

ОТОБРАЖЕНИЕ ЭНО С ГИСТЕРЕЗИСОМ: УПРАВЛЕНИЕ ХАОСОМ

© 2022 П. А. Мелешенко¹, А. В. Толкачев^{1,2}, О. И. Канищева^{1,3}✉

¹Воронежский государственный университет

Университетская пл., 1, 394018 Воронеж, Российская Федерация

²Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова
ул. Тимирязева, 8, 394613 Воронеж, Российская Федерация

³Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия
имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»
ул. Старых Большевиков, 54а, 371600 Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. В статье исследуется динамика системы, задаваемая модифицированным отображением Эно. Гистерезисный элемент формализуется, посредством, конструктивной модели. В работе исследуются задачи связанные, с управлением динамикой такой системы. В частности, изучаются возможные модификации предельного множества (аттрактора) отображения Эно в условиях гистерезисного воздействия. Для анализа динамики проводится численное моделирование при различных значениях параметров исследуемого отображения, для которых свойственна хаотическая динамика. На основе полученных данных, производится сравнительный анализ странных аттракторов модифицированного и классического отображения Эно. Для идентификации различных динамических режимов построены бифуркационные диаграммы, рассчитан старший показатель Ляпунова на основе алгоритма Розенштейна и произведен 0-1 тест в зависимости от параметров системы, а также от параметра гистерезисной нелинейности. Отмечается регуляризирующая роль гистерезисного элемента в модифицированной системе в сравнении с классическим отображением, и изменение положения точек бифуркации в пространстве параметров системы.

Ключевые слова: нелинейная динамика, хаос, отображение Эно, гистерезис, модель Прейзаха.

ВВЕДЕНИЕ

В современной науке большую роль играют нелинейные модели динамических систем, так как большинство практически важных явлений протекают в нелинейной области. Среди таких моделей можно выделить класс динамических систем с хаотическим поведением, — один из важнейших разделов современной нелинейной динамики [1–3]. В настоящее время принято считать, что существуют три принципиально различных формы детерминированного хаоса. Это диссипативный

хаос, математическим образом которого является странный аттрактор; консервативный хаос, для которого все фазовое пространство является большим «хаотическим морем» с беспорядочно расположенными внутри него эллиптическими островами; и смешанная динамика, характеризующаяся принципиальной неотделимостью в фазовом пространстве аттракторов, репеллеров и консервативного поведения траекторий [4].

Все эти динамические системы обладают свойством, которое состоит в том, что для них невозможно предсказать поведение, несмотря на то, что эволюция такой системы задается детерминированными дифференциальными уравнениями. Такие системы сверхчувствительны к начальным условиям, и

✉ Канищева Олеся Ивановна
e-mail: oleka_olesya@mail.ru



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.

сколь угодно малая неточность в их значении приводит со временем к экспоненциальному росту отклонений от изначальной траектории, что делает предсказание для достаточно больших интервалов времени принципиально невозможным. Например, ни одна траектория, принадлежащая аттрактору диссипативной хаотической системы, не является устойчивой. Таким образом, проблема предсказуемости поведения хаотических систем, управления их динамикой и возможность подавления хаоса является важной задачей в прикладных исследованиях этого нелинейного явления.

Еще одним примером явления, играющего значительную роль в современной теории нелинейных динамических систем, является гистерезис. Такая нелинейность присуща многим физическим, физико-химическим, биологическим и экономическим процессам и явлениям и связано, либо со внутренней структурой этих процессов, либо является следствием их динамических особенностей [5, 6].

В настоящее время для моделирования динамики систем с гистерезисом используются конструктивные модели (неидеальное реле, преобразователь Прейзаха, модель Ишлинского) и феноменологические (модель Боука — Вена, Айвана, Дьюема) [6–18].

Основы математической теории систем с гистерезисом, трактующей гистерезисные нелинейности как операторы или преобразователи с соответствующими пространствами состояний, были созданы М. А. Красносельским и его учениками. Предложенный единый подход к математическому описанию, охватывающий многие феноменологические модели гистерезиса, позволил развить эффективные методы качественного и численного исследования моделей с гистерезисными элементами. Наиболее полно конструктивные модели гистерезисных преобразователей, трактуемых как операторы, зависящие от своего начального состояния как от параметра и определённые на широком функциональном пространстве, изложены в монографии Красносельский М. А., Покровский А. В. [4].

Математические модели систем с гистерезисом, как правило, одновременно включают

дифференциальные уравнения (или их дискретные аналоги) и операторные соотношения между частью переменных. В настоящий момент свойства многих классов гистерезисных операторов достаточно хорошо изучены. С другой стороны, вопросы, относящиеся к различным аспектам динамики систем с включённым в них гистерезисом, остаются не исследованными.

Гистерезисные преобразователи обладают свойством диссипативности по отношению к энергии, запасенной в системе и хорошо известно, что площадь петли связана с энергетическими потерями.

Это же свойство позволяет использовать гистерезисные преобразователи в качестве перспективного инструмента управления хаотической динамикой. В связи с чем, особый интерес представляет разработка новых алгоритмов стабилизации, управления хаотической динамикой, основанных на диссипативных свойствах гистерезисных преобразователей. Этот подход использовался в работах [19–21], где рассматривалась система гистерезисно-связанных осцилляторов Ван дер Поля. Однако, применительно к хаотическим системам с дискретным временем указанный выше метод не применялся.

