УДК 517.97 : 532.526 ISSN 1995-5499
DOI: https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2022/3/45-54
Поступила в редакцию 19.08.2022
Подписана в печать 30.09.2022

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ АТМОСФЕРЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАСШИРЕННОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА

© 2022 Е. А. Копытина✉, А. В. Копытин, М. Г. Матвеев

Воронежский государственный университет
Университетская пл., 1, 394018 Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. Предложен комбинированный метод для прогнозирования температурных полей атмосферы, на основе статистических данных реанализа параметров атмосферы. Первой составляющей метода является получение МНК-оценок параметров конечно-разностной схемы Кранка — Николсон. Однако, эти оценки оказываются смещенными в силу наличия ошибок в регрессорах. С целью уменьшения указанного смещения в качестве второй составляющей метода применяется расширенный фильтр Калмана. С помощью найденных оценок параметров, подставленных в конечно-разностную схему Кранка — Николсон, прогнозировались значения температуры во внутренних узлах по тестовой части выборки. Приводится натурный вычислительный эксперимент, подтверждающий эффективность предложенной методики, на основе данных временных рядов температур атмосферы, полученных из системы NCEP/DOE AMIP II Reanalysis. Проведенные исследования показали, что на качество оценок параметров моделей в форме дифференциальных уравнений параболического типа существенное влияние оказывает выбор типа разностной аппроксимации; качество оценок повышается при использовании устойчивых конечно-разностных схем и повышении их порядка. Разработанная в результате исследований комбинация МНК и расширенного фильтра Калмана с моделью эволюции на основе конечно-разностной схемы Кранка — Николсон, обеспечивает повышение точности прогноза изменения температурных полей атмосферы в среднем на 38 %. Полученные математические модели температурных полей атмосферы могут быть использованы при исследовании метеорологической обстановки, определяющей безопасность полетов авиации.
Ключевые слова: оценка параметров, МНК, конечно-разностная схема Кранка — Николсон, расширенный фильтр Калмана.

ВВЕДЕНИЕ

Модельные исследования метеорологических процессов необходимая компонента в системах прогнозирования и учета погодных явлений в различных практических областях: авиации, сельскохозяйственном производстве и др. Моделирование поведения температурных полей в атмосфере — важная составляющая этих исследований. При этом широко используются модели, представленные дифференциальными уравнениями параболического типа, например, модели конвективной диффузии. Диффузия и адвекция — основные факторы, определяющие динамику температурных полей в атмосфере на заданных изобарических поверхностях. При заданной структуре модели возникает необходимость в оценке ее параметров, т. е. возникает задача параметрической идентификации. Несмотря на значительное количество исследований, проведённых в области параметрической идентификации моделей температурных полей атмосферы [1–5], исследования в этой области являются актуальными и по сей день. При этом практически все известные работы основаны на статистических методах исследований [6–10], позволяющих получать стати-

✉ Копытина Екатерина Александровна
e-mail: zhemkaterina@yandex.ru

стические оценки истинных значений параметров моделей реальных динамических объектов или явлений. Однако, не всегда качество полученных оценок удовлетворяет требованиям приложений, в частности, в метеорологических задачах, работающих с той или иной математической моделью, особенно в условиях сильной зашумленности наблюдаемых переменных. В этой связи актуальной остается задача повышения качества оценок параметров модели при ее заданной структуре.

В настоящем исследовании для прогнозирования температурных полей атмосферы предлагается комбинация расширенного фильтра Калмана и МНК, служащего для оценки начальной точки рекурсивных вычислений. При этом предполагается, что качество оценивания параметров расширенным фильтром Калмана будет зависеть от выбора его важнейших компонент: типа конечно-разностной схемы аппроксимации исходного дифференциального уравнения и начального приближения оценки параметров.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Продолжая исследования, начатые в [11–14], рассмотрим простейшую модель, описывающую поведение поля температур на заданной изобарической поверхности, ей является двумерное уравнение диффузии-адвекции:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 x}{\partial l_1^2} + D_2 \frac{\partial^2 x}{\partial l_2^2} - v_1 \frac{\partial x}{\partial l_1} - v_2 \frac{\partial x}{\partial l_2}, \quad (1)$$

где D_1, D_2 — коэффициенты диффузии, v_1, v_2 — компоненты вектора скорости адвекции, l_1 — широта, l_2 — долгота.

Задача заключается в идентификации неизвестных параметров D_1, D_2, v_1, v_2 уравнения (1) по наблюдаемым данным с целью дальнейшего прогноза значений температуры при имеющихся начальном и краевых условиях.

2. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для решения задачи идентификации можно использовать комбинацию МНК-оценок и расширенного фильтра Калмана. МНК-оценки дают начальную точку в пространстве поиска для реализации рекурсивного алгоритма Калмана.

