УДК 519.832.3
JEL C72

ВАРИАНТЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ИГРЕ «ИНСПЕКЦИЯ»

Чернов Виктор Петрович, д-р экон. наук, проф.

Санкт-Петербургский государственный экономический университет, наб. канала Грибоедова, д. 30-32, литер А, Санкт-Петербург, Россия, 191023; e-mail: viktor_chernov@mail.ru

Предмет: принятие решений обеспечивается необходимой информацией. Оптимизация в различных информационных условиях приводит к разным управленческим решениям. Исследовать эти вопросы особенно удобно с привлечением моделей теории игр. *Цель*: анализ вариантов процесса оптимизации решений и уточнение зависимости его результатов от информационной основы в наборе простых ситуаций, описываемых игрой, которую можно представить в динамическом и в статическом формате. *Дизайн исследования*: дается обобщение и анализ известной игры «Инспекция» в различных направлениях. Анализ процесса формирования оптимальных решений в динамическом рекурсивном формате игры и в статическом матричном формате позволяет оценить относительную полезность вариантов поступления информации при разработке оптимальной стратегии поведения. Анализ вариантов игры с возможностью активного и пассивного поведения игроков позволяет определить границы, в которых та или иная форма поведения является оптимальной. *Результаты*: сформированы оптимальные стратегии поведения в условиях доступности и недоступности информации о результатах прошедших шагов многошаговой игры. Получена оценка полезности такой информации. Представлен анализ влияния возможности получения информации на оптимальное поведение игроков и на результаты игры.

Ключевые слова: рекурсивные игры, матричные игры, ценность информации.

DOI: 10.17308/meps/2078-9017/2022/7/17-28

Введение

В известной книге Оуэна [12], а также в работах [8, 10, 11], изложена игра «Инспекция». Это многоходовая антагонистическая игра, описывающая взаимодействие двух лиц, распределенное во времени. Каждый ход соответствует своему периоду времени.

На каждом ходу Игрок 1 (Нарушитель) может нарушить некое заранее сформулированное правило, а Игрок 2 (Инспектор) может проверить наличие нарушения. Если это происходит в одном и том же периоде, то нарушение выявляется. Если в разных периодах – то нет.

Согласно [12], если Нарушитель нарушает и это выявляется, то Нарушитель получает – 1. Если не выявляется, то +1. Если не нарушает, то 0, независимо от действий Инспектора.

Игра «Инспекция» представляет собой важную и широко распространенную модель поведения, описывающую взаимодействие двух лиц. Она нуждается в различных модификациях при моделировании реальных ситуаций и анализе ценности информации при разработке оптимальной стратегии поведения [2, 3, 7, 9, 10]. Ниже представлено несколько таких модификаций. Укажем несколько конкретных особенностей, включенных в эти модификации.

Во-первых, величина штрафа и величина выигрыша в реальности могут существенно различаться. Выигрыш мы в дальнейшем примем за 1, а штраф будет равен $-M$.

Во-вторых, возможны разные варианты игры: когда результаты очередного шага сразу становятся известны обоим игрокам, или же когда они не известны им до конца игры. Мы рассмотрим оба варианта.

В-третьих, мы проанализируем не только вариант, когда игроки до конца игры могут действовать или бездействовать, но и вариант, когда они обязаны действовать.

В-четвертых, анализ будет проведен в развернутом пошаговом и в матричном одновременном представлении.

Игра продолжается N периодов времени. По результатам игры первый игрок получает выигрыш, величину которого мы обозначим посредством V_N.

Методы и результаты исследования

- А. Игра «Инспекция» с обязательной активностью игроков.

Мы увидим, что в условиях, когда каждый из игроков должен проявить активность в каком-то периоде времени, информация о результатах очередного шага не меняет стратегии игроков, оба представления – рекурсивное и матричное – дают одни и те же результаты. Это качественно отличает данную форму игры от последующей, где проявление активности игроками необязательно.

- А1. Рекурсивное представление игры.

Представим игру сначала в развернутой, рекурсивной форме. У каждого игрока имеется N стратегий, соответствующих выбору того или иного периода времени для активного действия (действие состоит в нарушении правил для одного игрока и в инспекции нарушения для другого).