В настоящем исследовании в качестве такой динамической системы используется, отображение Эно, предложенное Мешелем Эно, как упрощенная модель отображения Пуанкаре для аттрактора Лоренца [22]. Для классического отображения точка на плоскости будет либо приближаться к множеству точек, известному как странный аттрактор Эно, либо уходить на бесконечность. Сам аттрактор в одном направлении представляет собой гладкий фрактал, а в другом канторово множество. Таким образом, описанные выше свойства выбранного отображения делают его любопытным примером дискретной во времени динамической системы.

Далее формулируется модификация для классического отображения Эно с гистерезисной нелинейностью, формализуемой посредством модели Прейзаха [5–7]. И проводится моделирование динамики двух систем с дальнейшим сравнительным анализом, где

отмечается влияние гистерезисной компоненты на динамику системы в сравнении с динамикой классического отображения Эно. Дальнейший анализ производится с помощью бифуркационных диаграмм. Для них рассчитывается старший показатель Ляпунова на основе алгоритма Розенштейна [23] и производится 0-1 теста [24]. В результате, отмечается регуляризирующая роль гистерезисного элемента в модифицированной системе.

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1. Нелинейность Преязаха

Остановимся подробнее на конструктивной модели гистерезиса, известной как нелинейность Преязаха, являющейся непрерывным аналогом преобразователя, состоящего из неидеальных реле, соединенных параллельно. Изначально модель была описана Вейсом [8], где использовалась для описания магнитных свойств сплошных сред. В работе Преязаха [7] эта модель была окончательно формализована, а также представлена электрическая схема, её реализующая, конструктивной частью которой было семейство неидеальных реле, соединённых параллельно как на рис. 1.

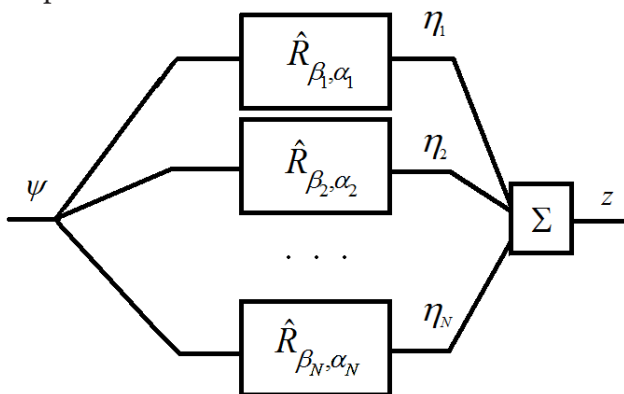


Рис. 1. Дискретный вариант модели Преязаха [Fig. 1. Discrete version of the Preisach model]

В рамках формального подхода рассмотрим гистерезисную нелинейность, как преобразователь (оператор), определенный на пространстве непрерывных функций, динамика которых описывается соотношениями: «вход-состояние» и «состояние-выход».

Через $\hat{R}_{\beta, \alpha}[\beta, \alpha, \chi_0, \tau_0, \cdot]$ обозначим гистерезисный преобразователь, соответствующий недельному реле с пороговыми числами β и α , где $\chi_0 = \{-1, 1\}$ — начальное состояние, τ_0 — начальный момент времени. Пространством состояний неидеального реле является двухэлементное множество $\{-1, 1\}$. Входом будет непрерывная при $\tau \geq \tau_0$ функция $\psi(\tau)$, а выходом ступенчатая функция $\chi(\tau)$, которая определяется операторным соотношением

$$\chi(\tau) = \hat{R}_{\beta, \alpha}[\beta, \alpha, \chi_0, \tau_0, \cdot] \psi(\tau). \quad (1)$$

В этом случае, начальное состояние χ_0 преобразователя должно удовлетворять условию

$$\chi_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi(0) \geq \alpha, \\ -1, & \text{если } \psi(0) \leq \beta, \end{cases} \quad (2)$$

если выполняется неравенство $\beta < \psi(0) < \alpha$, то величина χ_0 будет любым числом из множества $\{-1, 1\}$. Значения выхода $\chi(\tau)$ при непрерывном входе $\psi(\tau)$ для $\tau \in (\tau_0, \infty)$ при каждом $\tau = T$ определяются по правилу:

$$\hat{R}_{\beta, \alpha}[\beta, \alpha, \chi_0, \tau_0, \cdot] \psi(\tau) = \begin{cases} \chi_0, & \text{если } \forall \tau \in [\tau_0, T]: (\beta < \psi(\tau) < \alpha) \\ 1, & \text{если } \exists \tau' \in [\tau_0, T]: (\psi(\tau') \geq \alpha) \\ & \text{и } (\forall \tau \in [\tau', T]) (\psi(\tau) > \beta) \\ -1, & \text{если } \exists \tau' \in [\tau_0, T]: (\psi(\tau') \leq \beta) \\ & \text{и } (\forall \tau \in [\tau', T]) (\psi(\tau) < \alpha) \end{cases} \quad (3)$$

Схематично взаимосвязь между входом и выходом преобразователя изображена на рис. 2.

