12] среди групп сотрудников-исполнителей.

В работе приведенная задача исследуется в многокритериальной постановке [11], что соответствует практическим потребностям согласования значительного числа разнородных требований и целей для удовлетворения потребностей лица, принимающего решения.

Для решения задачи строится экономико-математическая модель в теоретико-графовой постановке. В качестве структуры организационной сети с проходящими в ней информационными потоками предлагается использовать предфрактальные графы [6, 10], которые естественным образом отображают устройство связей ее внутренних подразделений. Таким образом, предфрактальный граф можно представить как модель организационной сети [2, 3], где вершинам графа соответствуют группы сотрудников предприятия, а в качестве ребер – информационно-производственные связи между ними. В качестве веса ребра будут выступать некоторые числовые характеристики, оценивающие стоимость или задержки информационно-производственных связей между сотрудниками [12].

Исследуемая проблема распределения производственных задач сводится к оптимальному по стоимости способу выбора групп исполнителей в производственной сети [3, 4]. Каждый сотрудник, имея определенные функциональные обязанности, должен входить в одну из групп, за которой закреплена задача.

Формализованная постановка задачи

Недостающие определения и понятия можно найти в работах [6-8].

Для определения предфрактального графа $G_L=(V_L,E_L)$, порожденного затравкой $H=(W,Q)$, приведем последовательность шагов. Шаг 1 соответствует графу G_1 ранга *l=1,* соответствующему затравке $G_1=H$. На шаге 2 в графе G_1 каждая вершина замещается затравкой H, в результате чего получается граф G_2. Результатом шага *L* является граф G_L ранга *L*, получаемый из графа G_{L-1} замещением каждой вершины затравкой H. В общем случае предфрактальный граф может порождаться не одной, а множеством затравок случайным или регулярным способом.

Считается заданным взвешенный предфрактальный граф $G_L=(V_L,E_L)$, где каждому ребру $e^{(l)}\in E_L$ приписано число $w(e^{(l)})\in(\theta^{l-1}a,\theta^{l-1}b)$, $l=\overline{1,L}$ – ранг ребра, $a>0$, $\theta<\frac{a}{b}$. Остовный подграф $y=(V_L,E_y)$, $E_y\subseteq E_L$, состоящий из компонент связности – простых цепей назовем покрытием графа G_L.

Совокупность всех покрытий $\{y\}$ графа G_L образует множество допустимых решений $Y = Y(G_L) = \{y\}$ (МДР).

На МДР определена векторно-целевой функцией (ВЦФ):

$$F(y) = (F_1(y), F_2(y), F_3(y)), \tag{1}$$

$$F_1(y) = \sum_{C \in y} \sum_{e \in C} w(e) \to \min, \tag{2}$$

$\sum_{C \in y} \sum_{e \in C} w(e)$ – общий вес, входящий в y;

$$F_2(y) = |y| \to \min, \tag{3}$$

где $|y|$ – число цепей составляющих y;

$$F_3(y) = h \to \min, \tag{4}$$

где h – число типов цепей, содержащихся в y.

Критерий (2) отвечает за распределение задачи между сотрудниками с минимальной общей стоимостью.

Критерий (3) направлен на сокращение времени, отводимое для решения производственной задачи.

Для решения формализованной задачи предлагается алгоритм α_1, основанный на выделении совершенного паросочетания минимального веса, предложенный Эдмондсом [7] и используемый в виде процедуры Эдмондса.

Необходимые понятия и определения

Паросочетание – это множество попарно несмежных ребер в графе.

Наибольшее паросочетание назовем паросочетание, содержащее максимально возможное количество ребер. Число паросочетания $\nu(G)$ графа G – это число ребер в наибольшем паросочетании. Совершенным паросочетанием (СП) называется паросочетание, в котором участвуют все вершины графа. То есть любая вершина инцидентна равно одному ребру, входящему в паросочетание. Любое совершенное паросочетание является максимальным.

Замечание 1. Совершенное паросочетание минимального веса (СПМВ) графа $G=(V, E)$ строится, используя алгоритм выделения максимального паросочетания, предварительно заменив все веса на отрицательные значения.

