

## ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО НЕТОЧНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

© 2022 Г. Ш. Цициашвили<sup>1</sup>, М. А. Осипова<sup>1,2</sup>✉

<sup>1</sup>Институт прикладной математики ДВО РАН  
ул. Радио, 7, 690041 Владивосток, Российская Федерация

<sup>2</sup>Дальневосточный федеральный университет  
п. Аякс, 10, о. Русский, 690922 Владивосток, Российская Федерация

**Аннотация.** В данной работе решена задача оценки параметров системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по неточным наблюдениям на коротком временном интервале. Речь идет о системах дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной (о нормальных системах), у которых число параметров совпадает с числом уравнений, с заданными начальными условиями. По аналогии с линейным регрессионным анализом на рассматриваемом отрезке времени выбирается достаточно большое число наблюдений и оцениваются значения функций, стоящие в правых частях нормальной системы уравнений, и значения их производных в начальный момент времени. По аналогии с методом моментов по оценкам значений функций и ее производных определяются неизвестные параметры исходной системы дифференциальных уравнений. В работе исследуются свойства полученных оценок и при определенных условиях, накладываемых на шаг разбиения временного отрезка, доказываются их асимптотическая несмещенность и состоятельность при увеличении числа наблюдений. Для двух частных случаев были проведены вычислительные эксперименты и их результаты продемонстрированы в работе.

Предложенный в работе алгоритм оценивания параметров системы обыкновенных дифференциальных уравнений по неточным детерминированным наблюдениям, в отличие от классических оптимизационных алгоритмов, позволяет оценить скорость сходимости полученных оценок к оцениваемым параметрам. А рассмотрение малого интервала временного наблюдения дает возможность построить процедуру планирования эксперимента. Наряду с системами обыкновенных дифференциальных уравнений предлагаемый алгоритм может быть применен и к системам уравнений в частных производных, что планируется реализовать авторами в дальнейшем.

**Ключевые слова:** обыкновенные дифференциальные уравнения, линейный регрессионный анализ, теорема существования и единственности, теорема о неявной функции; метод моментов.

### ВВЕДЕНИЕ

Задача оценки параметров системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений по неточным детерминированным наблюдениям с помощью известных оптимизационных алгоритмов решена в работах [1, 2]. Альтернативный подход для оценки па-

раметров детерминированной рекуррентной последовательности, наблюдаемой со случайными аддитивными и мультипликативными ошибками, основанный на соотношениях между средними по траектории и их аппроксимации по неточным наблюдениям предложен в [3, 4].

Преимуществом первого подхода является возможность использования известных оптимизационных алгоритмов, а недостатком — отсутствие оценок скорости сходи-

✉ Осипова Марина Анатольевна  
e-mail: [mao1975@list.ru](mailto:mao1975@list.ru)



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.

мости к оцениваемым параметрам. Преимуществом второго подхода является наличие теоретических оценок скорости сходимости к оцениваемым параметрам, а недостатком — необходимость установления предельных циклов или предельных распределений у рекуррентных последовательностей. При всех различиях в этих подходах общим является тот факт, что с увеличением длины отрезка наблюдения точность оценок повышается и при определенных условиях может стремиться к нулю. В то же время интересной является задача оценки параметров на малом интервале наблюдений, что тесно связано с оптимизационными методами планирования эксперимента (см., например, [5, 6]).

В настоящей работе эта задача решается для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом оценка параметров этой системы по неточным наблюдениям решается в предположении, что на относительно коротком отрезке можно проводить большое число наблюдений. Для оценки параметров используется метод линейного регрессионного анализа [6] применительно к функции регрессии, слабо отклоняющейся от исходной функции в малой окрестности наблюдаемого момента времени. Этот метод основан на минимизации среднеквадратичного отклонения последовательности наблюдений от линейной функции регрессии с оптимизируемыми значениями коэффициентов регрессии. При этом подбирается такая зависимость между числом наблюдений и интервалом между соседними наблюдениями, чтобы возникающая погрешность определения параметров стремилась к нулю при устремлении числа наблюдений к бесконечности. В работе также используется теорема о неявной функции, позволяющая установить, что полученные оценки параметров являются состоятельными в зависимости от числа наблюдений. На основе полученных результатов были проведены вычислительные эксперименты.