2.1. Метод наименьших квадратов

Для решения поставленной задачи составим явную разностную схему для уравнения (1):

$$\begin{gathered}\frac{x_{i,j}^{k+1} - x_{i,j}^{k}}{\Delta t} = D_1 \frac{x_{i+1,j}^{k} - 2x_{i,j}^{k} + x_{i-1,j}^{k}}{(\Delta l_1)^2} + \\ + D_2 \frac{x_{i,j+1}^{k} - 2x_{i,j}^{k} + x_{i,j-1}^{k}}{(\Delta l_2)^2} - \\ - v_1 \frac{x_{i+1,j}^{k} - x_{i-1,j}^{k}}{2\Delta l_1} - v_2 \frac{x_{i,j+1}^{k} - x_{i,j-1}^{k}}{2\Delta l_2}, \\ k = 0, \ldots, n-1, \end{gathered} \quad (2)$$

где Δt — шаг по времени, Δl_1 — шаг по широте, Δl_2 — шаг по долготе. Обозначим $\theta_1 = \frac{D_1 \Delta t}{(\Delta l_1)^2}$, $\theta_2 = \frac{D_2 \Delta t}{(\Delta l_2)^2}$, $\theta_3 = \frac{v_1 \Delta t}{2\Delta l_1}$, $\theta_4 = \frac{v_2 \Delta t}{2\Delta l_2}$.

Приводя подобные, уравнения (2) можно переписать в виде:

$$\begin{gathered} x_{i,j}^{k+1} = (\theta_1 + \theta_3) x_{i-1,j}^{k} + \\ + (1 - 2\theta_1 - 2\theta_2) x_{i,j}^{k} + (\theta_1 - \theta_3) x_{i+1,j}^{k} + \\ + (\theta_2 + \theta_4) x_{i,j-1}^{k} + (\theta_2 - \theta_4) x_{i,j+1}^{k}. \end{gathered} \quad (3)$$

Обозначим $a_1 = \theta_1 + \theta_3$, $a_2 = 1 - 2\theta_1 - 2\theta_2$, $a_3 = \theta_1 - \theta_3$, $a_4 = \theta_2 + \theta_4$, $a_5 = \theta_2 - \theta_4$. Получим систему уравнений

$$\begin{gathered} x_{i,j}^{k+1} = a_1 x_{i-1,j}^{k} + a_2 x_{i,j}^{k} + \\ + a_3 x_{i+1,j}^{k} + a_4 x_{i,j-1}^{k} + a_5 x_{i,j+1}^{k} \end{gathered} \quad (4)$$

относительно неизвестных a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

Переходя к наблюдаемым значениям $y_{i,j}^{k}$, получим МНК-оценки $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$, $\hat{a}_4$, $\hat{a}_5$ параметров a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, минимизируя

$$\sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} y_{i,j}^{k+1} - \hat{a}_1 y_{i-1,j}^{k} - \hat{a}_2 y_{i,j}^{k} - \hat{a}_3 y_{i+1,j}^{k} - \\ - \hat{a}_4 y_{i,j-1}^{k} - \hat{a}_5 y_{i,j+1}^{k} \end{pmatrix}^2.$$

Далее, решая систему уравнений

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_3 = \hat{a}_1, \\ 1 - 2\hat{\theta}_1 - 2\hat{\theta}_2 = \hat{a}_2, \\ \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_3 = \hat{a}_3, \\ \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_4 = \hat{a}_4, \\ \hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_4 = \hat{a}_5 \end{cases}$$

относительно неизвестных $\hat{\theta}_1,\ \hat{\theta}_2,\ \hat{\theta}_3,\ \hat{\theta}_4$, находим:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_3}{2},\ \ \hat{\theta}_2 = \frac{\hat{a}_4 + \hat{a}_5}{2},$$

$$\hat{\theta}_3 = \frac{\hat{a}_1 - \hat{a}_3}{2},\ \ \hat{\theta}_4 = \frac{\hat{a}_4 - \hat{a}_5}{2}$$

и затем оценки исходных параметров $D_1,\ D_2,\ v_1,\ v_2$:

$$\hat{D}_1 = \frac{\hat{\theta}_1(\Delta l_1)^2}{\Delta t},\ \ \hat{D}_2 = \frac{\hat{\theta}_2(\Delta l_2)^2}{\Delta t},$$

$$\hat{v}_1 = \frac{2\hat{\theta}_3 \Delta l_1}{\Delta t},\ \ \hat{v}_2 = \frac{2\hat{\theta}_4 \Delta l_2}{\Delta t}.$$

Оценки $\hat{a}_1,\ \hat{a}_2,\ \hat{a}_3,\ \hat{a}_4,\ \hat{a}_5$ будут смещенными, как показано в главе 1, из-за наличия ошибок в регрессорах и, как следствие, будут смещенными оценки $\hat{D}_1,\ \hat{D}_2,\ \hat{v}_1,\ \hat{v}_2$.