Алгоритм α_1

Алгоритм α_1 выделяет покрытие $y_1=(V, E_{y1})$ цепями длины ребро на взвешенном предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, где $|W| = n$, $|Q|=q$, являющееся оптимальным по критерию $F_1(y_1) = \sum_{C \in y_1} \sum_{e \in C} w(e) \to \min$.

ТЕОРЕМА 1. Необходимым и достаточным условием факторизуемости предфрактального (n,L)-граф $G_L = (V_L, E_L)$ порожденного затравкой $H = (W, Q)$, является существование совершенного паросочетания $H_M=(W, Q_M)$ на затравке $H = (W, Q)$.

Смысл теоремы состоит в том, что в случае отыскания СП на затравке $H = (W, Q)$, можно будет найти СП *M=(V, E_M)* на всем графе $G_L = (V_L, E_L)$. Допустим, что на затравке *H* существует СП и выполняется условие теоремы 1, тогда алгоритм α_1 построит СПМВ.

Приведем основную идею алгоритма α_1

Суть алгоритма состоит в выделении на каждой подграф-затравке $z_s^{(L)}$, $s = \overline{1, n^{L-1}}$ СП M_s. Для этого используется n^{l-1} - раз обращение к алгоритму Эдмондса, который в α_1 используется в качестве процедуры. Построив СПМВ на всех $s = \overline{1, n^{L-1}}$ подграф-затравках $z_s^{(L)}$, выделяется СПМВ на всем G_L.

АЛГОРИТМ α_1

Вход: взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$.

Выход: СПМВ M_L.

Шаг 1. Применить процедуру Эдмондса для каждой подграф-затравке $z_s^{(L)}$, $s = \overline{1, n^{L-1}}$, таким образом найти СПМВ M_s.

Шаг 2. Объединить полученные на шаге 1 СПМВ M_s. В завершение шага 2 получить СПМВ M_L для G_L.

Процедура Эдмондса.

Вход: взвешенный граф $G = (V, E)$.

Выход: СПМВ $M = (V, E_M)$. ◄

Теорема 2. Алгоритм α_1 строит совершенное паросочетание $M = (V, E_M)$ минимального веса на взвешенном предфрактальном (n, L)-графе $G_L = (V_L, E_L)$, при условии $\theta < \frac{a}{b}$.

Доказательство. Согласно принципу построения предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ на этапе $l = \overline{1, L}$ всякая вершина замещается затравкой $H = (W, Q)$. Количество вершин замещаемых затравкой этапах $l = \overline{1, L}$ равно n^{l-1}. В результате на каждом этапе строится $z_s^{(l)}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ подграф-затравок. На этапе L получаем $z_s^{(L)}$, $s = \overline{1, n^{L-1}}$ подграф-затравок.

Выделим на затравке $z_1^{(L)}$ СПМВ M_1, используя процедуру Эдмондса. В результате выделяется паросочетание, в которое будут входить все n вершины $z_1^{(L)}$. Далее на подграф-затравке $z_2^{(L)}$ выделим СПМВ M_2, в которое будут так же входить все n вершин. Согласно принципу построения предфрактального графа G_L, подграф-затравки $z_1^{(L)}$ и $z_2^{(L)}$ на которых выделилось СПМВ являются отдельными подграфами. Аналогично выделим СПМВ на каждой из оставшихся подграф-затравок $z_s^{(L)}$, $s = \overline{1, n^{L-1}}$. Рассматривая последнюю из оставшихся затравок $z_{n^{L-1}}^{(L)}$, построим на ней СПМВ $M_{n^{L-1}}$.

В результате проведенных процедур на каждой подграф-затравке будет выделено $n^{L-1} \cdot n = n^L$ вершин, т.е. все вершины исходного предфрактального графа $G_L : |V_L| = n^L$. Выделенное паросочетание на $z_s^{(L)}$ содержащее все вершины обозначим M_s, $s = \overline{1, n^{L-1}}$.

Таким образом, построенное СП является СП для всего графа G_L, т.к. все вершины входят в паросочетание. Построенное СП будет СПМВ, т.к.

согласно определению взвешенного предфрактального графа G_L, ребра подграф-затравок $z_s^{(L)}$, $s=\overline{1,n^{L-1}}$ являются ребрами L-ранга и их веса принадлежат интервалу $w(e^{(L)}) \in (\theta^{L-1}a, \theta^{L-1}b)$, где коэффициент $\theta < \dfrac{a}{b}$.