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений при фиксированных значениях параметров  $\beta_i = \beta_i^0, i = \overline{1, m}$ ,

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_m, \beta_1^0, \dots, \beta_m^0), i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где  $x_1 = x_1(t), \dots, x_m = x_m(t)$  — некоторые функции. В [7] сформулирована и доказана теорема существования и единственности решения этой системы.

**Теорема 1.** Пусть функции  $F_i = F_i(x_1, \dots, x_m, \beta_1^0, \dots, \beta_m^0)$  непрерывны вместе со своими частными производными  $\frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , в прямоугольном параллелепипеде

$$Q = \{(x_1, \dots, x_m) \in R^m : |x_i - x_i^0| \leq a_i, i = \overline{1, m}\}.$$

Тогда существует отрезок  $[t_0 - r, t_0 + r]$ , на котором система уравнений (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям  $x_i(t_0) = x_i^0, i = \overline{1, m}$ .

**Замечание 1.** Из теоремы Вейерштрасса для функций непрерывных на компакте следует, что функции  $x_i(t), i = \overline{1, m}$ , на отрезке  $[t_0 - r, t_0 + r]$  (непрерывность следует из дифференцируемости) и функции  $\left| F_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right|, i = \overline{1, m}$ , на множестве  $Q$  (в силу непрерывности  $F_i$  и  $\frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ ) достигают своих наибольших конечных значений  $C_i$ .

Обозначим

$$F_i(M_0) = F_i^0, i = 1, \dots, m,$$

$$M_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0, \beta_1^0, \dots, \beta_m^0),$$

$$M_0^* = (x_1^0, \dots, x_m^0, F_1^0, \dots, F_m^0, \beta_1^0, \dots, \beta_m^0),$$

$$G_i = G_i(x_1, \dots, x_m, f_1, \dots, f_m, \beta_1, \dots, \beta_m) = F_i(x_1, \dots, x_m, \beta_1, \dots, \beta_m) - f_i,$$

где  $f_1, \dots, f_m$  — некоторые переменные, и рассмотрим систему уравнений

$$G_i = 0, i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

В [8] сформулированы условия, при которых систему (2) можно разрешить относительно переменных  $\beta_1, \dots, \beta_m$ .

**Теорема 2.** Если функции  $G_i, i = \overline{1, m}$ , непрерывно дифференцируемы в окрестности точки  $M_0^*$  и якобиан

$$\left. \frac{\partial(G_1, \dots, G_m)}{\partial(\beta_1, \dots, \beta_m)} \right|_{M_0^*} \neq 0, \quad (3)$$

то существуют окрестности  $U, V, W$  точек  $(x_1^0, \dots, x_m^0), (F_1^0, \dots, F_m^0), (\beta_1^0, \dots, \beta_m^0)$ , соответственно, такие, что система уравнений (2) однозначно разрешима в окрестности  $U \times V \times W$  точки  $M_0^*$  относительно переменных  $\beta_1, \dots, \beta_m$ . При этом, если  $\beta_i = g_i(x_1, \dots, x_m, f_1, \dots, f_m)$ ,  $i = 1, m$ , — указанное решение, то все функции  $g_i$  непрерывно дифференцируемы в окрестности  $U \times V$  и  $\beta_i^0 = g_i(x_1^0, \dots, x_m^0, F_1^0, \dots, F_m^0)$ .

**Замечание 2.** При выполнении условий теоремы 2 функции  $g_i, i = 1, \dots, m$ , непрерывны в точке  $(x_1^0, \dots, x_m^0, F_1^0, \dots, F_m^0)$ .

## 2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим дифференциальное уравнение при фиксированном значении параметра  $\beta = \beta_0$

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \beta_0) \quad (4)$$

с начальным условием  $x(0) = x_0$ , полагая, что функция  $F(x, \beta)$  непрерывно дифференцируема в окрестности точки  $M_0(x_0, \beta_0)$  и  $\left. \frac{\partial F}{\partial \beta} \right|_{M_0} \neq 0$ . Пусть известны неточные наблюдения  $y(t) = x(t) + \varepsilon(t)$  за состоянием  $x(t)$  в моменты  $t = kh, k = 0, \pm 1, \dots, \pm n, hn \leq r$ . Обозначим

$$\varepsilon_k = \varepsilon(kh), x_k = x(kh), y_k = y(kh) = x_k + \varepsilon_k, F_0 = F(x_0, \beta_0)$$

и предположим, что  $\varepsilon_k, k = 0, \pm 1, \dots, \pm nh$ , — совокупность независимых и одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ . Ставится задача оценки параметра  $\beta_0$  дифференциального уравнения (4) по этим наблюдениям.