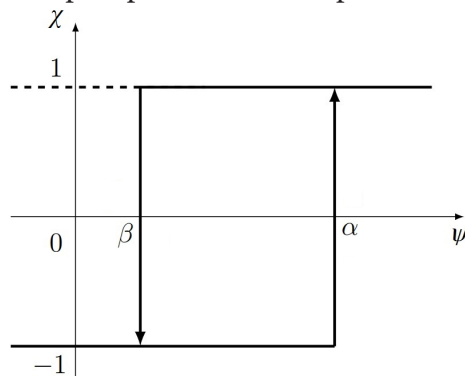


Рис. 2. Взаимосвязь между входом и выходом преобразователя $\hat{R}_{\beta, \alpha}[\beta, \alpha, \chi_0, \tau_0, \cdot]$ [Fig. 2. Relationship between input and output for operator $\hat{R}_{\beta, \alpha}[\beta, \alpha, \chi_0, \tau_0, \cdot]$]

Как отмечалось ранее, преобразователь Преизаха является континуальным аналогом семейства неидеальных реле, соединённых параллельно. Пространство состояний этого преобразователя состоит из пар $(\psi, \eta(\beta; \alpha))$, где ψ — произвольное число, а $\eta(\beta; \alpha)$ — характеристическая функция подмножества полуплоскости $\beta < \alpha$ (рис 3). Выход такого преобразователя $\hat{\Gamma}$ определяется следующим соотношением:

$$z(\tau) = \hat{\Gamma}[\eta(\beta, \alpha), \chi_0, \tau_0] \psi(\tau) = \iint_{\beta < \alpha} \hat{R}_{\beta, \alpha}[\beta, \alpha, \chi_0, \tau_0] \psi(\tau) d\beta d\alpha \quad \tau \geq \tau_0, \quad (4)$$

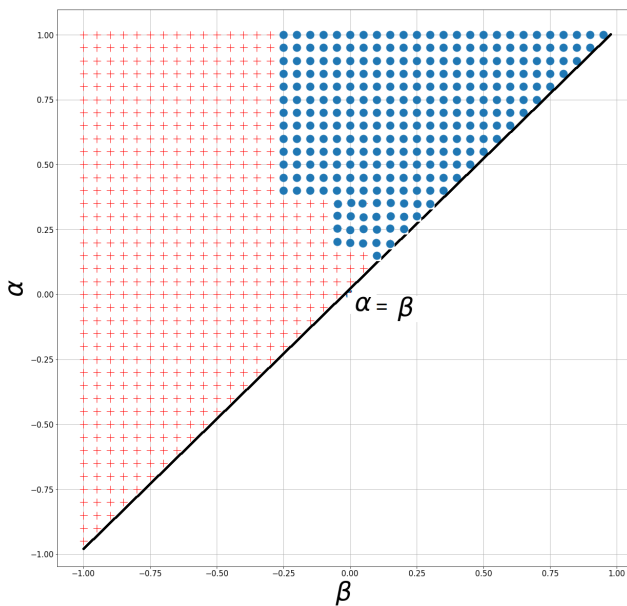


Рис. 3. Пространство состояний преобразователя Преизаха [Fig. 3. State space of the Preisach operator]

Полученный двойной интеграл аппроксимируется суммой для конечного количества реле. Например, на рис 3 рассматривалась аппроксимация из 820 реле с пороговыми числами $(\beta; \alpha) = (-1, 1)$, которые распределены на интервале с шагом $h = 0.05$. Начальное состояние всех реле в цепи имеет значение -1 . Далее подается вход, который меняет состояние реле на противоположное или нет по правилу (3). Таким образом, пространство состояний динамически зависит от прошлых моментов. Эта особенность преобразователя называется нелокальной памятью, что является качественно новым свойством, возника-

ющим вследствие коллективного взаимодействия с множеством простых и качественно подобных друг-другу компонентов [6].

1.2. Отображение Эно с гистерезисной нелинейностью Преизаха

В настоящем разделе рассматривается динамическая система с дискретным временем, обладающая странным аттрактором, являющаяся модификацией классического отображения Эно [22]. В ней, на модельном уровне, учитывается «гистерезисное» трение. Указанная система может служить моделью динамики ферромагнитной частицы, в вязкой среде, перемещающейся под воздействием кратковременных импульсов с периодом T .

Пусть частица с массой μ движется вдоль оси x , как показано на рис. 4. В промежутках времени между импульсами, динамика системы будет описываться простым линейным дифференциальным уравнением второго порядка и легко интегрироваться:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{\mu}{k} v_0 \left(1 - e^{-\frac{k}{\mu} t} \right), \\ v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{\mu} t}, \end{cases} \quad (5)$$

где x_0 и v_0 — начальные условия

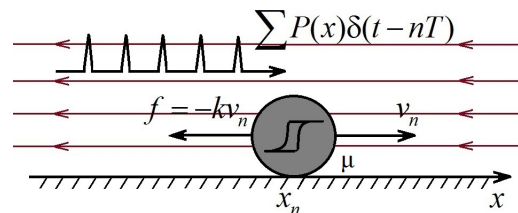


Рис. 4. Исследуемая механическая система [Fig. 4. The investigated mechanical system]

В силу периодичности внешнего воздействия удобно перейти к дискретному аналогу рассматриваемой системы.

