УДК 338.27
JEL C53

ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВЕКТОРНЫХ АВТОРЕГРЕССИЙ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ПРОГНОЗИРОВАНИИ

Светуньков Сергей Геннадьевич, д-р экон. наук, проф.
Баженова Мария Павловна, маг.
Лукаш Екатерина Владимировна, маг.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Политехническая ул., 29, Санкт-Петербург, Россия, 195251; e-mail: sergey@svetunkov.ru

Предмет: одним из новых и перспективных направлений современного экономического краткосрочного прогнозирования является использование векторных авторегрессий. Опыт успешного применения таких моделей на практике весьма не велик, хотя все исследователи отмечают, что за моделями – будущее экономической прогностики. Проблемы построения и использования в краткосрочном экономическом прогнозировании векторных авторегрессий рассматриваются в данной статье. *Цель*: целью настоящего исследования является выявление проблем, которые мешают внедрению векторных авторегрессий в практику экономического прогнозирования и определение путей их преодоления. *Дизайн исследования*: в статье рассматриваются направления использования векторных авторегрессий в современных научных исследованиях и на практике; показывается несоответствие этих результатов богатым возможностям векторных авторегрессий; выявляется основная проблема – нелинейный рост сложности задачи с ростом размерности вектора авторегрессии; предлагается в качестве альтернативы использовать комплексную форму векторных авторегрессий; на практическом примере демонстрируется преимущество векторных авторегрессий в векторной форме по сравнению с векторными авторегрессиями действительных переменных. *Результаты*: в статье показывается, как вычислить нелинейный рост сложности задачи с ростом размерности вектора моделируемых показателей и насколько снижается размерность задачи, если её представить в форме авторегрессии комплексных переменных. На практическом и условных примерах демонстрируется снижение размерности модели, если её представить в комплексной форме. Для того чтобы подтвердить значимость полученных результатов, приводится пример моделирования и краткосрочного прогнозирования восьми основных индексов Московской биржи в период с 24.02.2022 по 13.05.2022. На этой базе были построены модели векторной авторегрессии и комплекснозначные векторные модели авторегрессии, осуществлён сравнительный анализ точности аппроксимации ими исходных рядов и сравнительный анализ точности краткосрочного экономического прогнозирования. Результаты подтверждают научную значимость моделей авторегрессии в комплексной форме.

Ключевые слова: экономическое прогнозирование, векторные авторегрессии, комплекснозначная экономика, комплексные авторегрессии, информационный критерий.

DOI: 10.17308/meps/2078-9017/2022/6/44-57

Введение

Более ста лет назад в 1907 году российский математик А.А. Марков предложил простую модель авторегрессии первого порядка со случайной компонентой. Эта модель легла в основу направления, известного как моделирование случайных стохастических процессов. Она же стала прообразом моделей авторегрессий самых разнообразных видов с различными свойствами.

Сегодня модели авторегрессий широко используются при решении задач краткосрочного экономического прогнозирования, а мейнстримом методологии авторегрессионного моделирования являются векторные авторегрессии.

Это новое научное направление пока что не получило широкого распространения, хотя уже почти два десятилетия, как эти модели стали использоваться в практике краткосрочного прогнозирования в самых разных сферах.

Сегодня теоретическую часть векторного авторегрессионного моделирования следует считать в целом завершённой. Основные теоретические исследования векторных авторегрессий проводятся в направлении их развития в форме различного рода гибридных моделей, например, как сочетание нейросети и векторной авторегрессии [14, 15, 22].

При этом можно было бы ожидать широкого применения этих моделей на практике. Но этого пока не произошло. Основной проблемой практического применения векторных авторегрессий является наличие у них большого количества коэффициентов, которое необходимо оценить с помощью статистических методов [6, 10]. Поэтому за использование на практике векторных авторегрессий в основном берутся специалисты, владеющие статистическими методами на продвинутом уровне и занимающиеся моделированием в сфере естественных и медицинских наук.

Так, векторные авторегрессии используются для прогнозирования климатических процессов [9, 11, 17, 18, 23], для прогнозирования индексов смертности [21] и летальности в условиях COVID-19 [16]. Используют их в медицине для оценки цереброваскулярной реактивности и отслеживания взаимосвязи внутренних показателей работы мозга [20, 24] или в транспортных системах [10].

Имеются успешные результаты применения векторных авторегрессий и в экономическом прогнозировании. В основном это относится к задачам краткосрочного прогнозирования цен в ритейле [8, 12] или таких показателей, как инфляция и индексы цен с учётом инфляции [13, 14, 21].