2.2. По явной разностной схеме

Уравнение (3) можно переписать в виде:

$$x_{i,j}^{k+1} = (1 - 2\theta_1 - 2\theta_2)x_{i,j}^k + $$
$$+\mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})(x_{i-1,j}^k, x_{i+1,j}^k, x_{i,j-1}^k, x_{i,j+1}^k)^T, k = 0,\ldots,n-1,$$

где $\mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}) = (\theta_1 + \theta_3, \theta_1 - \theta_3, \theta_2 + \theta_4, \theta_2 - \theta_4)$. Тогда рассматриваемая линейная динамическая модель может быть записана в пространстве состояний следующим образом:

$$\begin{cases} x_{i,j}^{k+1} = (1 - 2\theta_1 - 2\theta_2)x_{i,j}^k + \mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{u}^k + \boldsymbol{\varepsilon}^k), \\ y_{i,j}^k = x_{i,j}^k + \varepsilon_{i,j}^k, \end{cases} \qquad (5)$$

где $\mathbf{u}^k = (y_{i-1,j}^k, y_{i+1,j}^k, y_{i,j-1}^k, y_{i,j+1}^k)^T$ — вектор управляющих воздействий и $\boldsymbol{\varepsilon}^k = -(\varepsilon_{i-1,j}^k, \varepsilon_{i+1,j}^k, \varepsilon_{i,j-1}^k, \varepsilon_{i,j+1}^k)^T$ — шум процесса.

Поскольку $\boldsymbol{\theta}$ — постоянный вектор, вполне естественно положить

$$\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \boldsymbol{\theta}^k,\ \ k = 0,\ldots,n-1. \qquad (6)$$

Тогда система (5) вместе с предположением (6) может быть переформулирована как нелинейная модель:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_{i,j}^{k+1} \\ \boldsymbol{\theta}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - 2\theta_1^k - 2\theta_2^k)x_{i,j}^k \\ \boldsymbol{\theta}^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}^k)(\mathbf{u}^k + \boldsymbol{\varepsilon}^k) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ y_{i,j}^k = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i,j}^k \\ \boldsymbol{\theta}^k \end{pmatrix} + \varepsilon_{i,j}^k. \end{cases}$$

Теперь расширенный фильтр Калмана может быть применен для оценки вектора состояния, содержащего $\boldsymbol{\theta}^k$ в качестве своих компонент. Алгоритм расширенного фильтра Калмана в этом случае выглядит следующим образом [15]:

$$\begin{cases}
\begin{pmatrix} \hat{x}_{i,j}^{0|0} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}^{0|0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{i,j}^0 \\ (\hat{a}_1 + \hat{a}_3)/2 \\ (\hat{a}_4 + \hat{a}_5)/2 \\ (\hat{a}_1 - \hat{a}_3)/2 \\ (\hat{a}_4 - \hat{a}_5)/2 \end{pmatrix},\ \ \hat{\mathbf{P}}_{0|0} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_4 \end{pmatrix}. \\
\text{Для } k = 1,2,\ldots,n, \\
\begin{pmatrix} \hat{x}_{i,j}^{k|k-1} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}^{k|k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - 2\hat{\theta}_1^{k-1|k-1} - 2\hat{\theta}_2^{k-1|k-1})\hat{x}_{i,j}^{k-1|k-1} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}^{k-1|k-1} \end{pmatrix} + \\
+ \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{k-1|k-1})\mathbf{u}^k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\
\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} = \begin{pmatrix} 1 - 2\hat{\theta}_1^{k-1|k-1} - 2\hat{\theta}_2^{k-1|k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{i-1,j}^k - 2x_{i,j}^{k-1|k-1} + y_{i+1,j}^k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_{i,j-1}^k - 2x_{i,j}^{k-1|k-1} + y_{i,j+1}^k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ y_{i-1,j}^k - y_{i+1,j}^k & 0 & 0 & 1 & 0 \\ y_{i,j-1}^k - y_{i,j+1}^k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \times \\
\times \hat{\mathbf{P}}_{k-1|k-1} \begin{pmatrix} 1 - 2\hat{\theta}_1^{k-1|k-1} - 2\hat{\theta}_2^{k-1|k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{i-1,j}^k - 2x_{i,j}^{k-1|k-1} + y_{i+1,j}^k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_{i,j-1}^k - 2x_{i,j}^{k-1|k-1} + y_{i,j+1}^k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ y_{i-1,j}^k - y_{i+1,j}^k & 0 & 0 & 1 & 0 \\ y_{i,j-1}^k - y_{i,j+1}^k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \\
+ \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{k-1|k-1})\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{k-1|k-1})^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{K}_k = \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T + \hat{\sigma}^2 \right)^{-1}, \\
\hat{\mathbf{P}}_{k|k} = \left(\mathbf{I}_5 - \mathbf{K}_k \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}, \\
\begin{pmatrix} \hat{x}_{i,j}^{k|k} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}^{k|k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{i,j}^{k|k-1} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}^{k|k-1} \end{pmatrix} + \mathbf{K}_k \left(y_{i,j}^k - x_{i,j}^{k|k-1} \right).
\end{cases}$$