Для этого введем переменные x_n, v_n , соответствующие координате и скорости непосредственно перед n -м воздействием на частицу импульсом P . Импульс воздействует на частицу кратковременно с периодом времени T . В этих условиях координата после толчка остается неизменной, но скорость становится $v = v_n + P/\mu$. Будем считать, что ве-

личина импульса зависит от положения частицы в пространстве в момент воздействия, как функция $P(x_n)$, тогда перед $n+1$ -м воздействием имеем:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{\mu}{k}(v_n + P(x_n)/\mu)\left(1 - e^{-\frac{k_T}{\mu}}\right), \\ v_{n+1} = (v_n + P(x_n)/\mu)e^{-\frac{k_T}{\mu}}. \end{cases} \quad (6)$$

Сделав замену

$$y = x + \frac{\mu}{k}v\left(1 - e^{-\frac{k_T}{\mu}}\right),$$

получим из (6):

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) - b \cdot y_n, \\ y_{n+1} = x_n, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$b = e^{-\frac{k_T}{\mu}}, \quad (8)$$

$$f(x) = x(1-b) + P(x_n)(1-b)\frac{1}{k}.$$

Далее, предположим, что пространственное распределение воздействующей на частицу импульсной силы таково, что $f(x) = 1 - ax^2$. С учетом вышесказанного, получим классическое отображению Эно:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a \cdot x_n^2 - b \cdot y_n, \\ y_{n+1} = x_n. \end{cases} \quad (9)$$

Однако, в модели (9) игнорируется тот факт, что движение происходит условиях трения гистерезисной природы. Поэтому, в этой работе мы в качестве модели гистерезисного трения используем нелинейность Прейзаха. Для чего в первое уравнение системы (9) добавим член εz_n :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a \cdot x_n^2 - b \cdot y_n - \varepsilon z_n, \\ y_{n+1} = x_n. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь ε — параметр, отвечающий за вклад гистерезисного трения в совокупную динамику, $z_n = \hat{\Gamma}[\eta_{n-1}(\beta, \alpha), \chi_0, \tau_0]\psi(\tau)|_{\tau=1}$ — выход гистерезисного преобразователя $\hat{\Gamma}$ (преобразователь Прейзаха), $\psi(\tau) = x_{n-1} + (x_n - x_{n-1}) \cdot \tau$.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотрим задачу управления динамикой системы Эно, где целью управления будет модификации предельных множеств у соответствующего отображения. Следует отметить, что подобная цель включает так же такие частные задачи, как изменение типа равновесия, изменение положения и типа бифуркации.

В настоящей работе динамика систем (9) и (10) будет моделироваться при $n = 1000$ итерациях. Гистерезисная нелинейность Прейзаха будет аппроксимироваться дискретными аналогами по 1485 и 5050 реле. В этих случаях пороговые числа для каждого реле $(\beta; \alpha)$ выбираются из интервалов $(-0.54; 0.54)$ и $(-1; 1)$, соответственно, с шагом $h = 0.02$.

Далее, проведем сравнительный анализ, так как учет гистерезисного трения в системе должен привести к заметным изменениям динамики, например, к изменению форм предельного множества. Отобразим полученные странные аттракторы для классического отображения (9) при $a = 1.4$, $b = -0.3$ (рис. 5) и модифицированного (10) при $a = 1.4$, $b = -0.3$, $\varepsilon = 1$, соответственно (рис. 6 а, б).

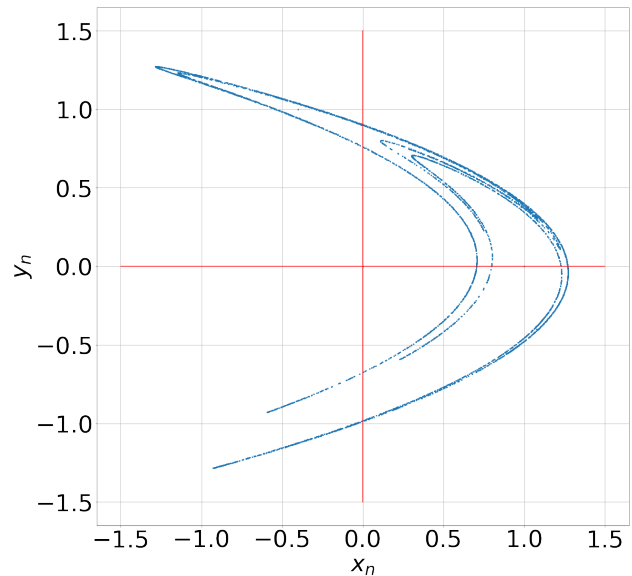
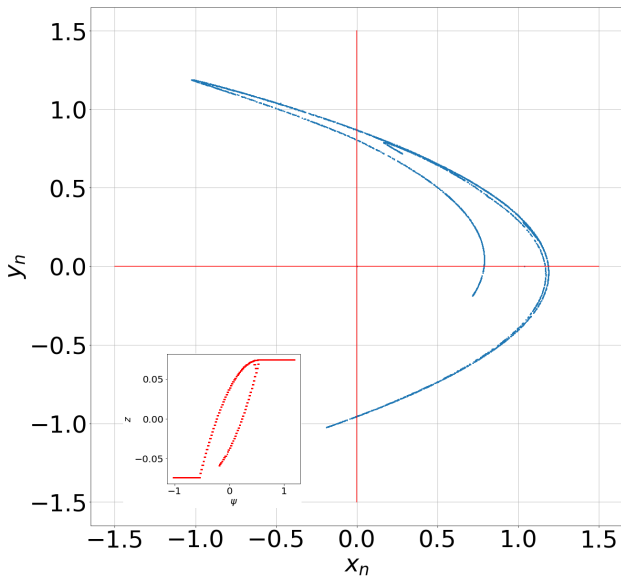
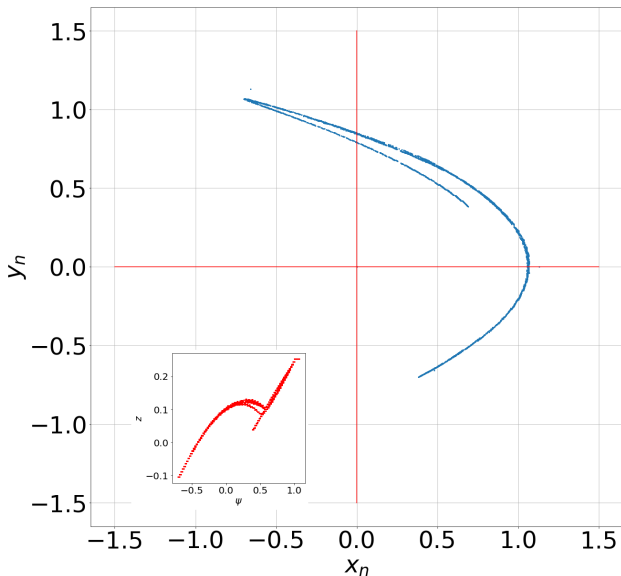