Работы по использованию векторных авторегрессий ведутся также в России и странах СНГ. Так, например, К.А. Качкин использовал простую векторную авторегрессию с двумя показателями и лагом в четыре наблюдения для прогнозирования доходности акций «Лукойла» и «Норникеля» [3], а Е.И. Суханова и С.Ю. Ширнаева построили более сложную векторную авторегрессионную модель размерностью в шесть показателей и лагом в три наблюдения [7]. Н. Маматова использовала для прогнозирования спроса на электроэнергию векторную авторегрессию с размером вектора в три показателя и лагом в один шаг [4].

С помощью векторных авторегрессий сделана попытка определения наиболее перспективных направлений развития производственной деятельности строительного предприятия [1]. Также была построена векторная авторегрессия для краткосрочного прогнозирования макроэкономических показателей Армении [5].

Но подобных работ по практическому использованию векторных авторегрессий исчезающе мало на общем фоне работ по авторегрессиям. И это не является особенностью отечественной экономической науки, а характерно в целом для мировой науки. Вызвано это высокой размерностью моделей векторных авторегрессий, что определяет математическую сложность решения задачи.

Методы и результаты исследования

Простая векторная авторегрессия порядка p будет записана в таком виде [15, p.13]:

$$\hat{Y}_t = A_0 + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \ldots + A_p Y_p \,. \qquad (1)$$

Здесь *Yt* – *k*-мерный вектор переменных; A_0 – *k*-мерный вектор свободных коэффициентов; *At* – *k x k* -мерные постоянные вещественные матрицы коэффициентов.

Из (1) легко заметить, что количество коэффициентов векторной авторегрессии, которые необходимо оценить для построения этой модели на практике, будет равно ($k^2 \cdot (p+1)$). Чаще всего исходный ряд переменных центрируют относительно его средней арифметической, тем самым избавляясь от k–мерного вектора свободных коэффициентов A0 и необходимости нахождения этих коэффициентов. Тогда размерность задачи несколько снижается и оценке подлежат $k^2 \cdot p$ неизвестных коэффициентов.

Будем в дальнейшем обозначать векторную авторегрессию *k*-мерного вектора порядка *p* через $VAR^{k}(p)$.

В том случае, когда исследователь желает повысить точность краткосрочного прогноза с помощью модели векторной авторегрессии, по аналогии с одномерными авторегрессиями добавляют составляющую в виде авторегрессий остатков, которую принято обозначать MA(q), где q – порядок авторегрессии остатков. Получается модель VARMA k(p,q):

$$\hat{Y}_t = A_1 Y_{t-1} + \ldots + A_p Y_{t-p} + B_1 U_{t-1} + \ldots + B_q U_{t-q}. \qquad (2)$$

Здесь *U* – представляет собой вектор ошибок аппроксимации размерности *k*, а *B* – *k x k*-мерные вещественные матрицы коэффициентов при ошибках.

В общем случае лаг авторегрессии векторного показателя *p* не равен лагу *q* векторов ошибок аппроксимации *U*.

Количество коэффициентов, которые необходимо найти для того, чтобы использовать в практике краткосрочного экономического прогнозирования модель $VARMA^{k}(p,q)$, будет уже равно $k^2 \cdot (p+q)$.

Что это означает для прогнозиста, который, например, хочет использовать модель векторной авторегрессии для краткосрочного прогнозирования десяти взаимосвязанных показателей ($k=10$) с лагами $p=2$ и $q=1$? Это значит, что ему необходимо оценить одним из статистических методов, например, методом наименьших квадратов (МНК) $k^2 \cdot (p+q) = 10^2(2+1) = 300$ неизвестных коэффициентов. Очевидно, что в этом случае исследователь сталкивается с нетривиальной задачей, решение которой под силу далеко не каждому учёному.

Именно этим – нелинейным ростом сложности задачи с ростом размерности вектора – и объясняется то, что в имеющихся случаях практического применения векторных авторегрессий используют векторы размерностью не более четырёх и с лагами, не превышающими двух.

Получилось так, что теория векторных авторегрессий, объясняя характер модели и свойства её статистических характеристик, умалчивает о важнейшей проблеме, которая не позволяет теорию с успехом применять на практике, а именно – о проблеме размерности задачи. И делает она это, судя по всему, оттого, что не знает удовлетворительного решения этой проблемы.

Оригинальный подход по устранению этого недостатка для векторных авторегрессий предложил Е.В. Дорохов. Он, рассматривая векторную авторегрессию как систему уравнений, просто оценивает каждое уравнение как многофакторную модель одномерной переменной: «уравнения модели *VAR(p)* можно оценивать обычным методом наименьших квадратов. Причём каждое уравнение можно оценивать отдельно, т. е. строить регрессию каждого компонента на предыдущие значения всех компонентов, включая его собственные предыдущие значения» [1, с. 90]. А векторная авторегрессия получается у него после того, как он оценивает все *k* уравнений векторной авторегрессии как многофакторные и сводит их в единую систему. При этом им используется модель с лагом, равным единице.