Здесь $\hat{\sigma}$ — оценка стандартного отклонения σ погрешностей наблюдений $\varepsilon_{i,j}^k$, $\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}_4$ — оценка ковариационной матрицы шума процесса, $\mathbf{I}_4$ — единичная матрица размера 4×4.

В качестве итоговой оценки вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ можно использовать последнее значение оценки $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{n|n}$, полученное при $k = n$. Тогда вектор оценок исходных параметров D_1, D_2, v_1, v_2 имеет вид

$$\left(\frac{\hat{\theta}_1(\Delta l_1)^2}{\Delta t}, \frac{\hat{\theta}_2(\Delta l_2)^2}{\Delta t}, \frac{2\hat{\theta}_3\Delta l_1}{\Delta t}, \frac{2\hat{\theta}_4\Delta l_2}{\Delta t}\right)^T.$$

2.3. По неявной разностной схеме

Составим неявную разностную схему для уравнения (1):

$$\frac{x_{i,j}^{k+1} - x_{i,j}^k}{\Delta t} = D_1 \frac{x_{i+1,j}^{k+1} - 2x_{i,j}^{k+1} + x_{i-1,j}^{k+1}}{(\Delta l_1)^2} +$$
$$+D_2 \frac{x_{i,j+1}^{k+1} - 2x_{i,j}^{k+1} + x_{i,j-1}^{k+1}}{(\Delta l_2)^2} - v_1 \frac{x_{i+1,j}^{k+1} - x_{i-1,j}^{k+1}}{2\Delta l_1} - \quad (7)$$
$$-v_2 \frac{x_{i,j+1}^{k+1} - x_{i,j-1}^{k+1}}{2\Delta l_2}, \quad k = 0,\dots,n-1.$$

Обозначим $\theta_1 = \dfrac{D_1\Delta t}{(\Delta l_1)^2}$, $\theta_2 = \dfrac{D_2\Delta t}{(\Delta l_2)^2}$, $\theta_3 = \dfrac{v_1\Delta t}{2\Delta l_1}$, $\theta_4 = \dfrac{v_2\Delta t}{2\Delta l_2}$. Приводя подобные, уравнения (7) можно переписать в виде:

$$-(\theta_1 + \theta_3)x_{i-1,j}^{k+1} + (1 + 2\theta_1 + 2\theta_2)x_{i,j}^{k+1} +$$
$$+(\theta_3 - \theta_1)x_{i+1,j}^{k+1} - (\theta_2 + \theta_4)x_{i,j-1}^{k+1} +$$
$$+(\theta_4 - \theta_2)x_{i,j+1}^{k+1} = x_{i,j}^k.$$

Или в виде:

$$(1 + 2\theta_1 + 2\theta_2)x_{i,j}^{k+1} = x_{i,j}^k +$$
$$+\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})(x_{i-1,j}^{k+1}, x_{i+1,j}^{k+1}, x_{i,j-1}^{k+1}, x_{i,j+1}^{k+1})^T, k = 0,\dots,n-1, \quad (8)$$

где $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}) = (\theta_1 + \theta_3, \theta_1 - \theta_3, \theta_2 + \theta_4, \theta_2 - \theta_4)$.

Разделим левую и правую части уравнений (8) на $1 + 2\theta_1 + 2\theta_2$. Тогда рассматриваемая нами линейная динамическая модель может быть записана в пространстве состояний следующим образом:

$$\begin{cases} x_{i,j}^{k+1} = \dfrac{x_{i,j}^k}{1 + 2\theta_1 + 2\theta_2} + \dfrac{\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})}{1 + 2\theta_1 + 2\theta_2}(\mathbf{u}^k + \boldsymbol{\varepsilon}^k), \\ y_{i,j}^k = x_{i,j}^k + \varepsilon_{i,j}^k, \end{cases} \quad (9)$$

где $\mathbf{u}^k = (y_{i-1,j}^{k+1}, y_{i+1,j}^{k+1}, y_{i,j-1}^{k+1}, y_{i,j+1}^{k+1})^T$ — вектор управляющих воздействий и $\boldsymbol{\varepsilon}^k = -(\varepsilon_{i-1,j}^{k+1}, \varepsilon_{i+1,j}^{k+1}, \varepsilon_{i,j-1}^{k+1}, \varepsilon_{i,j+1}^{k+1})^T$ — шум процесса.