Решение этой задачи проводится в два этапа. Сначала строятся с использованием модификации метода наименьших квадратов оценки  $\bar{x}_0, \bar{F}_0$  и исследуется их сходимость при  $n \rightarrow \infty$  к оцениваемым параметрам  $x_0, F_0$ . Затем по аналогии с методом моментов строится оценка  $\tilde{\beta}_0$  и исследуется ее сходимость к оцениваемому параметру  $\beta_0$ .

Обозначим

$$\bar{x}_0 = \frac{\sum_{k=-n}^n y_k}{2n+1}, \bar{F}_0 = \frac{\sum_{k=-n}^n y_k kh}{\sum_{k=-n}^n (kh)^2}. \quad (5)$$

**Теорема 3.** Пусть  $h = n^{-\alpha}$ . Тогда при  $\alpha > 1$  оценка  $\bar{x}_0$  являются асимптотически несмещенной и состоятельной оценкой параметра  $x_0$ . Оценка  $\bar{F}_0$  является асимптотически несмещенной оценкой параметра  $F_0$ . При  $1 < \alpha < 3/2$  оценка  $\bar{F}_0$  является состоятельной оценкой  $F_0$ .

**Доказательство.** Обозначим

$$\tilde{y}_k = x_0 + F_0 kh + \varepsilon_k,$$

$$\tilde{x}_0 = \sum_{k=-n}^n \frac{\tilde{y}_k}{2n+1}, \tilde{F}_0 = \frac{\sum_{k=-n}^n \tilde{y}_k kh}{\sum_{k=-n}^n (kh)^2}.$$

Оценки  $\tilde{x}_0, \tilde{F}_0$  получены методом наименьших квадратов для коэффициентов  $x_0, F_0$  линейной регрессии и удовлетворяют следующим соотношениям

$$M\tilde{x}_0 = x_0, M\tilde{F}_0 = F_0, D\tilde{x}_0 = \frac{\sigma^2}{2n+1}, D\tilde{F}_0 = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=-n}^n (kh)^2}. \quad (6)$$

В свою очередь, почти наверное выполняются равенства

$$\bar{x}_0 - \tilde{x}_0 = \frac{\sum_{k=-n}^n (\bar{y}_k - \tilde{y}_k)}{2n+1}, \bar{F}_0 - \tilde{F}_0 = \frac{\sum_{k=-n}^n (\bar{y}_k - \tilde{y}_k) kh}{\sum_{k=-n}^n (kh)^2}. \quad (7)$$

Причем разности  $\bar{y}_k - \tilde{y}_k = x_k - x_0 - F_0 kh, k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$  являются детерминированными величинами.

Из замечания 1 следует существование числа  $C$ , удовлетворяющего неравенству

$$\sup_{|t| \leq nh} |x''(t)| = \sup_{|t| \leq nh} \left| \frac{\partial F(x, \beta_0)}{\partial x} F(x, \beta_0) \right| = 2C.$$

Тогда из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$x(kh) = x(0) + F_0 kh + \frac{(kh)^2}{2} x''(kh\tau_k),$$

$$|\tau_k| \leq 1, k = 0, \pm 1, \dots, \pm n,$$

следуют неравенства

$$|x_k - x_0 - F_0 kh| \leq C(kh)^2, k = 0, \pm 1, \dots, \pm n. \quad (8)$$

Из формул (7), (8) при  $n \rightarrow \infty$  следует

$$\begin{aligned} |\bar{x}_0 - \tilde{x}_0| &\leq \frac{\sum_{k=-n}^n |x_k - x_0 - F_0 kh|}{2n+1} \leq \\ &\leq \frac{2Ch^2 \sum_{k=1}^n k^2}{2n+1} \sim \frac{Ch^2 n^2}{3}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} |\bar{F}_0 - \tilde{F}_0| &\leq \frac{\sum_{k=-n}^n |(x_k - x_0 - F_0 kh)kh|}{\sum_{k=-n}^n (kh)^2} \leq \\ &\leq \frac{Ch^3 \sum_{k=1}^n k^3}{\sum_{k=1}^n h^2 k^2} \sim \frac{Chn}{4}. \end{aligned} \quad (10)$$

Формулы (6), (9), (10) приводят к соотношениям

$$|M\bar{x}_0 - x_0| \leq \frac{Ch^2 n^2}{2}, D\bar{x}_0 = D\tilde{x}_0 \quad (11)$$

$$|M\bar{F}_0 - F_0| \leq \frac{3Chn}{4}, D\bar{F}_0 = D\tilde{F}_0. \quad (12)$$

В свою очередь,  $a_n \leq b_n$  означает, что  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n / b_n \leq 1$ . Тогда из условия  $h = n^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 1$ , и соотношений (11), (12) имеем

$$|M\bar{x}_0 - x_0| \rightarrow 0, |M\bar{F}_0 - F_0| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (13)$$

что означает асимптотическую несмещенность оценок  $x_0, F_0$ .