Конечно, этот подход позволяет хоть каким-то образом построить векторные авторегрессии, но ценность любых векторных моделей в компактности их записи, а подход Е.В. Дорохова это преимущество сводит «на нет». К тому же при одновременной оценке коэффициентов векторной авторегрессии и при их оценке по отдельным составляющим получаются разные значения этих коэффициентов. Исследования, которые показали бы преимущество того или иного метода оценки коэффициентов векторной авторегрессии, пока не известны.

Формирующаяся в последние десятилетия комплекснозначная экономика позволяет решить множество нетривиальных задач в области экономико-математического моделирования, в том числе и те, которые не решаются с помощью моделей действительных переменных [Svetunkov, 2012]. Вот и в случае моделирования и прогнозирования экономики с помощью векторных авторегрессий комплекснозначные модели могут помочь в разрешении проблемы «проклятия размерности».

Для того чтобы понять преимущества комплекснозначных векторных авторегрессий по сравнению с векторными переменными действительных переменных, представим двумерную векторную авторегрессию с лагом, равным единице. Тогда модель *VARMA²(1,1)* будет записана так:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для того чтобы использовать эту модель на практике, необходимо на статистических данных оценить значения восьми неизвестных коэффициентов a_{ij} и b_{ij}.

Если перевести задачу из действительного поля в комплексное, то комплекснозначная авторегрессия для данного случая запишется следующим образом:

$$\hat{y}_{1t} + i\hat{y}_{2t} = (a_0 + ia_1)(y_{1,t-1} + iy_{2,t-1}) + (\varepsilon_{1t} + i\varepsilon_{2t}) + (b_0 + ib_1)(\varepsilon_{1,t-1} + i\varepsilon_{2,t-1}). \quad (4)$$

Она может быть представлена в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 & -b_1 \\ b_1 & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Подобные векторные авторегрессии в комплексной форме будем обозначать как *CARMA^k(p,q)*.

Представленная модель *CARMA²(1,1)* также может быть использована на практике в том случае, когда найдены значения её коэффициентов. Сравнивая (3) и (5), можно убедиться в том, что переход векторной авторегрессии к комплексной форме сократил количество коэффициентов, значения которых необходимо найти по статистическим данным, вдвое – с восьми коэффициентов до четырёх.

В [6] показано, что количество коэффициентов модели *CARMA^k(p,q)* будет всегда меньше, чем у модели $VARMA^k(p,q)$. Причём для чётного числа размерности вектора k количество этих коэффициентов будет всегда в два раза меньше, и равно $k^2 \cdot (p+q)/2$. Например, для модели $VARMA^{10}(1,1)$ оцениваться должны 200 неизвестных коэффициентов, а для модели $CARMA^{10}(1,1)$ – всего 100 коэффициентов.

В том случае, когда размерность вектора модели авторегрессии оказывается нечётной, то сокращение количества коэффициентов при переходе в комплексную форму будет не столь значительным, но всё равно – ощутимым. Например, для $VAR(7)$ необходимо оценить 49 неизвестных коэффициентов, а для $CAR(7)$ – только 31.

Снижение количества коэффициентов моделей $CARMA(p,q)$ по сравнению с количеством моделей $VARMA(p,q)$, конечно же, ведёт к некоторой потере точности в аппроксимации. Проведённые ранее исследования [6] показали, например, что при моделировании пары значений курса доллара и курса евро на Московской бирже модель $VAR^2(1)$ оказалась в целом точнее модели $CAR^2(1)$, но не очень значительно: общая дисперсия векторной авторегрессии составила 0,3695, в то время как общая дисперсия комплексной авторегрессии оказалась равной 0,3774, то есть – выше на 2,15%. Для трёхмерного случая (к двум вышеуказанным переменным добавляется курс фунтов стерлингов) дисперсия векторной авторегрессии $VAR^3(1)$ оказалась равной 0,7456. Это меньше дисперсии комплекснозначной авторегрессии $CAR^3(1)$, равной 0,7545. Но разница в точности аппроксимации составляет всего лишь 1,2%.

В том случае, когда прогнозист выбирает лучшую прогнозную модель из нескольких, он пытается найти компромисс между наиболее точной в прошлом моделью и наименее сложной моделью. Этот компромисс достигается использованием информационных критериев, из которых чаще всего используется Байесовский информационный критерий:

$$BIC = \ln \sigma^2 + m\frac{\ln(N)}{N}. \tag{6}$$

Здесь N – число наблюдений, а m – количество коэффициентов модели.