При $N=1$ матрица Нарушителя А1 имеет размерность 1×1 (Нарушитель обязан действовать, а Инспектор проверить) и имеет вид:

$-M$

При этом

$$V_1 = -M. \tag{1}$$

При произвольном $N>1$ матрица Нарушителя A_N имеет вид:

$-M$	1
1	V_{N-1}

Это матрица указывает результаты возможных действий игроков в периоде N. Строки соответствуют действиям Нарушителя, столбцы – действиям Инспектора. Первая строка и первый столбец – активное поведение игроков (нарушение для Нарушителя, проверка для Инспектора). Вторая строка и второй столбец – пассивное поведение (бездействие) игроков. Элементы матрицы – это выигрыши Нарушителя по результатам игры в целом (не только этого хода).

Элемент матрицы $a_{11} = -M$, поскольку если Нарушитель нарушил и инспекция прошла в том же периоде, то по условию игры нарушение вскрыто и Нарушитель платит штраф величины М, выигрыш Нарушителя равен $-M$.

Элемент матрицы $a_{12}=1$, поскольку если Нарушитель нарушил, а инспекция не прошла, то Нарушитель получает выигрыш, равный 1.

Элемент матрицы $a_{21}=1$, поскольку если инспекция прошла, а Нарушитель не нарушил, то он имеет открытую возможность нарушить на следующем ходу (или любом из последующих ходов) и получить 1 в качестве выигрыша. Здесь предполагается, что в очередном периоде обоим игрокам известна история предшествующих периодов.

Наконец, $a_{22}=V_{N-1}$, поскольку если оба игрока бездействовали, то игра сводится к такой же игре с числом ходов, меньшим на 1. Анализ игры имеет рекурсивную форму.

Если бы выполнялось неравенство $V_{N-1}\geq 1$, то элемент a_{21} был бы седловой точкой и Нарушитель выигрывал бы наверняка. Поскольку это не так, то $V_{N-1}<1$ и матрица A_N не имеет седловой точки.

По формуле цены антагонистической игры с матрицей 2×2 [1, 5, 6] имеем

$$V_N = \frac{1 + M \cdot V_{N-1}}{M + 2 - V_{N-1}}. \tag{2}$$

Формула (2) позволяет свести вычисление V_N к V_{N-1}. Отсюда и из (1) последовательно получаем:

$$V_2 = 1 - \frac{M+1}{2}, \quad V_3 = 1 - \frac{M+1}{3}, \quad V_4 = 1 - \frac{M+1}{4} \cdots \tag{3}$$

Возникает гипотеза, что

$$V_N = 1 - \frac{M+1}{N} \qquad (4)$$

Формулу (4) несложно доказать методом индукции по N. Из (4) получаем

$$V_{N-1} = 1 - \frac{M+1}{N-1}\,. \qquad (5)$$

Подставляем полученную величину V_{N-1} в матрицу A_N и получаем новую запись матрицы A_N:

$-M$	1
1	$1 - \frac{M+1}{N-1}$

Отсюда, согласно известным формулам [1, 4, 5, 6], получаем компоненты оптимальной смешанной стратегии Нарушителя:

$$p_1^{(N)} = \frac{1}{N}\,, \quad p_2^{(N)} = \frac{N-1}{N}\,. \qquad (6)$$

Полученные вероятности не зависят от величины штрафа M. Нарушитель с вероятностью $1/N$ проводит нарушение в первом периоде для N-шаговой игры. Матрица симметрична и вероятности оптимальной стратегии для Инспектора такие же:

$$q_1^{(N)} = \frac{1}{N}\,, \quad q_2^{(N)} = \frac{N-1}{N}\,. \qquad (7)$$

- А2. Матричное представление игры

Рассмотрим матричное представление той же игры в виде матрицы В размерности $N \times N$:

-M	1	…	1
1	-M	…	1
…	…	…	…
1	1	…	-M

Строки матрицы B – это стратегии Нарушителя; каждая строка предполагает нарушение в периоде, соответствующем номеру строки. Столбцы матрицы – это стратегии Инспектора; каждый столбец предполагает проведение инспекции в соответствующем периоде.