Таким образом СП M_L будет являться СПМВ графа G_L.◄

Теорема 3. Вычислительная сложность алгоритма α_1, на предфрактальном (n,L)-графе $G_L=(V_L, E_L)$, с затравкой $H=(W,Q)$, $|W|=n$, $|V_L|=N=n^L$, равна $O(N\cdot n^2)$.

Доказательство. Алгоритм α_1 основан на работе шага 1, который находит паросочетания на множестве подграф-затравок $z_s^{(L)}$, $s=\overline{1,n^{L-1}}$. Вычислительная сложность работы шага 1 при работе на одной подграф-затравке равна $O(n^3)$.

Таким образом,

$$O(n^{L-1}\cdot n^3)=O(n^L\cdot n^2)=O(N\cdot n^2).$$

В результате вычислительная сложность алгоритма α_1 равна $O(N\cdot n^2)$. ◄

Сравнив вычислительную сложность алгоритма α_1 с вычислительной сложностью алгоритма Эдмондса, получим: $O(N\cdot n^2) < O(N^3)$.

Примечание 1. Вычислительная сложность алгоритма α_1 меньше в N^2 раз на предфрактальном (n, L)-графе $G_L=(V_L, E_L)$ в сравнении с вычислительной сложности алгоритма Эдмондса.

Теорема 4. Алгоритм α_1 строит покрытие $y_1=(V, E_{y_1})$ на предфрактальном (n, L)-графе $G_L=(V_L, E_L)$, с n-вершинной затравкой $H=(W,Q)$, оптимальное по критерию $F_1(y_1)$ и критерию $F_3(y_1)$, и оцениваемое по критерию, $F_2(y_1) \le \dfrac{n^L}{2}$.

Доказательство. Теорема 2 является доказательством оптимальности по критерию, т.к. в результате алгоритма α_1 выделяется СПМВ. Критерий $F_3(y_1)$ минимизирует число цепей различных длин, но т.к. покрытие содержит только цепей длины ребро, тогда его значение минимально, $F_3(y_1)=1$. Оценим критерий $F_2(y)\le |y|$. Мощность покрытия на затравке равна $\dfrac{n}{2}$. Работа алгоритма α_1 производится с подграф-затравками L-го ранга, количество который равно n^{L-1}, в результате

$$F_2(y)\le \frac{n}{2}\cdot n^{L-1}=\frac{n^L}{2}.$$

Заключение

Построен метод для решения комбинаторной проблемы распределения задач в производственной сети предприятия с учетом минимизации издержек. В качестве модели организационной сети выбраны предфрактальные графы, применение которых позволяет строить эффективные (по времени вычисления) алгоритмы, на порядок превосходящие алгоритмы на «классических» графах.

В работе построен алгоритм, оптимизирующий один из критериев (минимизирующий издержки), при оптимизации задачи по другим критериям структура построенных решений (выделенных групп сотрудников-исполнителей) будет различна.

Список источников

1. Bramoullé Y., Galeotti A., Rogers B. *The Oxford Handbook of the Economics of Networks.* Oxford University Press, 2016.
2. Dooley K. *Organizational complexity.* In M. Warner (Ed.), International encyclopedia of business and management. London, Thompson Learning, 2002, pp. 5013-5022.
3. Galbraith J. Organization design: an information processing view // *Interfaces*, 1974, vol. 4, no. 3, pp. 28-36.
4. Jackson M. *Social and Economic Networks*. Princeton, Princeton University Press, 2008.
5. My T. Thai, Panos M. Pardalos. *Handbook of Optimization in Complex Networks: Communication and Social Networks.* Springer, 2011.
6. Кочкаров А.М. *Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход.* Нижний Архыз, Изд. центр «CYGNUS», 1998.
7. Кристофидес Н. *Теория графов. Алгоритмический подход.* Москва, Мир, 1978.
8. Лекции по теории графов: учеб. пособие / В. А. Емеличев [и др.]. Москва, Наука, 1990.
9. Новиков Д.А. *Сетевые структуры и организационные системы*. Москва, ИПУ РАН, 2003.
10. Павлов Д.А. *Особенности многокритериальной оптимизации на предфрактальных графах: задача покрытия простыми цепями:* монография. Краснодар, КубГАУ, 2016.
11. Перепелица В.А. *Многокритериальные модели и методы для задач оптимизации на графах*. LAMBERT Academic Publication, 2013.
12. Петова Е.Х. *Математические методы и модели формирования целевых групп исполнителей*. Черкесск, Карачаево-Черкесский государственный технологический институт, 1999.