Чем сложнее модель, тем она точнее описывает прошлое, тем больше у неё коэффициентов. Более сложные модели описывают не только существенные элементы экономической динамики, но и несущественные, в том числе и такие, которые действовали в прошлом, но не будут действовать в будущем. Поэтому в какой-то момент усложнение модели незначительно улучшает её точность, но при этом ухудшает прогнозные свойства модели. В этом случае увеличение количества коэффициентов приводит к увеличению BIC по сравнению с предыдущей более простой моделью.

Процедура выбора модели с помощью (6) формализуется и заключается в выборе той из них, у которой BIC является минимальным.

Сравним BIC для каждой из моделей векторных авторегрессий – действительных переменных и комплексных.

Для $VARMA^k(p,q)$ получим такой информационный критерий:

$$BIC = \ln \sigma_{VAR}^2 + k^2(p+q)\frac{\ln(N)}{N}, \tag{7}$$

а для $CARMA^k(p,q)$ (при чётном k) – такой:

$$BIC = \ln \sigma_{CAR}^2 + \frac{k^2(p+q)}{2}\frac{\ln(N)}{N}. \tag{8}$$

Насколько плохой должна быть дисперсия комплексной авторегрессии по сравнению с дисперсией векторной авторегрессии, чтобы уступить ей по критерию BIC? Для ответа на этот вопрос приравняем друг другу правые части (7) и (8) и после небольших преобразований получим:

$$\ln\frac{\sigma_{CAR}^2}{\sigma_{VAR}^2} = \frac{k^2(p+q)}{2N}\ln N \rightarrow \frac{\sigma_{CAR}^2}{\sigma_{VAR}^2} = N^{\frac{k^2(p+q)}{2N}}. \tag{9}$$

То есть дисперсия комплексной авторегрессии *CAR* должна быть в $N^{\frac{k^2(p+q)}{2N}}$ раз больше, чем у векторной авторегрессии *VAR*, чтобы уступить ей по информационному критерию. Возможно ли такое? Для ответа на этот вопрос просто подставим условные значения. Так, если рассматривать четырёхмерный вектор ($k=4$) для авторегрессии с лагами $p=2$ и $q=1$ при $n=40$ наблюдениях, получим:

$$\frac{\sigma_{CAR}^2}{\sigma_{VAR}^2} = 40^{\frac{4^2(2+1)}{80}} = 40^{0,6} = 9,15. \tag{10}$$

То есть модель $CARMA^4(2,1)$ должна иметь дисперсию в девять с лишним раз большую, чем у модели $VARMA^4(2,1)$. Например, если модель $VARMA^4(2,1)$ имеет дисперсию, равную 10%, то она будет лучше по информационному критерию в том случае, когда дисперсия ошибки аппроксимации модели $CARMA^4(2,1)$ должна быть равна 91,5%. Из приведённых выше примеров моделирования курсов валют видно, что это невозможно.

Получается, что в классе векторных авторегрессий по информационному критерию практически всегда будет отдаваться предпочтение использованию её комплексной формы $CARMA^k(p,q)$.

Продемонстрируем этот вывод на примере Московской биржи. На ней рассчитываются восемь отраслевых индексов, которые называют так: 1) потребительский сектор, 2) химия и нефтехимия, 3) финансы, 4) электроэнергетика, 5) металлы и добыча полезных ископаемых, 6) нефть и газ, 7) телекоммуникации, 8) транспорт.

Несмотря на относительную автономность акций каждой из указанных отраслей России, они всё же оказывают взаимное влияние друг на друга. Поэтому для краткосрочного прогнозирования этих индексов векторные авторегрессии подходят как нельзя лучше.

В нашем исследовании были построены модели $VAR^8(p)$ и $CAR^8(p)$ по данным с 24.02.2022 по 13.05.2022. Эти данные были разбиты на две части – обучающую и проверочную. На обучающей выборке оценивались коэффициенты каждой из моделей, а на проверочном множестве сравнивались моделируемые значения каждой из построенных моделей с фактическими значениями.

При построении авторегрессий исследовалась возможность использования двух вариантов наборов данных: 1) абсолютные значения индексов, взятые из архива значений отраслевых индексов с сайта Московской биржи, обозначающие значения индекса при закрытии дня торгов акциями и 2) эти же значения, но приведённые к одинаковому масштабу делением значений каждого ряда на его первоначальную величину.

Исследования показали, что имеет смысл сравнивать друг с другом модели с лагами $p=1$ и $p=2$, поскольку при $p>2$ *BIC* резко увеличивается для каждой модели, а потому увеличение лага выше двух становится нерациональным.