Рис. 5. Аттрактор Эно с без учета гистерезиса

[Fig. 5. The Henon attractor without hysteresis]



а) $\varepsilon = 1$, $(\beta, \alpha) = (-0,54; 0,54)$



б) $\varepsilon = 1$, $(\beta, \alpha) = (-1; 1)$

Рис. 6. Аттрактор Эно с учетом гистерезиса (а, б)

[Fig. 6. The Hénon attractor with hysteresis (a, б)]

Из рис. 5–6 видно, что учет гистерезиса в системе, приводит к ожидаемым изменениям предельного множества. При этом для каждого случая у рис. 6 в нижнем левом углу реконструируется соответствующая петля гистерезиса.

Используя эти же параметры продолжим сравнительный анализ с помощью метода бифуркационных диаграмм, старшего показателя Ляпунова и 0-1 теста. Первый метод

наглядно идентифицирует хаос, однако, не является точным способом. Старший показатель Ляпунова и 0-1 тест напротив, является наиболее объективными характеристиками в исследованиях хаотической динамики. Расчет показателя осуществляется с помощью алгоритма Розенштейна [23], а 0-1 тест производился с помощью алгоритма, что подробно описан в работе [24].

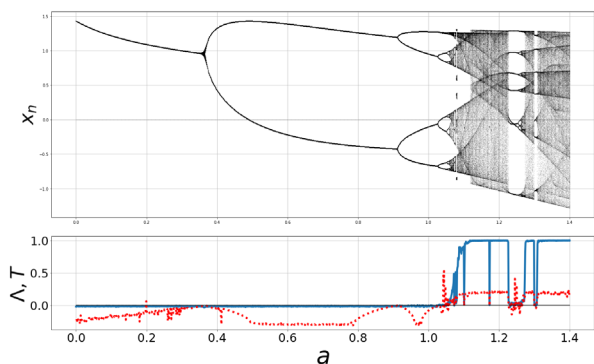
Далее смоделируем динамику при различных сочетаниях параметров $a \in [0; 1.4]$ с $b = -0.3$ и отобразим на плоскости (a, x_n) точки бифуркационной диаграммы, а под ней построим старший ляпуновский показатель Λ (пунктирная линия) и результат 0-1 теста T (сплошная линия), как на рис. 7.

Из рисунков видно, что наличие гистерезисной нелинейности в системе приводит к существенным изменениям её динамики. При учете гистерезисного трения переход к неустойчивому, хаотическому режиму наступает позже, в сравнении с классическим случаем (9).

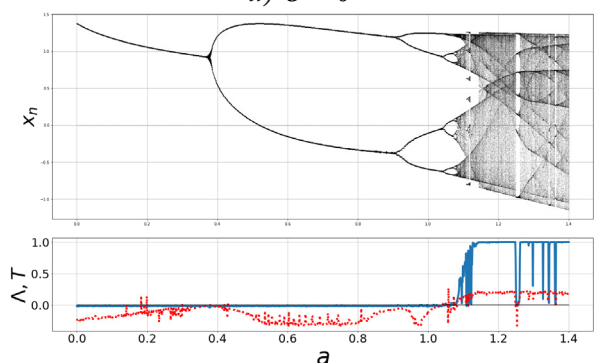
Например, при $\Lambda = 0$ происходит удвоение периода колебаний и в дальнейшем реализуется сценарий Фейгенбаума перехода к хаосу за счет бифуркации удвоения периода. И переход к неустойчивости наступает позже. За счёт этого, увеличивается область значений параметров, при которых реализуются другие динамические режимы: стационарные, периодические или квазипериодические. Таким образом, наблюдается регуляризация и уменьшение области значений параметра a , при которых идентифицируется хаос ($\Lambda > 0$).

Для изучения этого факта произведем те же расчеты, но относительно параметра ε , характеризующего вклад в динамику гистерезисного элемента. На рис 7 показаны результаты при различных значениях параметра ε .

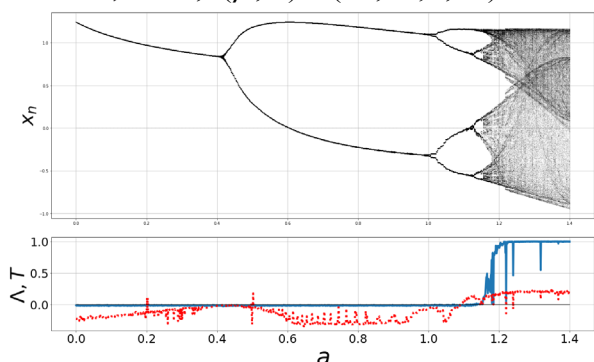
Полученные результаты согласуются с предыдущими расчетами. Из рис. 7 видно, что, с ростом значения ε , происходит постепенный переход от хаотического режима к регулярному (периодическому или квазипериодическому). Однако, дальнейшее увеличение параметра ε не приводит к окончательной регуляризации. И динамика представляет собой смену устойчивых и хаотических режимов в зависимости от ε .