Поскольку $\boldsymbol{\theta}$ — постоянный вектор, вполне естественно положить

$$\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \boldsymbol{\theta}^k, \quad k = 0,\dots,n-1. \quad (10)$$

Тогда система (9) вместе с предположением (10) может быть переформулирована как нелинейная модель:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_{i,j}^{k+1} \\ \boldsymbol{\theta}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_{i,j}^k}{1 + 2\theta_1^k + 2\theta_2^k} \\ \boldsymbol{\theta}^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}^k)(\mathbf{u}^k + \boldsymbol{\varepsilon}^k)}{1 + 2\theta_1^k + 2\theta_2^k} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ y_{i,j}^k = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i,j}^k \\ \boldsymbol{\theta}^k \end{pmatrix} + \varepsilon_{i,j}^k. \end{cases}$$

Теперь расширенный фильтр Калмана может быть применен для оценки вектора состояния, содержащего $\boldsymbol{\theta}^k$ в качестве своих компонент. Алгоритм расширенного фильтра Калмана в этом случае выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \hat{x}_{i,j}^{0|0} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}^{0|0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{i,j}^0 \\ (\hat{a}_1 + \hat{a}_3)/2 \\ (\hat{a}_4 + \hat{a}_5)/2 \\ (\hat{a}_1 - \hat{a}_3)/2 \\ (\hat{a}_4 - \hat{a}_5)/2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{P}}_{0|0} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_4 \end{pmatrix}. \\ \text{Для } k = 1,2,\dots,n, \\ \begin{pmatrix} \hat{x}_{i,j}^{k|k-1} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}^{k|k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\hat{x}_{i,j}^{k-1|k-1} + \boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{k-1|k-1})\mathbf{u}^k}{1 + 2\hat{\theta}_1^{k-1|k-1} + 2\hat{\theta}_2^{k-1|k-1}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}^{k-1|k-1} \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1 + 2\hat{\theta}_1^{k-1|k-1} + 2\hat{\theta}_2^{k-1|k-1}} & \mathbf{0} \\ \dfrac{\partial}{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}^{k-1|k-1}} \left(\dfrac{\hat{x}_{i,j}^{k-1|k-1} + \boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{k-1|k-1})\mathbf{u}^k}{1 + 2\hat{\theta}_1^{k-1|k-1} + 2\hat{\theta}_2^{k-1|k-1}} \right) & \mathbf{I}_4 \end{pmatrix}^T \times \\ \times \hat{\mathbf{P}}_{k-1|k-1} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1 + 2\hat{\theta}_1^{k-1|k-1} + 2\hat{\theta}_2^{k-1|k-1}} & \mathbf{0} \\ \dfrac{\partial}{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}^{k-1|k-1}} \left(\dfrac{\hat{x}_{i,j}^{k-1|k-1} + \boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{k-1|k-1})\mathbf{u}^k}{1 + 2\hat{\theta}_1^{k-1|k-1} + 2\hat{\theta}_2^{k-1|k-1}} \right) & \mathbf{I}_4 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{k-1|k-1})}{1 + 2\hat{\theta}_1^{k-1|k-1} + 2\hat{\theta}_2^{k-1|k-1}} \hat{\mathbf{Q}} \dfrac{\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{k-1|k-1})^T}{1 + 2\hat{\theta}_1^{k-1|k-1} + 2\hat{\theta}_2^{k-1|k-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_k = \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T + \hat{\sigma}^2 \right)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{P}}_{k|k} = \left(\mathbf{I}_5 - \mathbf{K}_k \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}, \\ \begin{pmatrix} \hat{x}_{i,j}^{k|k} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}^{k|k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{i,j}^{k|k-1} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}^{k|k-1} \end{pmatrix} + \mathbf{K}_k \left(y_{i,j}^k - x_{i,j}^{k|k-1} \right). \end{cases}$$

Здесь $\hat{\sigma}$ — оценка стандартного отклонения σ погрешностей наблюдений $\varepsilon_{i,j}^k$, $\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}_4$ — оценка ковариационной матрицы шума процесса, $\mathbf{I}_4$ — единичная матрица размера 4×4.