Для модели $VAR^8(1)$ необходимо было с помощью МНК оценить значения 64 неизвестных коэффициентов, а для модели $VAR^8(2)$ – уже 128 неизвестных коэффициентов. Альтернативные им модели $CAR^8(1)$ и $CAR^8(2)$ требуют в два раза меньше усилий для построения – необходимо найти соответственно 32 и 64 неизвестных коэффициента.

Среднее время расчёта коэффициентов каждой из четырёх моделей градиентным методом представлено в таблице 1.

Таблица 1

Среднее время расчёта коэффициентов моделей

	$VAR^8(1)$	$VAR^8(2)$	$CAR^8(1)$	$CAR^8(2)$
Время расчёта, сек.	10,52	651,36	2,08	13,36
Количество итераций, шт.	2	22	2	3

Преимущества векторных авторегрессий в комплексной форме CAR перед простыми векторными авторегрессиями VAR с позиций простоты их построения очевидны. Из таблицы видно, что это особенно ярко проявляется для моделей с лагами, равными двум – $VAR^8(2)$ и $CAR^8(2)$.

Для каждой из этих моделей на обучающем множестве данных были вычислены дисперсии ошибок аппроксимации и значения критерия BIC. Результаты этих вычислений для исходных (немасштабированных) данных приведены в таблице 2.

Таблица 2

Статистические характеристики аппроксимации обучающего множества каждой из моделей

	BIC	σ	*СКО*
$VAR^8(1)$	21,80892077	1198482,489	1094,75225
$VAR^8(2)$	22,09751986	418998,8747	647,3012241
$CAR^8(1)$	**18,60617648**	2670957,024	1634,306282
$CAR^8(2)$	20,96144433	1239491,678	1113,324606

Как и ожидалось, по критерию минимума дисперсии ошибки аппроксимации лучшими оказались модели векторных авторегрессий действительных переменных. Минимальное значение СКО для $VAR^8(2)$ оказалось равным 647,3, что почти в два раза меньше, чем у аналогичной модели $CAR^8(2)$.

Но по информационному критерию модели $CAR^8(1)$ и $CAR^8(2)$ оказались лучше моделей векторных авторегрессий.

Аналогичные результаты получены и для данных, приведённых к единому масштабу (табл. 3).

Таблица 3

Статистические характеристики аппроксимации обучающего множества каждой из моделей

	BIC	*σ*	*СКО*
$VAR^8(1)$	2,713547717	0,006104028	0,078128282
$VAR^8(2)$	12,4095136	0,001611824	0,040147524
$CAR^8(1)$	**-0,873504598**	0,009262726	0,096243059
$CAR^8(2)$	1,102604242	0,00294075	0,054228681

Поэтому для целей краткосрочного прогнозирования в соответствии с информационным критерием следует использовать комплексные авторегрессии. О такой возможности можно будет судить в том случае, если модель хорошо себя покажет на проверочном множестве, в которое были включены последние недели наблюдений за индексами на Московской бирже.

Построенные четыре модели, коэффициенты которых были оценены на обучающей выборке с помощью МНК, были использованы для целей прогнозирования на проверочном множестве. Расчётные прогнозные значения каждой из четырёх моделей сравнивались на проверочном множестве с фактическими значениями. Далее вычислялась дисперсия и СКО ошибок таких ретропрогнозов для каждой из моделей. Результаты вычислений приведены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты ретропрогноза

$VAR^8(1)$		$VAR^8(2)$		$CAR^8(1)$		$CAR^8(2)$	
СКО	err, %	СКО	err, %	СКО	err, %	СКО	err, %
Модели, вычисленные по исходным данным							
510,09	5,3	418,57	4,3	278,77	2,9	**278,66**	2,9
Модели, вычисленные по отмасштабированным данным							
263,07	2,7	271,08	2,8	**144,51**	1,5	191,84	2,0

Результаты таблицы 3 убеждают в том, что комплексные авторегрессии оказались лучшими в краткосрочном прогнозировании. И если отдавать предпочтение одной из них, то следует выбрать модель *CAR*^{8}*(1)*, построенную по отмасштабированным данным, которая в прогнозе показала наименьшую ошибку.

Заключение

Векторные авторегрессии, являясь мощным инструментом для краткосрочного экономического прогнозирования, не нашли пока что широкого применения на практике, поскольку с ростом размерности прогнозируемого вектора показателей нелинейно возрастает количество неизвестных коэффициентов этой модели. Оценить значения такого количества неизвестных коэффициентов оказывается под силу далеко не каждому исследователю.