Из неравенства БьенOME — Чебышева, условия  $h = n^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 1$ , и соотношений (9), (11) получаем для любого  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} P(|\bar{x}_0 - x_0| > \delta) &\leq P(|\bar{x}_0 - \tilde{x}_0| + |\tilde{x}_0 - x_0| > \delta) = \\ &= P(|\tilde{x}_0 - x_0| \geq \delta - |\bar{x}_0 - \tilde{x}_0|) \leq \\ &\leq \frac{\sigma^2}{(2n+1)(\delta - |\bar{x}_0 - \tilde{x}_0|)^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, при  $h = n^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 1$ , оценка  $x_0$  является состоятельной оценкой  $x_0$ .

В то же время из соотношений (10), (12), (13) при  $h = n^{-\alpha}$ ,  $1 < \alpha < 3/2$ , получим для любого  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} P(|\bar{F}_0 - F_0| > \delta) &\leq P(|\bar{F}_0 - \tilde{F}_0| + |\tilde{F}_0 - F_0| > \delta) = \\ &= P(|\tilde{F}_0 - F_0| > \delta - |\bar{F}_0 - \tilde{F}_0|) \leq \\ &\leq \frac{3\sigma^2}{h^2 n^3 (\delta - |\bar{F}_0 - \tilde{F}_0|)^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (15)$$

Следовательно, при выполнении условия  $h = n^{-\alpha}$ ,  $1 < \alpha < 3/2$ , оценка  $\bar{F}_0$  является состоятельной оценкой  $F_0$ . Теорема доказана.

**Теорема 4.** Уравнение  $\underline{F}(x_0, \beta) = \bar{F}_0$  имеет единственное решение  $\beta_0$ , являющееся состоятельной оценкой параметра  $\beta_0$ .

**Доказательство.** Так как функция  $F(x, \beta)$  непрерывно дифференцируема в окрестности точки  $M_0(x_0, \beta_0)$  и  $\left. \frac{\partial F}{\partial \beta} \right|_{M_0} \neq 0$ , то выполняются условия теоремы для функции

$G(x, f, \beta) = F(x, \beta) - f$ . Значит в некоторой окрестности точки  $M_0^*(x_0, F_0, \beta_0)$  уравнение разрешимо относительно  $\beta = g(x, f)$ , при этом  $\beta_0 = g(x_0, F_0)$ . Тогда из замечания 2 получаем, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что в окрестности

$$\{(x, f) : |x - x_0| \leq \delta(\varepsilon), |f - F_0| \leq \delta(\varepsilon)\}$$

точки  $(x_0, F_0)$  неравенство  $|\beta - \beta_0| \leq \varepsilon$  выполняется.

В свою очередь, из соотношений (14), (15) следует, что для любых  $\varepsilon, \delta(\varepsilon)$  существует такое  $n_0(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$ , что при любом  $n > n_0(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$  справедливы неравенства

$$\begin{aligned} P(|\bar{x}_0 - x_0| \leq \delta(\varepsilon)) &\geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \\ P(|\bar{F}_0 - F_0| \leq \delta(\varepsilon)) &\geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (18)$$

и, следовательно, из соотношений (18) имеем  $P(|\bar{\beta}_0 - \beta_0| \leq \varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ . Таким образом, для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $n_0(\varepsilon)$  такое, что при  $n > n_0(\varepsilon)$   $P(|\bar{\beta}_0 - \beta_0| > \varepsilon) < \varepsilon$ , что означает состоятельность (сходимость по вероятности при  $n \rightarrow \infty$ ) построенной оценки.