а) $\varepsilon = 0$



б) $\varepsilon = 1, (\beta, \alpha) = (-0,54; 0,54)$

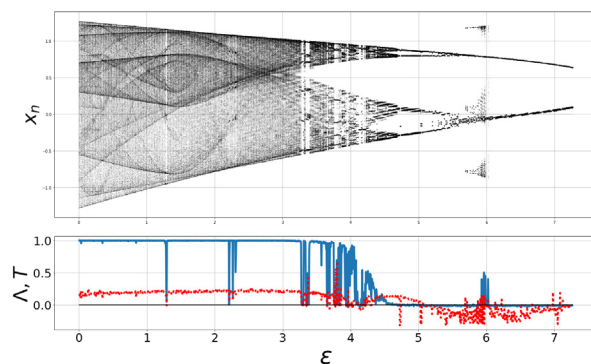


в) $\varepsilon = 1, (\beta, \alpha) = (-1; 1)$

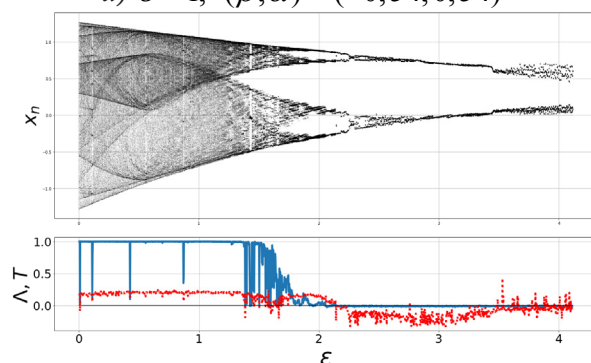
Рис. 7. Бифуркационная диаграмма, старший показатель Ляпунова Λ и 0-1 тест T для отображения Эно без учета (а) и с учетом (б, в) гистерезиса

[Fig. 7. Bifurcation diagram and the largest Lyapunov exponent and 0-1 test T for the Henon map without (a) and with (б, в) hysteresis]

Тем не менее, учет гистерезиса в рамках рассматриваемой модели приводит к довольно широким окнам регулярной динамики системы. Таким образом, подтверждается регуляризирующее влияние гистерезиса, но при этом не гарантируется, что с ростом значения параметра ε динамика будет соответствовать исключительно устойчивым режимам.



а) $\varepsilon = 1, (\beta, \alpha) = (-0,54; 0,54)$



б) $\varepsilon = 1, (\beta, \alpha) = (-1; 1)$

Рис. 8. Бифуркационная диаграмма, старший показатель Ляпунова Λ и 0-1 тест T в зависимости от ε [Fig. 8. Bifurcation diagram and the largest Lyapunov exponent and 0-1 test T depending on ε]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована модель хаотического отображения Эно с гистерезисной нелинейностью, которая формализуется при помощи оператора Преизаха. При проведении сравнительного анализа модифицированного и классического отображения Эно, было установлено, что наличие гистерезисной нелинейности, приводит к регуляризации динамики и увеличению области значений параметра a , для которых характерны отличные от хаоса динамические режимы.