Использование векторных авторегрессий в комплексной форме *CARMA(p,q)* существенно снижает размерность задачи и делает её решение доступным для практикующих прогнозистов. Это открывает перед прогнозистами широкие просторы не только для практического использования векторных авторегрессий, но и для формирования их различных модификаций.

Список источников

1. Гельруд Я.Д., Угрюмов Е.А., Рыбак В.Л. Векторная модель авторегрессии показателей производственной деятельности строительного предприятия // *Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика,* 2018, т. 7, no. 3, с. 19-30.

2. Дорохов Е.В. Статистический подход к изучению прогнозирования индекса РТС на основе методов векторной авторегрессии и коинтеграции // *Финансы и бизнес*, 2008, no. 1, с. 85-110.

3. Качкин К.А. Статистический анализ и прогнозирование рынка ценных бумаг в России // *Студенческая наука и XXI век*, 2021, т. 18, no. 1-2 (21), с. 140-144.

4. Маматова Н. Применение модели векторной авторегрессии для анализа потребления электроэнергии // *Математические модели экономики: сборник научных трудов*. Москва, НИУ ВШЭ, 2015, no. 4, с. 15-19.

5. Погосян К. Альтернативные модели прогнозирования основных макроэкономических показателей в Армении // *Квантиль*, 2019, no.13, с. 25-39.

6. Светуньков С.Г. *Экономическое прогнозирование с помощью комплексных авторегрессий.* Санкт-Петербург, Политех-ПРЕСС, 2021. 156 с.

7. Суханова Е.И., Ширнаева С.Ю. Прогнозирование показателей стабилизационных процессов экономики России на основе моделей векторной авторегрессии // *Фундаментальные исследования*, 2014, no. 9, с. 1590-1595.

8. Barrett A. *Forecasting the Prices of Cryptocurrencies using a Novel Parameter Optimization of VARIMA Models. Chapman University.* Chapman University Digital Commons, 2021. 277 p.

9. Bin Xu, Boqiang Lin. What cause a surge in China's CO2 emissions? A dynamic vector autoregression analysis // *Journal of Cleaner Production*, 2016, vol. 143, pp. 17-26.

10. Chandra S.R., Al-Deek H. Predictions of Freeway Traffic Speeds and Volumes Using Vector Autoregressive Models // *Journal of Intelligent Transportation Systems*, 2009, no. 13:2, pp. 53-72.

11. Fitrianti H., Belwawin S.M., Riyana M., Amin R. Climate modeling using vector moving average autoregressive // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science,* 2019, pp. 28-39.

12. García-Martos C., Rodríguez J., Sánchez M.J. Modelling and forecasting fossil fuels, CO2 and electricity prices and their volatilities // *Applied Energy*, 2013, vol. 101, pp. 363-375.

13. Jusmawati M.H., Penerapan N.F. Model Vector Autoregressive Integrate Moving Average dalam Peramalan Laju Inflasi dan Suku Bunga di Indonesia // *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, December 2020, no. 3(2), pp. 73-82

14. Lusia D.A., Ambarwati A. Multivariate Forecasting Using Hybrid VARIMA-Neural Network in JCI Case, Proceeding // *International Symposium on Advanced Intelligent Informatics: Revolutionize Intelligent Informatics Spectrum for Humanity*, SAIN, 2018, pp. 11-14.

15. Lütkepohl H. *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer, Berlin, 2005. 764 p.

16. Meimela A., Lestari S.S., Mahdy I.F., Toharudin T. , Ruchjana B.N. Modeling of Covid-19 in Indonesia using vector autoregressive integrated moving average // *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, pp. 55-79.

17. Olson D.A., Riedel T.P., Long R., Offenberg J.H, Lewandowski M., Kleindienst T.E. Time series analysis of wintertime O3 and NOx formation using vector autoregressions // *Atmospheric Environment*, 2019, pp. 218-232.

18. Rusyana A., Tatsara N., Balqis R., Rahmi S. Application of Clustering and VARIMA for Rainfall Prediction // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering,* 2020, pp. 428-438.

19. Svetunkov S. *Complex-Valued Modeling in Economics and Finance.* Springer Science+Business Media, New York, 2012. 318 p.

20. Thelin E.P., Raj R., Bellander B., Nelson D., Piippo-Karjalainen A., Siironen J., Tanskanen P., Hawrylu, G., Hasen M., Unger B. and Zeiler F.A. Comparison of high versus low frequency cerebral physiology for cerebrovascular reactivity assessment in traumatic brain injury: a multi-center pilot study // *Journal of clinical monitoring and computing*, 2020, no. 34(5), pp. 971-994.