Игроки выбирают по одной стратегии. На пересечении – размер выигрыша Нарушителя. Если номера строки и столбца совпадают, то Нарушитель получает $-M$. Если не совпадают, то он получает 1. Матрица симметрична относительно главной диагонали.

Для решения игры сведем ее к паре сопряженных задач линейного программирования [1, 4, 5]. Предварительно прибавим ко всем элементам матрицы B одну и ту же константу *M+1.* Получим матрицу *C*, все элементы которой положительны:

1	*M+2*	…	*M+2*
M+2	1	…	*M+2*
…	…	…	…
M+2	*M+2*	…	1

Этой матрице соответствует задача линейного программирования, решение которой определяет оптимальную стратегию Игрока1:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_N \ \rightarrow min \tag{8}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + (M+2)\cdot x_2 + \cdots + (M+2)\cdot x_N \ \geq 1, \\ (M+2)\cdot x_1 + x_2 + \cdots + (M+2)\cdot x_N \ \geq 1, \\ \quad \dots \\ (M+2)\cdot x_1 + (M+2)\cdot x_2 + \cdots + x_N \ \geq 1, \end{cases} \tag{9}$$

и в условиях неотрицательности переменных:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots \ x_N \geq 0 \,. \tag{10}$$

Для решения этой задачи сложим все неравенства (9). Получим

$$\big((M+2)\cdot(N-1)+1\big)\cdot(x_1 + x_2 + \cdots + x_N) \geq N, \tag{11}$$

то есть

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_N) \geq \frac{N}{\big((M+2)\cdot(N-1)+1\big)} \,. \tag{12}$$

Если придать всем x_i равные значения:

$$x_i = \frac{N}{\big((M+2)\cdot(N-1)+1\big)}, \tag{13}$$

то (12) будет выполнено в форме равенства:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_N) = \frac{N}{\big((M+2)\cdot(N-1)+1\big)} \,. \tag{14}$$

Тем самым будет достигнут экстремум (8). При этом выполняются ограничения (9), тоже в форме равенств, и условия (10). Таким образом, (13) есть решение задачи линейного программирования (8) – (10).

Отсюда получаем компоненты оптимальной смешанной стратегии Игрока 1:

$$p_i = \frac{x_i}{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}, \tag{15}$$

то есть, согласно (13) – (15),

$$p_i = \frac{1}{N} \,. \tag{16}$$

Мы получаем, что Нарушитель при любой величине штрафа *M* должен с равными вероятностями выбирать период для нарушения. Стратегия не зависит от величины штрафа.

Совершенно аналогично решается задача поиска оптимальной стратегии Инспектора (матрица игры симметрична). В результате получим, что и Инспектор для своего инспектирующего действия должен выбирать тот или иной период времени с равными вероятностями

$$q_i = \frac{1}{N}\,. \tag{17}$$

Согласно (14) цена игры V_C для матрицы *C* определяется формулой

$$V_C = \frac{(M+2)\cdot(N-1)+1}{N}\,. \tag{18}$$

Скорректированная цена игры V_B для исходной матрицы *B* равна

$$V_B = V_C - (M+1) = 1 - \frac{M+1}{N}\,. \tag{19}$$

В отличие от стратегий игроков цена игры зависит от величины штрафа *M*. Положительность или отрицательность исхода игры для Нарушителя зависит от соотношения между величиной штрафа и числом периодов игры.

В частности, для любого числа периодов времени *N* можно выбрать такую достаточно большую величину штрафа *M* (большую, чем *N–1*), что цена игры станет отрицательной величиной, то есть Нарушитель в среднем будет проигрывать.

Оптимальные стратегии игроков получились одинаковыми при последовательном пошаговом анализе игры, когда игроки перед очередным шагом знали результаты предшествующего шага, и при параллельном матричном анализе, когда стратегия строится сразу на все периоды. Таким образом, знание промежуточных действий игроков не улучшает их решений.