THE OPTIMAL NETWORK DISTRIBUTION METHOD FOR INDUSTRIAL TASKS TAKING INTO ACCOUNT THE COST REDUCTION

Pavlov Dmitry Alekseevich, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.
Baranovskaya Tatyana Petrovna, Dr. Sc. (Econ.), Full Prof.
Kovaleva Kseniya Aleksandrovna, Cand. Sc. (Econ.), Assoc. Prof.

Kuban State Agrarian University I.T. Trubilina, Kalinina, 13, Krasnodar, Russia, 350044; e-mail: dp.logic@gmail.com

Purpose: to develop an optimal algorithm for the distribution of tasks in the production network of the enterprise, reducing costs. *Discussion*: a discrete optimization model is built in a graph-theoretic setting, taking into account multicriteriality, where the choice of solution occurs among a set of incomparable alternatives. As a structure of an organizational network with information flows passing through it, it is proposed to use prefractal graphs, which naturally reflect the structure of communications of its internal divisions. In the constructed model, the groups of employees of the enterprise correspond to the tops, and the information-production links correspond to the edges. The ribs are matched with numerical values denoting the cost of providing information and production links between employees. In a formalized mathematical formulation, the problem under study is reduced to a multicriteria problem of covering a prefractal graph with non-intersecting chains. *Results*: the algorithm optimizing criterion was built and justified, which is responsible for reducing costs in the distribution of production tasks in the organizational network of the enterprise.

Keywords: distribution of production problems, prefractal and fractal graphs, multi-criteria discrete optimization.

References

1. .The Oxford Handbook of the Economics of Networks. Oxford, Oxford University Press, 2016.
2. Dooley K. *Organizational complexity*. M. Warner (Ed.), International encyclopedia of business and management, Thompson Learning, London(2002), pp. 5013-5022.
3. Galbraith J. *Organization design: an information processing view Interfaces*, 4 (1974), pp. 28-36.
4. Jackson M. *Social and Economic Networks*. Princeton, Princeton University Press, 2010.
5. My T.Thai, Panos M. Pardalos. Handbook of Optimization in Complex Networks: Communication and Social Networks. *Springer*, 2011.
6. Kochkarov A.M. Raspoznavanie fraktal'nyh grafov. Algoritmicheskij podhod [Recognition of fractal graphs. Algorithmic approach]. *Nizhnij Arhyz*, Izd. centr «CYGNUS», 1998. (In Russ.)
7. Kristofides N. *Teoriya grafov. Algoritmicheskij podhod* [Theory of graphs. Algorithmic approach]. Moscow, Mir, 1978. (In Russ.)
8. Lekcii po teorii grafov: ucheb. posobie

[Lectures on graph theory: studies. manual] / V. A. Emelichev [i dr.]. Moscow, Nauka, 1990. (In Russ.)

9. Novikov D.A. Setevye struktury i organizacionnye sistemy [Network structures and organizational systems]. Moscow, IPU RAN, 2013. (In Russ.)

10. Pavlov D.A. *Osobennosti mnogokriterial'noj optimizacii na predfraktal'nyh grafah: zadacha pokrytiya prostymi cepyami*: monografiya [Features of multi-criteria optimization on prefractal graphs: the problem of covering with simple chains: a monograph]. Krasnodar, KubGAU, 2016. (In Russ.)

11. Perepelica V.A. Mnogokriterial'nye modeli i metody dlya zadach optimizacii na grafah [Multi-criteria models and methods for optimization problems on graphs]. *LAP LAMBERT Academic Publication*, 2013. (In Russ.)

12. Petova E.H. *Matematicheskie metody formirovaniya celevyh grupp ispolnitelej* [Mathematical methods and models of formation of target groups of performers]. Cherkessk, Karachaevo-Cherkesskij tekhnologicheskij institut, 1999. (In Russ.)