В качестве итоговой оценки вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ можно использовать последнее значение оценки $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{n|n}$, полученное при $k = n$. Тогда вектор оценок исходных параметров D_1, D_2, v_1, v_2 имеет вид

$$\left(\frac{\hat{\theta}_1(\Delta l_1)^2}{\Delta t}, \frac{\hat{\theta}_2(\Delta l_2)^2}{\Delta t}, \frac{2\hat{\theta}_3\Delta l_1}{\Delta t}, \frac{2\hat{\theta}_4\Delta l_2}{\Delta t}\right)^T.$$

2.4. По схеме Кранка — Николсон

Составим разностную схему Кранка — Николсон для уравнения (1):

$$\begin{gathered}\frac{x_{i,j}^{k+1} - x_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{D_1}{2(\Delta l_1)^2}((x_{i+1,j}^{k+1} - 2x_{i,j}^{k+1} + x_{i-1,j}^{k+1}) + \\ +(x_{i+1,j}^k - 2x_{i,j}^k + x_{i-1,j}^k)) + \\ +\frac{D_2}{2(\Delta l_2)^2}((x_{i,j+1}^{k+1} - 2x_{i,j}^{k+1} + x_{i,j-1}^{k+1}) + \\ +(x_{i,j+1}^k - 2x_{i,j}^k + x_{i,j-1}^k)) - \frac{v_1}{4\Delta l_1}((x_{i+1,j}^{k+1} - x_{i-1,j}^{k+1}) + \\ +(x_{i+1,j}^k - x_{i-1,j}^k)) - \frac{v_2}{4\Delta l_2}((x_{i,j+1}^{k+1} - x_{i,j-1}^{k+1}) + \\ +(x_{i,j+1}^k - x_{i,j-1}^k)), \quad k = 0,\ldots,n-1.\end{gathered} \tag{11}$$

Обозначим $\theta_1 = \dfrac{D_1\Delta t}{2(\Delta l_1)^2}$, $\theta_2 = \dfrac{D_2\Delta t}{2(\Delta l_2)^2}$, $\theta_3 = \dfrac{v_1\Delta t}{4\Delta l_1}$, $\theta_4 = \dfrac{v_2\Delta t}{4\Delta l_2}$. Приводя подобные, уравнения (11) можно переписать в виде:

$$\begin{gathered}-(\theta_1+\theta_3)x_{i-1,j}^{k+1} + (1+2\theta_1+2\theta_2)x_{i,j}^{k+1} + \\ +(\theta_3-\theta_1)x_{i+1,j}^{k+1} - \\ -(\theta_2+\theta_4)x_{i,j-1}^{k+1} + (\theta_4-\theta_2)x_{i,j+1}^{k+1} = \\ = (\theta_1+\theta_3)x_{i-1,j}^k + (1-2\theta_1-2\theta_2)x_{i,j}^k + \\ +(\theta_1-\theta_3)x_{i+1,j}^k + (\theta_2+\theta_4)x_{i,j-1}^k + (\theta_2-\theta_4)x_{i,j+1}^k.\end{gathered}$$

Или в виде:

$$(1+2\theta_1+2\theta_2)x_{i,j}^{k+1} = (1-2\theta_1-2\theta_2)x_{i,j}^k + \\ +\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})\begin{pmatrix} x_{i-1,j}^k \\ x_{i+1,j}^k \\ x_{i,j-1}^k \\ x_{i,j+1}^k \\ x_{i-1,j}^{k+1} \\ x_{i+1,j}^{k+1} \\ x_{i,j-1}^{k+1} \\ x_{i,j+1}^{k+1} \end{pmatrix}, \quad k = 0,\ldots,n-1, \tag{12}$$

где

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \theta_1+\theta_3 \\ \theta_1-\theta_3 \\ \theta_2+\theta_4 \\ \theta_2-\theta_4 \\ \theta_1+\theta_3 \\ \theta_1-\theta_3 \\ \theta_2+\theta_4 \\ \theta_2-\theta_4 \end{pmatrix}^T.$$

Разделим левую и правую части уравнений (12) на $1+2\theta_1+2\theta_2$. Тогда рассматриваемая нами линейная динамическая модель может быть записана в пространстве состояний следующим образом:

$$\begin{cases} x_{i,j}^{k+1} = \dfrac{1-2\theta_1-2\theta_2}{1+2\theta_1+2\theta_2}x_{i,j}^k + \dfrac{\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{u}^k+\boldsymbol{\varepsilon}^k)}{1+2\theta_1+2\theta_2}, \\ y_{i,j}^k = x_{i,j}^k + \varepsilon_{i,j}^k, \end{cases} \tag{13}$$

где вектор управляющих воздействий имеет вид

$$\mathbf{u}^k = \begin{pmatrix} y_{i-1,j}^k \\ y_{i+1,j}^k \\ y_{i,j-1}^k \\ y_{i,j+1}^k \\ y_{i-1,j}^{k+1} \\ y_{i+1,j}^{k+1} \\ y_{i,j-1}^{k+1} \\ y_{i,j+1}^{k+1} \end{pmatrix},$$