Реализован скрипт на языке программирования Python для расчета и визуализации полученных данных при моделировании динамики исследуемой нелинейной системы.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Scott, A. C. A The Nonlinear Universe: Chaos; Emergence; Life / A. C. Scott. – Springer, 2007. – 271 p.
2. Кузнецов, С. П. Динамический хаос (курс лекций) / С. П. Кузнецов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 295 с.
3. Лоскутов, А. Ю. Основы теории сложных систем / А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов. – М. – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2007. – 620 с.
4. Гончаренко, С. В. О трех типах динамики и понятии аттрактора / С. В. Гончаренко, Д. В. Тураев // Труды МИАН. – 2017. – Т. 297. – С. 133–157.
5. Красносельский, М. А. Системы с гистерезисом / М. А. Красносельский, А. В. Покровский. – Москва : Наука, 1983. – 272 с.
6. Mayergoyz, I. D. Mathematical Models of Hysteresis / I. D. Mayergoyz. – Springer, 1991. – 207 p.
7. Preisach, F. Uber die magnetische Nachwirkung / F. Preisach, Z. Physik. – 1935. – 94. – P. 277–302.
8. Weiss, P. de Etude de l'aimantation initiale en fonction de la temperature / P. Weiss, J. Freundreich // Arch. Sci. Phys. Nat. (Geneve). – 1916. – Vol. 42. – P. 449.
9. Lacarbonara, W. Nonclassical Responses of Oscillators with Hysteresis / W. Lacarbonara, F. Vestroni // Nonlinear Dynamics. – 2003. – 32. – P. 235–258.
10. Charalampakis, A. E. The response and dissipated energy of Bouc – Wen hysteretic model revisited / A. E. Charalampakis // Archve of Applied Mechanics. – 2015. – V. 85. – P. 1209–1223.
11. Ikhoulane, F. On the Hysteretic Bouc – Wen Model. Part I: Forced Limit Cycle Characterization / F. Ikhoulane, J. Rodellar // Nonlinear Dynamics. – 2005. – Vol. 42. – P. 63–78.
12. Iwan, W. D. A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response / W. D. Iwan // Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME. – 1966. – 33(4). – P. 893–900.
13. Lin, C.-J. Tracking control of a biaxial piezo-actuated positioning stage using generalized Duhem model / C.-J. Lin, P.-T. Lin // Computers and Mathematics with Applications 64 (2012). – P. 766–787.
14. Semenov, M. E. Coupled inverted pendulums: stabilization problem / M. E. Semenov, A. M. Solovyov, M. A. Popov, P. A. Meleshenko // Archive of Applied Mechanics. – 2018. – V. 88. – P. 517–524.
15. Semenov, M. E. Oscillations Under Hysteretic Conditions: From Simple Oscillator to Discrete Sine-Gordon Model // M. E. Semenov, O. O. Reshetova, A. M. Solovyov, A. V. Tolkachev, P. A. Meleshenko Springer Proceedings in Physics. 4th. Ser. «Topics in Nonlinear Mechanics and Physics .– Selected Papers from CSNDD 2018». – 2019. – P. 229–253.
16. Tolkachev, A. V. Sine – Gordon system with hysteretic links / A. V. Tolkachev, M. E. Semenov, P. A. Meleshenko, O. O. Reshetova, A. F. Klinskikh, E. A. Karpov // Journal of Physics: Conf. Series – 2018 – Vol. 1096.
17. Semenov, M. E. Nonlinear Damping: From Viscous to Hysteretic Dampers / M. E. Semenov, A. M. Solovyov, P. A. Meleshenko // Springer Proceedings in Physics. 4th. Ser. «Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics, Selected Papers from CSNDD 2016». – 2017. – P. 259–275.
18. Semenov, M. E. Efficiency of hysteretic damper in oscillating systems / M. E. Semenov, A. M. Solovyov P. A. Meleshenko, O. O. Reshetova // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. – 2020. – Vol. 15. – P. 43.
19. Семенов, М. Е. Автоколебания в системе с гистерезисом: метод малого параметра / М. Е. Семенов, О. О. Решетова, С. В. Борзунов, П. А. Мелешенко, О. И. Канищева // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии – 2021. – № 4. – С. 37–53.
20. Медведский, А. Л. Динамика гистерезисно-связанных осцилляторов Ван-Дер-Поля: метод малого параметра / А. Л. Медведский, П. А. Мелешенко, В. А. Нестеров, О. О. Решетова, М. Е. Семенов // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2021. – Т. 4, № 4. – С. 7–26.
21. Medvedsky, A. L. Dynamics of Hysteretic-Related Van-Der-Pol Oscillators: the Small

Parameter Method / A. L. Medvedsky, P. A. Meleshchenko, V. A. Nesterov, O. O. Reshetova, M. E. Semenov // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. – 2020. – V. 59. – P. 533–556.

22. *Henon, M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor / M. Henon // *Communications in Mathematical Physics*. 1976. – 50. – P. 69–77.

23. *Rosenstein, M. T.* A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets / M. T. Rosenstein, J. J. Collins, C. J. De Luca // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 1993. – Vol. 65, No 1. – P. 117–134.

24. *Gottwald G. A.* The 0-1 Test for Chaos: A review / G. A. Gottwald, I. Melbourne. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2016. – P. 221–247.

Мелешенко Петр Александрович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета.

E-mail: melechp@yandex.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3619-7258>

Толкачев Аким Владимирович — аспирант по направлению «Информатика и вычислительная техника», ассистент кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета и кафедры информатики и вычислительной техники Воронежского государственного лесотехнического университета им. Г.Ф. Морозова.

E-mail: tolkachev.akim@mail.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-4968-5253>

Канищева Олеся Ивановна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета и кафедры математики Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина».

E-mail: oleka_olesya@mail.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1830-4091>

DOI: <https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2022/3/22-32>

ISSN 1995-5499

Received 09.07.2022

Accepted 30.09.2022

HENON MAP WITH HYSTERESIS: CHAOS CONTROL

© 2022 P. A. Meleshchenko¹, A. V. Tolkachev^{1,2}, O. I. Kanishcheva^{1,3}✉

¹*Voronezh State University*

1, Universitetskaya Square, 394018 Voronezh, Russian Federation

²*Voronezh State University of Forestry and Technologies Named After G. F. Morozov*

8, Timiryazeva Street, 394613 Voronezh, Russian Federation

³*Air Force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin*

54a, Starykh Bol'shevikov Street, 394064 Voronezh, Russian Federation

Annotation. The article investigates the dynamics of the system, given by the Henon map with hysteresis term. The hysteresis element is formalized based on design approach. The paper investigates a problem of the dynamic control of such system. In particular, possible modifications of the limit set (attractor) of the modified Henon map are studied. Dynamics of the system analyzed through the numerical simulations carried out

✉ Kanishcheva Olesya I.
e-mail: oleka_olesya@mail.ru

for various values of the parameters, which are characterized by chaotic dynamics. The comparative analysis between classical Henon map and modified ones are given based on obtained data. To detect various dynamic regims, bifurcation diagrams were plotted, the high Lyapunov exponent was calculated based on the Rosenstein algorithm and the 0-1 test was produced depending on the system parameters, and the hysteresis nonlinearity parameter. Established, that hysteresis term regularize dynamics of the system compared to the classical map and changed in the position of bifurcation points in the space of system parameters.