В данном формате игры Нарушитель, согласно правилам, вынужден произвести нарушение в одном из периодов. В следующем формате такое условие будет снято, что приведет к другому решению игры.

- Б. Игра «Инспекция» с возможной пассивностью игроков

Рассмотрим другой формат игры «Инспекция», когда игроки могут не проявлять активности на протяжении всей игры. Для Инспектора возможность такого бездействия не влияет на оптимальную стратегию. А для Нарушителя бездействие может оказаться выгодным. Собственно, установление высокого штрафа и направлено обычно на то, чтобы потенциальные нарушители не нарушали установленные правила.

- Б1. Результаты очередного шага игры известны игрокам до перехода к следующему шагу (рекурсивное представление)

Для анализа воспользуемся сначала пошаговым рекурсивным представлением игры. Отметим, что при этом результаты очередного шага игры становятся известны игрокам до перехода к следующему шагу.

При таком представлении матрица игры *A* в каждом периоде имеет размерность 2×2. Элементы матрицы – это результаты всей многошаговой игры для первого игрока – Нарушителя. Строки и столбцы – это стратегии игроков в первом периоде. Первая строка и первый столбец соответствуют активному поведению игроков («нарушить» и «проверить» соответственно), а вторая строка и столбец – их пассивному поведению.

При $N=1$ матрица A_1 имеет вид:

$-M$	1
0	0

Эта матрица отличается от начальной матрицы A_1 в предшествующем формате игры. Новая матрица A_1 имеет седловую точку a_{21} (левый ноль). Нарушителю нужно бездействовать, а Инспектору проверить. Цена игры

$$V_1 = 0\,. \tag{20}$$

При произвольном $N>1$ матрица A_N имеет вид:

$-M$	1
1	V_{N-1}

Матрица A_N при $N>1$ совпадает с матрицей предшествующего формата игры; сохраняется и обоснование ее элементов. Однако поскольку начальные матрицы A_1 различны, то и конечные результаты игры будут различаться.

Поскольку $V_{N-1}<1$ (иначе Нарушитель выигрывал бы наверняка), то эта матрица A_N не имеет седловой точки.

По формуле решения антагонистической игры 2×2 [1, 5, 6] получаем выражение, определяющее цену игры V_N через цену игры V_{N-1} с меньшим числом периодов:

$$V_N = \frac{M \cdot V_{N-1} + 1}{-V_{N-1} + M + 2}. \tag{21}$$

Отсюда (учитывая, что $V_1 = 0$) последовательно получаем:

$$V_2 = \frac{1}{M+2}, V_3 = \frac{2}{M+3}, V_4 = \frac{3}{M+4}\,, \tag{22}$$

что приводит к гипотезе:

$$V_N = \frac{N-1}{M+N}. \tag{23}$$

Утверждение (23) можно доказать методом индукции по *N*. В частности, при $M=1$ получаем формулу, приведенную в книге Оуэна [12].

Подставим в матрицу A_N вместо элемента V_{N-1} соответствующее выражение:

$$V_{N-1} = \frac{N-2}{M+N-1} \ . \qquad (24)$$

Получим явный вид матрицы A_N:

$-M$	1
1	$\frac{N-2}{M+N-1}$

и по ней найдем оптимальные смешанные стратегии игроков. Оптимальная стратегия Нарушителя для N-шаговой игры имеет вид:

$$p_1^{(N)} = \frac{1}{N+M}, \ p_2^{(N)} = 1 - p_1^{(N)} = \frac{N+M-1}{N+M} \ . \qquad (25)$$

В силу симметрии матрицы оптимальная стратегия Инспектора имеет такой же вид:

$$q_1^{(N)} = \frac{1}{N+M}, \ q_2^{(N)} = 1 - q_1^{(N)} = \frac{N+M-1}{N+M} \ . \qquad (26)$$

Полученные стратегии и цена игры V_N отличаются от соответствующих результатов предыдущего формата игры (формулы (4), (6), (7)). Такое изменение обусловлено допущением пассивности игроков.

- Б2. Матричное представление игры

Рассмотрим матричное представление того же формата игры. В матричном представлении результаты очередного шага игры не известны игрокам до окончания игры.