### 3. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему (1) с начальными условиями  $x_i(0) = x_i^0$ ,  $i = 1, m$ . Полагаем, что функции  $F_i(x_1, \dots, x_m, \beta_1, \dots, \beta_m)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , непрерывно дифференцируемы в окрестно-

сти точки  $M_0$  и якобиан  $\left. \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(\beta_1, \dots, \beta_m)} \right|_{M_0} \neq 0$ .

Пусть известны неточные наблюдения  $y_i(t) = x_i(t) + \varepsilon_i(t)$  за состоянием  $x_i(t)$ ,  $i = 1, m$ , в моменты  $t = kh$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$ ,  $hn \leq r$ , и  $\varepsilon_i(kh)$ ,  $i = 1, m$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots, \pm nh$ , — совокупность независимых и одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ . Ставится задача оценки вектора параметров  $(\beta_1^0, \dots, \beta_m^0)$  системы уравнений (1) по этим наблюдениям.

Обозначим

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{k=-n}^n y_i(kh)}{2n+1}, \bar{F}_i = \frac{\sum_{k=-n}^n y_i(kh)}{\sum_{k=-n}^n (kh)^2}, i = \overline{1, m}. \quad (19)$$

**Теорема 5.** Пусть  $h = n^{-\alpha}$ . Тогда при  $\alpha > 1$  оценка  $\bar{x}_i$  является асимптотически несмещенной и состоятельной оценкой параметра  $x_i^0$ . Оценка  $\bar{F}_i$  является асимптотически несмещенной оценкой параметра  $F_i^0$ . При  $1 < \alpha < 3/2$  оценка  $\bar{F}_i$  является состоятельной оценкой величины  $F_i^0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

**Теорема 6.** Система уравнений

$$F_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \beta_1, \dots, \beta_m) = F_i^0, i = \overline{1, m}. \quad (20)$$

имеет единственное решение  $(\bar{\beta}_1^0, \dots, \bar{\beta}_m^0)$ , которое является состоятельной оценкой вектора параметров  $(\beta_1^0, \dots, \beta_m^0)$ .

**Доказательства** теорем 5, 6 почти дословно повторяют доказательства теорем 3, 4.

#### 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Вычислительный эксперимент проводился сначала для задачи Коши  $\frac{dx}{dt} = \beta_0 x$ ,  $x(0) = 1$ , в случае  $\beta_0 = 0,5$ . Решение этого уравнения имеет вид  $x = e^{\beta_0 t}$ . Мы предположили, что по наблюдением за процессом, описываемым этим уравнением, получены неточные наблюдения  $y_{\pm k} = e^{b_0 h(\pm k)} + \varepsilon_{\pm k}$  в моменты времени  $\pm kh$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $h = n^{-5/4}$ ,  $n = 10000$ . Здесь  $\varepsilon_{\pm k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , независимые случайные величины, распределенные равномерно на отрезке  $[-1/2, 1/2]$ . По формуле (5) оценивались сначала параметры  $x_0, F_0 = F(x_0, \beta_0)$  (в наших обозначениях  $x_0, F_0$ ), затем фор-

мула для оценки параметра  $\beta_0$  была найдена из уравнения  $F_0 = x_0 \beta_0$ .

Таблица 1

интервалы распределения	относительные частоты
0.387413–0.432612	0.027
0.432612–0.477811	0.238
0.477811–0.52301	0.477
0.52301–0.568209	0.229
0.568209–0.613408	0.029

В табл. 1 представлены результаты вычислительного эксперимента, проведенного 1000 раз, а именно, интервальное распределение (5 интервалов) относительных частот  $\beta_0$ .

Также был проведен вычислительный эксперимент для системы уравнений Лоренца с заданными начальными условиями  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 2$ ,  $z(0) = 1$ , в случае  $\sigma_0 = 1$ ,  $r_0 = 2$ ,  $b_0 = 3$ :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma_0(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = x(r_0 - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - b_0 z, \end{cases} \quad (21)$$

с заданными начальными условиями  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 2$ ,  $z(0) = 1$ , в случае  $\sigma_0 = 1$ ,  $r_0 = 2$ ,  $b_0 = 3$ . Решение этой системы не выписывается в явном виде, а решается конечно-разностным методом. Выпишем соответствующие уравнения для сетки  $\{\pm kh, k = 0, 1, \dots, n\}$  с шагом  $h = n^{-5/4}$ ,  $n = 10000$ :

$$\begin{cases} x_{\pm(k+1)} = x_{\pm k} \pm \sigma_0 h (y_{\pm k} - x_{\pm k}), \\ y_{\pm(k+1)} = y_{\pm k} \pm h (x_{\pm k} (r_0 - z_{\pm k}) - y_{\pm k}), \\ z_{\pm(k+1)} = z_{\pm k} \pm h (x_{\pm k} y_{\pm k} - b_0 z_{\pm k}), \end{cases}$$