Keywords: nonlinear dynamics, chaos, Henon map, hysteresis, Preisach model.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

REFERENCES

1. Scott A. C. (2007) *A The Nonlinear Universe: Chaos; Emergence; Life*. Springer. 271p.
2. Kuznetsov S. P. (2001) *Dynamic chaos (course of lectures)*. Moscow : FIZMATLIT. 295 p.
3. Loskutov A. Yu. and Mikhailov A. S. (2007) *Fundamentals of the theory of complex systems*. Moscow – Izhevsk : *Institute of Computer Research*. 620 p.
4. Goncharenko S. V. and Turaev D. V. (2017) On three types of dynamics and the concept of an attractor. *Proceedings of MIAN*. V. 297. P. 133–157.
5. Krasnoselsky M. A. and Pokrovsky A. V. (1983) *Systems with hysteresis*. Moscow : Nauka. 272 p.
6. Mayergoyz I. D. (1991) *Mathematical Models of Hysteresis*. Springer. 207 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3028-1>
7. Preisach F. and Physik Z. (1935) *Über die magnetische Nachwirkung*. 93. P. 277–302.
8. Weiss P. and Freundereich J. (1916) *de Etude de l'aimantation initiale en fonction de la temperature*. *Arch. Sci. Phys. Nat. (Geneve)*. Vol. 42. P. 449.
9. Lacarbonara W. and Vestroni F. (2003) Nonclassical Responses of Oscillators with Hysteresis. *Nonlinear Dynamics*. 32. P. 235–258.
10. Charalampakis A. E. (2015) The response and dissipated energy of Bouc – Wen hysteretic model revisited. *Archve of Applied Mechanics*. V. 85. P. 1209–1223.
11. Ikhouane F. and Rodellar J. (2005) On the Hysteretic Bouc – Wen Model. Part I: Forced Limit Cycle Characterization. *Nonlinear Dynamics*. Vol. 42. P. 63–78.
12. Iwan W. D. (1966) A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. 33(4). P. 893–900.
13. Lin C.-J. and Lin P.-T. (2012) Tracking control of a biaxial piezo-actuated positioning stage using generalized Duhem model. *Computers and Mathematics with Applications*. 64. P. 766–787.
14. Semenov M. E., Solovyov A. M., Popov M. A. and Meleshenko P. A. (2018) Coupled inverted pendulums: stabilization problem. *Archive of Applied Mechanics*. V. 88. P. 517–524.
15. Semenov M. E., Reshetova O. O., Solovyov A. M., Tolkachev A. V. and Meleshenko P. A. (2019) Oscillations Under Hysteretic Conditions: From Simple Oscillator to Discrete Sine-Gordon Model. *Springer Proceedings in Physics. 4th. Ser. "Topics in Nonlinear Mechanics and Physics. Selected Papers from CSNDD 2018"*. P. 229.–253.
16. Tolkachev A. V., Semenov M. E., Meleshenko P. A., Reshetova O. O., Klinskikh A. F. and Karpov E. A. (2018) Sine – Gordon system with hysteretic links. *Journal of Physics: Conf. Series*. Vol. 1096.
17. Semenov M. E., Solovyov A. M. and Meleshenko P. A. (2017) Nonlinear Damping: From Viscous to Hysteretic Dampers. *Springer Proceedings in Physics. 4th. Ser. "Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics, Selected Papers from CSNDD 2016"*. P. 259–275.
18. Semenov M. E., Solovyov A. M., Meleshenko P. A. and Reshetova O. O. (2020) Efficiency of hysteretic damper in oscillating systems. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. Vol. 15. P. 43.
19. Semenov M. E., Reshetova O. O., Borzunov S. V., Meleshenko P. A. and Kanishcheva O. I. (2021) Self-oscillations in a system with hysteresis: the small parameter approach. *Proceedings of*

Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies. No 4. P. 37–53.

20. Medvedsky A. L., Meleshenko P. A., Nest-erov V. A., Reshetova O. O. and Semenov M. E. (2021) Dynamics of Hysteretic-Related Van-Der-Pol Oscillators: the Small Parameter Method. *Izvestiya RAN. Theory and control systems.* V. 4, No 4. P. 7–26.

21. Medvedsky A. L., Meleshenko P. A., Nest-erov V. A., Reshetova O. O. and Semenov M. E. (2020) Dynamics of Hysteretic-Related Van-Der-Pol Oscillators: the Small Parameter Method. *Journal of Computer and Systems Sciences Interna-tional.* V. 59. P. 533–556.

22. Henon M. (1976) A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communica-tions in Mathematical Physics.* 50. P. 69–77.

23. Rosenstein M. T., Collins J. J. and De Lu-ca C. J. (1993) A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena.* Vol. 65, No 1. P. 117–134.

24. Gottwald G. A. and Melbourne I. (2016) The 0-1 Test for Chaos: A review. *Springer, Berlin, Heidelberg.* P. 221–247.

Meleshenko Petr A. — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Digital Technologies, Voronezh State University.

E-mail: melechp@yandex.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3619-7258>

Tolkachev Akim V. — Postgraduate Student, Faculty of Computer Science, Assistant of the Depart-ment of Digital Technologies, Voronezh State Universit and Department of Computer Science and Information Systems, Voronezh State Forestry University Named After G. F. Morozov.

E-mail: tolkachev.akim@mail.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-4968-5253>

Kanishcheva Olesya I. — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Dig-ital Technologies, Voronezh State Universit and Department of Mathematics, Air Force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin.

E-mail: oleka_olesya@mail.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1830-4091>