У каждого из игроков имеется $N+1$ стратегия: не предпринимать ничего или же проявить активность в одном из N периодов. Игроки не знают действий соперника, имевших место на предшествующих шагах. Матрица игры D размерности $(N+1) \times (N+1)$ имеет вид:

0	0	0	…	0
1	*-M*	1	…	1
1	1	*-M*	…	1
…	…	…	…	…
1	1	1	…	*-M*

Верхняя строка и левый столбец соответствуют пассивному поведению игроков. Остальные строки и столбцы – активному поведению в соответствующем периоде. Таким образом, в матрице D можно вычленить симметричную квадратную подматрицу B размерности $N \times N$ (совпадающую с матрицей B, построенной выше для предыдущего формата игры), окаймленную сверху и слева строкой, состоящей из нулей, и столбцом, состоящим из единиц.

Левый столбец матрицы *D* доминируется любым другим столбцом. Другими словами, Инспектору ни в какой ситуации невыгодно быть пассивным. Устраним левый столбец и рассмотрим оставшуюся матрицу *G* размерности $(N+1)\times N$:

0	0	…	0
-M	1	…	1
1	-M	…	1
…	…	…	…
1	1	…	-M

Матрица *G* состоит из двух частей: нулевая верхняя строка и симметричная нижняя матрица *B* размерности $N\times N$.

Столбцы матрицы *G* равноправны, как стратегии второго игрока. В оптимальную смешанную стратегию они войдут с одинаковыми вероятностями, равными $1/N$.

Нижние *N* строк матрицы *G* равноправны, как стратегии первого игрока. В оптимальную смешанную стратегию они войдут с одинаковыми вероятностями. Верхняя строка дает нулевой вклад при любой смешанной стратегии игрока. Таким образом, оптимальную смешанную стратегию первого игрока следует искать в одном из двух видов: только первая строка (чистая стратегия) или равновероятная смесь последних *N* строк.

Первый вид стратегии дает нулевой выигрыш. При втором виде размер выигрыша уже был определен в предыдущем формате игры и, согласно формуле (19), он равен $1-\frac{M+1}{N}$. Сравнивая эти две величины, получаем, что если штраф достаточно велик по сравнению с длительностью игры (если $M \geq N-1$), то оптимальная стратегия Нарушителя состоит в бездействии (выбор нулевой строки), а если штраф достаточно мал (если $M \leq N-1$), то оптимальным является равновероятное нарушение в любом из периодов. При равенстве $M = N-1$ эти две стратегии дают одинаковый результат.

Таким образом, цена *N*-шаговой игры V_N определяется формулой

$$V_N = max\,(1-\frac{M+1}{N}\,;0). \qquad (27)$$

Заключение

Проведен детальный анализ оптимального поведения игроков в различных вариантах игры «Инспекция». Исследованы варианты с обязательной активностью и возможной пассивностью игроков в динамическом (рекурсивном) и статическом (матричном) формате игры при различной величине начисления штрафа Нарушителю.

Отдельный интерес представляет сравнение двух вариантов Б1 и Б2 игры с доступностью и с недоступностью информации после каждого шага игры. Оптимальное поведение игроков различно в этих двух вариантах. Цена игры также различна. В варианте Б1 цена игры определяется формулой (23), в варианте Б2 – формулой (27). Разность между ними при *N>1* положительна и равна одной из двух величин:

$$\frac{N-1}{M+N} \quad \text{или} \quad \frac{M\cdot(M+1)}{(M+N)\cdot N}, \tag{28}$$

в соответствии с тем является ли оптимальной пассивная или активная стратегия Нарушителя.

Эту разность можно рассматривать как оценку полезности для Нарушителя информации о проведенной инспекции сразу после ее проведения.