21. Wai-Sum Chan, Johnny Siu-Hang Li, Jackie Li. The CBD Mortality Indexes: Modeling and Applications // *North American Actuarial Journal*, 2014, no. 18:1, pp. 38-58.

22. Zhang G. P. Time series forecasting using a hybrid ARIMA and neural network model // *Neurocomputing,* Jan 2003, vol. 50, pp. 159-175.

23. Zhang Yi, Cheng Chuntian, Rui Cao, Gang Li, Jianjian Shen, Xinyu Wu, Multivariate probabilistic forecasting and its performance's impacts on long-term dispatch of hydro-wind hybrid systems // *Applied Energy,* 2021, vol. 283, pp. 116-243.

24. Zeiler F.A., Ercole A., Cabeleira M. [et al.] Evaluation of the relationship between slow-waves of intracranial pressure, mean arterial pressure and brain tissue oxygen in TBI: a CENTER-TBI exploratory analysis // *Journal of Clinical Monitoring and Computing*, 2020, pp. 781-799.

PERSPECTIVES FOR THE USE OF VECTOR AUTOREGRESSIONS IN ECONOMIC FORECASTING

Svetunkov Sergey Gennadievich, Dr. Sci. (Econ.), Prof.
Bazhenova Maria Pavlovna, MA student
Lukash Ekaterina Vladimirovna, MA student

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Politekhnicheskaya st., 29, St. Petersburg, Russia, 195251; e-mail: sergey@svetunkov.ru

Subject: one of the new and promising areas of modern economic short-term forecasting is the use of vector autoregressions. The experience of successful application of such models in practice is quite small, although all researchers note that the models are the future of economic forecasting. The article deals with the problems of constructing and using vector autoregressions in short-term economic forecasting. *Purpose*: the purpose of this study is to identify problems that hinder the introduction of vector autoregressions into the practice of economic forecasting and to find the ways to deal with them. *Research design:* the article discusses the directions of using vector autoregressions in modern scientific research and in practice; shows the discrepancy between these results and the rich possibilities of vector autoregressions; reveals the main problem – a non-linear growth of a problem complexity with the increase in the dimensionality of the autoregression vector; it is proposed as an alternative to use the complex form of vector autoregressions; a practical example demonstrates the advantage of vector autoregressions in vector form compared to vector autoregressions of real variables. *Results*: the article shows how to calculate the non-linear increase in the complexity of the problem with an increase in the dimensionality of the modeled indicators vector. It also shows how much the dimensionality of the problem decreases if it is represented in the form of autoregression of complex variables. The decrease of the dimension of the presented in a complex form model is demonstrated on practical and hypothetical examples. To confirm the significance of the obtained results, an example of modeling and short-term forecasting of eight main indices of the Moscow Exchange in the period from February 24, 2022 to May 13, 2022 is given. Vector autoregression models and complex-valued vector autoregression models were built on this dataset. The constructed models were analyzed from the point of view of approximation accuracy and the accuracy of short-term economic forecasting. The results confirm the scientific significance of the proposed group of autoregressive models in a complex form.

Keywords: economic forecasting, vector autoregressions, complex-valued economics, complex autoregressions, information criteria.

References

1. Gelrud Ya.D., Ugryumov E.A., Rybak V.L. Vektornaya model' avtoregressii pokazateley proizvodstvennoy deyatel'nosti stroitel'nogo predpriyatiya [Vector model of autoregression of indicators of production activity of a construction enterprise]. *Bulletin of SUSU. Series: Computational Mathematics and Informatics*, 2018, v. 7, no. 3, pp. 19-30. (In Russ.)

2. Dorokhov E.V. Statisticheskiy podkhod k izucheniyu prognozirovaniya indeksa RTS na osnove metodov vektornoy avtoregressii i kointegratsii [Statistical approach to the study of forecasting the RTS index based on the methods of vector autoregression and cointegration]. *Finance and business*, 2008, no. 1, pp. 85-110. (In Russ.)

3. Kachkin K.A. Statisticheskiy analiz i prognozirovaniye rynka tsennykh bumag v Rossii [Statistical analysis and forecasting of the securities market in Russia]. *Student science and XXI century,* 2021, vol. 18, no. 1-2 (21), pp. 140-144. (In Russ.)

4. Mamatova N. Primeneniye modeli vektornoy avtoregressii dlya analiza potrebleniya elektroenergii [Application of the vector autoregression model for the analysis of electricity consumption]. *Mathematical models of the economy: a collection of scientific papers*. Moscow, NRU HSE, 2015. no. 4, pp. 15-19. (In Russ.)

5. Poghosyan K. l'ternativnyye modeli prognozirovaniya osnovnykh makroekonomicheskikh pokazateley v Armenii [Alternative models for forecasting the main macroeconomic indicators in Armenia]. *Quantile*, 2019, no. 13, pp. 25-39. (In Russ.)