$x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 1$ . Мы предположили, что по наблюдением за процессом, описываемым этими уравнением, получены неточные наблюдения

$$\begin{aligned} X_{\pm k} &= x_{\pm k} + \varepsilon_1(\pm hk), \quad Y_{\pm k} = y_{\pm k} + \varepsilon_2(\pm hk), \\ Z_{\pm k} &= z_{\pm k} + \varepsilon_3(\pm hk), \quad k = 0, 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_i(\pm hk)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , — независимые случайные величины, распределенные равномерно на отрезке  $[-1/2, 1/2]$ . По фор-

мулам (19) оценивались сначала параметры  $x_0, y_0, z_0, F_i^0 = F_i(x_0, y_0, z_0, \sigma_0, r_0, b_0), i = 1, 2, 3$ , в наших обозначениях  $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0, \bar{F}_i^0, i = 1, 2, 3$ . Далее оценки параметров  $\sigma_0, r_0, b_0$  были найдены из соотношений

$$\begin{cases} \bar{F}_1^0 = \sigma(\bar{y}_0 - \bar{x}_0), \\ \bar{F}_2^0 = \bar{x}_0(r - \bar{z}_0) - \bar{y}_0, \\ \bar{F}_3^0 = \bar{x}_0\bar{y}_0 - b\bar{z}_0. \end{cases}$$

Таблица 2

интервалы $\bar{\sigma}_0$ распределения	относительные частоты $\bar{\sigma}_0$
0.883607–0.931473	0.035
0.931473–0.979339	0.275
0.979339–1.0272	0.486
1.0272–1.07507	0.192
1.07507–1.12294	0.015
интервалы $\bar{r}_0$ распределения	относительные частоты $\bar{r}_0$
1.89817–1.94253	0.038
1.94253–1.98689	0.242
1.98689–2.031262	0.471
2.03126–2.07562	0.224
2.07562–2.11998	0.025
интервалы $\bar{b}_0$ распределения	относительные частоты $\bar{b}_0$
2.87579–2.92301	0.021
2.92301–2.97022	0.267
2.97022–3.01744	0.457
3.01744–3.06466	0.231
3.06466–3.11188	0.024

В табл. 2 представлены результаты вычислительного эксперимента, проведенного 1000 раз, а именно, интервальное распределение относительных частот  $\sigma_0, r_0, \beta_0$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наряду с системами обыкновенных дифференциальных уравнений предлагаемый метод оценки параметров может быть применен к уравнениям или системам уравнений в частных производных. В качестве основы для

развития этого метода оценки параметров может быть взята теорема существования решения системы уравнений в частных производных в окрестности некоторой точки (см., например, [14]).

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пененко, А. В. Согласованные численные схемы для решения нелинейных обратных задач идентификации источников градиентными алгоритмами и методами Ньютона — Канторовича / А. В. Пененко // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2018. – Том 21, № 1. – С. 99–116.
2. Penenko, A. V. Numerical study of a direct variational data assimilation algorithm in Almaty city conditions / A. V. Penenko [и др.] // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. – 2019. – Том 7, № 1. – P. 53–64.
3. Tsitsiashvili, G. Sh. Study of Synergistic Effects in Complex Stochastic Systems Mathematics / G. Sh. Tsitsiashvili // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, No 12. – P. 1396.
4. Цициашвили, Г. Ш. Оценка параметров нелинейных рекуррентных соотношений / Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2021. – № 3. – С. 27–37.
5. Ермаков, С. М. Математическая теория планирования эксперимента / С. М. Ермаков. – М. : Наука, 1983.
6. Рыков, В. В. Математическая статистика и планирование эксперимента / В. В. Рыков, В. Ю. Иткин. – М. : Российский государственный ун-т нефти и газа им. И. М. Губкина, 2008.
7. Виленкин, Н. Я. Дифференциальные уравнения / Н. Я. Виленкин, М. А. Доброхотова, А. Н. Сафонов. – М. : Просвещение, 1984. – 176 с.
8. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – Т. 2. – М. : ФИЗМАЛИТ, 2005. – 424 с.