и шум процесса имеет вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}^k = -\begin{pmatrix} \varepsilon_{i-1,j}^k \\ \varepsilon_{i+1,j}^k \\ \varepsilon_{i,j-1}^k \\ \varepsilon_{i,j+1}^k \\ \varepsilon_{i-1,j}^{k+1} \\ \varepsilon_{i+1,j}^{k+1} \\ \varepsilon_{i,j-1}^{k+1} \\ \varepsilon_{i,j+1}^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\boldsymbol{\theta}$ — постоянный вектор, вполне естественно положить

$$\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \boldsymbol{\theta}^k, \quad k = 0, \ldots, n-1. \tag{14}$$

Тогда система (13) вместе с предположением (14) может быть переформулирована как нелинейная модель:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_{i,j}^{k+1} \\ \boldsymbol{\theta}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-2\theta_1^k - 2\theta_2^k}{1+2\theta_1^k + 2\theta_2^k} x_{i,j}^k \\ \boldsymbol{\theta}^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}^k)(\mathring{\mathbf{a}}^k + \;^k)}{1+2\theta_1^k + 2\theta_2^k} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ y_{i,j}^k = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i,j}^k \\ \boldsymbol{\theta}^k \end{pmatrix} + \varepsilon_{i,j}^k. \end{cases}$$

Теперь расширенный фильтр Калмана может быть применен для оценки вектора состояния, содержащего $\boldsymbol{\theta}^k$ в качестве своих компонент. Алгоритм расширенного фильтра Калмана в этом случае строится аналогично алгоритму расширенного фильтра Калмана, построенного по неявной разностной схеме.

В качестве итоговой оценки вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ можно использовать последнее значение оценки $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{n|n}$, полученное при $k = n$. Тогда вектор оценок исходных параметров D_1, D_2, v_1, v_2 имеет вид

$$\left(\frac{2\hat{\theta}_1(\Delta l_1)^2}{\Delta t}, \frac{2\hat{\theta}_2(\Delta l_2)^2}{\Delta t}, \frac{4\hat{\theta}_3 \Delta l_1}{\Delta t}, \frac{4\hat{\theta}_4 \Delta l_2}{\Delta t} \right)^T.$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Для экспериментальной апробации предложенных методов использовались статистические данные реанализа параметров атмосферы за 2020 год [16], приведенные к среднесуточным значениям. Рассматривались процессы изменения температуры на поверхности 300 ГПа в узлах регулярной сетки от 0 до 180° восточной долготы и от 40 до 70° северной широты с шагом 2,5°. Исходная выборка, состоящая из 366 слоев, была разбита на обучающую (первые 256 слоев) и оставшуюся тестовую части. Сначала по обучающей части выборки для каждого внутреннего узла сетки (i, j) были найдены оценки значений параметров D_1, D_2, v_1, v_2 уравнения диффузии-адвекции (1) четырьмя методами: МНК, комбинацией МНК с расширенным фильтром Калмана, построенным по явной разностной схеме (МНК-ЯФК), комбинацией МНК с расширенным фильтром Калмана, построенным по неявной разностной схеме (МНК-НФК) и комбинацией МНК с расширенным фильтром Калмана, построенным по схеме Кранка — Николсон (МНК-КНФК), используя значения температуры в пяти узлах. Затем с помощью найденных оценок параметров, подставленных в разностную схему Кранка — Николсон, прогнозировались значения температуры во внутренних узлах по тестовой части выборки. Далее для последнего слоя, соответствующего последнему дню в году, прогнозные значения температуры сравнивались с наблюдаемыми значениями.

В качестве показателя эффективности каждого метода использовался коэффициент детерминации:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{11} \sum_{j=1}^{71} (y_{i,j}^{365} - \hat{y}_{i,j}^{365})^2}{\sum_{i=1}^{11} \sum_{j=1}^{71} (y_{i,j}^{365} - \overline{y})^2},$$

где $y_{i,j}^{365}$, $\hat{y}_{i,j}^{365}$ — наблюдаемые и расчетные значения температуры на последнем слое соответственно, $\overline{y}$ — среднее значение температуры на последнем слое.

Для сравнения фактических и прогнозных значений использовался также показатель процентной погрешности прогноза MAPE:

$$MAPE = \frac{1}{11 \cdot 71} \sum_{i=1}^{11} \sum_{j=1}^{71} \left| \frac{y_{i,j}^{365} - \hat{y}_{i,j}^{365}}{y_{i,j}^{365}} \right| \cdot 100\%.$$

Результаты работы МНК, МНК-ЯФК, МНК-НФК, МНК-КНФК в табл. 1.

Результаты сравнения методов, представленные в табл. 1, показывают очевидное превосходство комбинации МНК и расширенного фильтра Калмана, построенного по схеме Кранка — Николсон.