6. Svetunkov S.G. *Ekonomicheskoye prognozirovaniye s pomoshch'yu kompleksnykh avtoregressiy* [Economic forecasting using complex autoregressions]. St. Petersburg, Polytech-PRESS, 2021. 156 p. (In Russ.)

7. Sukhanova E.I., Shirnaeva S.Yu. Prognozirovaniye pokazateley stabilizatsionnykh protsessov ekonomiki Rossii na osnove modeley vektornoy avtoregressii [Forecasting indicators of stabilization processes in the Russian economy based on vector autoregression models]. *Fundamental Research*, 2014, no. 9, pp. 1590-1595. (In Russ.)

8. Barrett A. *Forecasting the Prices of Cryptocurrencies using a Novel Parameter Optimization of VARIMA Models. Chapman University.* Chapman University Digital Commons, 2021. 277 p.

9. Bin Xu, Boqiang Lin. What cause a surge in China's CO2 emissions? A dynamic vector autoregression analysis. *Journal of Cleaner Production*, 2016, vol. 143, pp. 17-26.

10. Chandra S.R., Al-Deek H. Predictions of Freeway Traffic Speeds and Volumes Using Vector Autoregressive Models. *Journal of Intelligent Transportation Systems*, 2009, no. 13:2, pp. 53-72.

11. Fitrianti H., Belwawin S.M., Riyana M., Amin R. Climate modeling using vector moving average autoregressive. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science,* 2019, pp. 28-39.

12. García-Martos C., Rodríguez J., Sánchez M.J. Modelling and forecasting fossil fuels, CO2 and electricity prices and their volatilities. *Applied Energy*, 2013, vol. 101, pp. 363-375.

13. Jusmawati M.H., Penerapan N.F. Model Vector Autoregressive Integrate Moving Average dalam Peramalan Laju Inflasi dan Suku Bunga di Indonesia. *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, December 2020, no. 3(2), pp. 73-82

14. Lusia D.A., Ambarwati A. Multivariate Forecasting Using Hybrid VARIMA-Neural Network in JCI Case, Proceeding. *International Symposium on Advanced Intelligent Informatics: Revolutionize Intelligent Informatics Spectrum for Humanity*, SAIN, 2018, pp. 11-14.

15. Lütkepohl H. *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer, Berlin, 2005. 764 p.

16. Meimela A., Lestari S.S., Mahdy I.F., Toharudin T. , Ruchjana B.N. Modeling of Covid-19 in Indonesia using vector autoregressive integrated moving average. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, pp. 55-79.

17. Olson D.A., Riedel T.P., Long R., Offenberg J.H, Lewandowski M., Kleindienst T.E. Time series analysis of wintertime O3 and NOx formation using vector autoregressions. *Atmospheric Environment*, 2019, pp. 218-232.

18. Rusyana A., Tatsara N., Balqis R., Rahmi S. Application of Clustering and VARIMA for Rainfall Prediction. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2020, pp. 428-438.

19. Svetunkov S. Complex-Valued Modeling in Economics and Finance. Springer Science+Business Media, New York, 2012. 318 p.

20. Thelin E.P., Raj R., Bellander B., Nelson D., Piippo-Karjalainen A., Siironen J., Tanskanen P., Hawrylu, G., Hasen M., Unger B. and Zeiler F.A. Comparison of high versus low frequency cerebral physiology for cerebrovascular reactivity assessment in traumatic brain injury: a multi-center pilot study. *Journal of clinical monitoring and computing*, 2020, no. 34(5), pp. 971-994.

21. Wai-Sum Chan, Johnny Siu-Hang Li, Jackie Li. The CBD Mortality Indexes: Modeling and Applications. *North American Actuarial Journal*, 2014, no. 18:1, pp. 38-58.

22. Zhang G.P. Time series forecasting using a hybrid ARIMA and neural network model. *Neurocomputing*, Jan 2003, vol. 50, pp. 159-175.

23. Zhang Yi, Cheng Chuntian, Rui Cao, Gang Li, Jianjian Shen, Xinyu Wu, Multivariate probabilistic forecasting and its performance's impacts on long-term dispatch of hydro-wind hybrid systems. *Applied Energy*, 2021, vol. 283, pp. 116-243.

24. Zeiler F.A., Ercole A., Cabeleira M. [et al.] Evaluation of the relationship between slow-waves of intracranial pressure, mean arterial pressure and brain tissue oxygen in TBI: a CENTER-TBI exploratory analysis. *Journal of Clinical Monitoring and Computing*, 2020, pp. 781-799.