**Цициашвили Гурами Шалвович** — д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник ИПМ ДВО РАН.

E-mail: guram@iam.dvo.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-2600-0474>

**Осипова Марина Анатольевна** — канд. физ.-мат. наук, доцент ДВФУ, научный сотрудник ИПМ ДВО РАН.

E-mail: mao1975@list.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5615-9449>

DOI: <https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2022/2/50-57>

ISSN 1995-5499

Received 05.11.2021

Accepted 29.06.2022

## ESTIMATION OF PARAMETERS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS ACCORDING TO INACCURATE OBSERVATIONS

© 2022 G. Sh. Tsitsiashvili<sup>1</sup>, M. A. Osipova<sup>1,2</sup>✉

<sup>1</sup>*Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of Russian Academy Sciences  
7, Radio Street, 690041 Vladivostok, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Far Eastern Federal University  
10, Ajax, Russian Island, 690922 Vladivostok, Russian Federation*

**Annotation.** In this paper, the problem of estimating the parameters of a system of ordinary differential equations of the first order from inaccurate observations over a short time interval is solving. We are talking about systems of differential equations resolved with respect to the derivative (about normal systems), in which the number of parameters coincides with the number of equations, with given initial conditions. By analogy with linear regression analysis, a sufficiently large number of observations are selecting over the time under consideration and the values of the functions standing in the right parts of the normal system of equations and the values of their derivatives at the initial moment of time are estimating. By analogy with the method of moments, unknown parameters of the initial system of differential equations are determining by estimates of the values of functions and its derivatives. In the work, the properties of the obtained estimates are investigating and, under certain conditions imposed on the step of splitting the time interval, their asymptotic non-bias and consistency with an increase in the number of observations are proving. Computational experiments were carrying out for two special cases and their results are demonstrating in the work.

The algorithm proposed in the paper for estimating the parameters of a system of ordinary differential equations by inaccurate deterministic observations, in contrast to classical optimization algorithms, allows us to estimate the rate of convergence of the obtained estimates to the estimated parameters. In addition, the consideration of a small interval of time observation makes it possible to build an experiment planning procedure. Along with systems of ordinary differential equations, the proposed algorithm can be applying to systems of partial differential equations, which is planning to be implemented by the authors in the future.

**Keywords:** ordinary differential equations, linear regression analysis, existence and uniqueness theorem, implicit function theorem; method of moments.

---

✉ Osipova Marina A.  
e-mail: mao1975@list.ru

## CONFLICT OF INTEREST

The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

## REFERENCES

1. Penenko A. V. (2018) Agreed Numerical Schemes for Solving Nonlinear Inverse Problems of Source Identification by Gradient Algorithms and Newton — Kantorovich Methods. *Sib. magazine Comput. Math.* Vol. 21, No 1. P. 99–116.
2. Penenko A. V., Khassenova Z. T., Penenko V. V. and Pyanova E. A. (2019) Numerical study of a direct variation data assimilation algorithm in Almaty city conditions. *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications.* Vol. 7, No 1. P. 53–64.
3. Tsitsiashvili G. Sh. (2021) Study of Synergistic Effects in Complex Stochastic Systems Mathematics. *Mathematics.* Vol. 9, No 12, P. 1396.
4. Tsitsiashvili G. Sh. and Osipova M. A. (2021) Estimation of the parameters of nonlinear recurrence relations. *Bulletin of the Voronezh State University. System analysis and information technologies.* Vol. 3. P. 27–37.
5. Ermakov S. M. (1983) Mathematical theory of experiment planning. *Moscow : Nauka.*
6. Rykov V. V. and Itkin V. Yu. (2008) Mathematical statistics and experiment planning. *Moscow : Russian State University of Oil and Gas. I. M. Gubkina.*
7. Vilenkin N. Ya., Dobrokhotova M. A. and Safonov A. N. (1984) Differential equations. *Moscow : Enlightenment.* 176 p.
8. Kudryavtsev L. D. (2005) Short course of mathematical analysis. T. 2. *Moscow : FIZMALIT.* 424 p.

**Tsitsiashvili Gurami Sh.** — DSc in Physics and Mathematics, Professor, Main Scientific Researcher, Institute for Applied Mathematics FEB RAS.

E-mail: guram@iam.dvo.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-2600-0474>

**Osipova Marina A.** — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Far Eastern Federal University, Scientific Researcher, Institute for Applied Mathematics FEB RAS.

E-mail: mao1975@list.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5615-9449>