Список источников

1. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков*. Наука, 1985. 272 с.
2. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. *Введение в прикладную теорию игр*. 1981. 336 с.
3. Колесник Г.В. *Теория игр с приложениями к моделированию экономических систем*. URSS. 2022. 256 с.
4. *Матричные игры* / Под ред. Н.Н. Воробьева. Москва, 1961. 280 с.
5. Печерский Л.С., Беляева А.А. *Теория игр для экономистов: вводный курс*. СПб., ЕУ, 2001. 253 с.
6. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр*. БХВ, 2012. 432 с.
7. *Позиционные игры* / Под ред. Н.Н. Воробьева, И.Н. Врублевской. Москва, 1967. 524 с.
8. Fudenberg D., Tirole J. *Game Theory.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts. 1991.
9. Luce R.D., Raiffa H. *Games and decisions.* NY, 1957 [рус. перевод: Льюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. Москва, 1961].
10. Moulin H. *Theorie des jeux pour l'economie et la politique*. Paris, 1981. [рус. перевод: Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. Москва, Мир, 1985. 200 с.]
11. Osborne M.J., Rubinstein A. *A Course in Game Theory.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts. 1994.
12. Owen G. *Game Theory.* NY, Academic Press, 1982 [рус. перевод: Оуэн Г. Теория игр. Москва, URSS, 2010. 216 с.].

THE VARIOUS POSSIBILITIES OF THE OPTIMAL SOLUTIONS IN THE GAME «INSPECTION»

Chernov Viktor Petrovich, Dr. Sci. (Econ.), Prof.

St. Petersburg State University of Economics, Griboedov canal emb., 30-32, St. Petersburg, Russia, 191023; e-mail: viktor_chernov@mail.ru

Importance: making decisions is based on the necessary information. Optimization in different information conditions yields different managerial decisions. To study these conditions is especially convenient using the models of Game Theory. *Purpose*: analysis of options of the optimization solution process and the improvement of the dependence of its results on the information base in simple situations corresponding to the game can be presented in the dynamical and statical format. *Research design*: we give a generalization and analysis of the famous «Inspection» game. The analysis of the process of making optimal decisions in the dynamical recursive and in the statical matrix format allows us to estimate the comparative usefulness of the information received when creating optimal behavioral strategy. The analysis of the versions of the game with the active and with the passive behavior of players allows us to set the bounds inside of which one of these two behaviors is optimal. *Results*: we form optimal behavioral strategies under the assumptions that the information about the results of the previous steps of the game is available or not. We obtained the estimation of the usefulness of the information received. We present the analysis of the influence of the possibility to get the information on the optimal strategies of the players and on the results of the game.

Keywords: recursive games, matrix games, value of the information.

References

1. Vorobyov N.N. *Teorija igr dlja economistov-kibernetikov* [Game theory for economists-cybernetics]. Nauka, 1985. 272 p.
2. Dyubin G.N., Suzdal' V.G. *Vvedenie v prikladnuju teoriju igr* [Introduction to applied game theory]. 1981. 336 p.
3. Kolesnik G.V. *Teorija igr s prilozhenijami k modelirovaniju ekonomicheskih sistem* [Game theory with economic system modelling]. Moscow, URSS, 2022. 256 p.
4. *Matrichnye igry* [Matrix games] / Red. N.N. Vorobyov. Moscow, Nauka, 1961. 280 p.
5. Pecherskij L.S., Belyaeva A.A. *Teorija igr dlja ekonomistov* [Game theory for economists]. Sankt-Peterburg, EU, 2001. 253 p.
6. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A., Shevkoplyas E.V. *Teorija igr* [Game theory]. BHV, 2012. 432 p.
7. *Pozitsionnye igry* [Positional games] / Red. N.N. Vorobyov, I.N. Vrublevskaya. Moscow, Nauka, 1967. 524 p.
8. Fudenberg D., Tirole J. *Game Theory.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1991.
9. Luce R.D., Raiffa H. *Games and decisions.* NY, 1957 [рус. перевод: Льюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. Москва, 1961].
10. Moulin H. *Theorie des jeux pour l'economie et la politique*. Paris, 1981.

11. Osborne M.J., Rubinstein A. *A Course in Game Theory.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1994.

12. Owen G. *Game Theory.* NY, Academic Press, 1982 [рус. перевод: Оуэн Г. Теория игр. Москва, URSS. 2010. 216 с.].