Таблица 1. Сравнительный анализ работы различных методов
[Table 1. Comparative analysis of the work of various methods]

Метод	R^2	*MAPE*
МНК	0.87	1.73 %
МНК-ЯФК	0.93	1.29 %
МНК-НФК	0.97	0.85 %
МНК-КНФК	0.98	0.73 %

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Комбинирование МНК-оценок и расширенного фильтра Калмана с моделью эволюции на основе разностной схемы Кранка — Николсон, как показывают результаты проведенных исследований представленных в табл. 1, существенно повышает точность прогнозирования температурных полей в среднем на 38 % за счет рационального выбора начального приближения (в виде смещенных МНК-оценок) рекурсивной процедуры оценивания параметров алгоритма расширенного фильтра Калмана. Полученные в ходе исследования математические модели температурных полей атмосферы могут быть использованы при исследовании метеорологической обстановки, определяющей безопасность полетов авиации.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ефимов, В. В.* Моделирование мезомасштабных особенностей атмосферной циркуляции в Крымском регионе Черного моря / В. В. Ефимов, В. С. Барабанов, А. В. Крупин // Морской гидрофизический журнал. – 2012. – № 1. – С. 64–74.

2. *Ефимов, В. В.* Пространственная структура и повторяемость крупномасштабных аномалий температуры поверхности Черного моря / В. В. Ефимов, О. И. Комаровская // Океанология. – 2018. – Т. 58. – № 2. – С. 173–180. – DOI 10.7868/S0030157418020016.

3. *Матвеев, М. Г.* Разработка и исследование статистических моделей нестационарного многомерного временного ряда атмосферных температур в условиях неоднородности / М. Г. Матвеев, Е. А. Сирота // Информационные технологии. – 2014. – № 12. – С. 20–24.

4. *Matveev, M. G.* Modeling of Nonstationary Distributed Processes on the Basis of Multidimensional Time Series / M. G. Matveev, A. V. Kopytin,, E. A. Sirota, E. A. Kopytina // Procedia Engineering. – 2017. – No 201. – P. 1–862. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.643.

5. *Яровая, Д. А.* Мезомасштабные циклонические вихри, возникающие над Черным морем вблизи Кавказского побережья / Д. А. Яровая, М. В. Шокуров // Морской гидрофизический журнал. – 2012. – № 3. – С. 14–30.

6. *Ben-Moshe, D.* Identification of linear regressions with errors in all variables / D. Ben-Moshe // Econometric Theory. – 2020. – P. 1–31.

7. *Cao, J.* Penalized nonlinear least squares estimation of time-varying parameters in ordinary differential equations / J. Cao, J. Z. Huang, H. Wu // Journal of Computational and Graphical Statistics. – 2012. – Vol. 21. – P. 42–56.

8. *Chen, J.* Efficient local estimation for time-varying coefficients in deterministic dynamic models with applications to HIV-1 dynamics / J. Chen, H. Wu // Journal of the American Statistical Association. – 2008. – Vol. 103. – P. 369–384.

9. *Fogler, H. R.* A pattern recognition model for forecasting / H. R. Fogler // Management science. – 1974. – Vol. 20. – P. 1178–1189.

10. *Xiaolei, X.* Parameter Estimation of Partial Differential Equation Models / Xun Xiaolei, Cao Jiguo, Mallick Bani, J. Carroll Raymond, Maity Arnab // Journal of the American Statistical Association. – 2013. –No 108:503. – P. 1009–1020, DOI: 10.1080/01621459.2013.794730

11. *Копытин, А. В.* Идентификация распределенной динамической системы с использованием расширенного фильтра Калмана / А. В. Копытин, Е. А. Копытина, М. Г. Матвеев // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2021. – № 2. – С. 75–83. – DOI 10.14357/20718632210208.

12. *Копытин, А. В.* Применение интегрального метода идентификации параметров распределенной динамической системы / А. В. Копытин, Е. А. Копытина // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2019. – № 1. – С. 21–26.

13. *Копытин, А. В.* Применение метода инструментальных переменных для параметрической идентификации распределенной динамической системы / А. В. Копытин, Е. А. Копытина // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2018. – № 4. – С. 19–23.

14. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021617892 Российская Федерация. Применение расширенного фильтра Калмана в распределенных динамических системах : № 2021617140 : заявл. 13.05.2021 : опубл. 20.05.2021 / Е. А. Копытина, А. В. Копытин ; заявитель федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный университет».

15. *Chui, C. K.* Kalman filtering with real-time applications / C. K. Chui, G. Chen. – 3-е изд., перераб. и доп. – Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. – 241 p.

16. NCEP/DOE AMIP II Reanalysis [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.psl.noaa.gov/data/gridded/data.ncep.reanalysis2.html. – (Дата обращения: 03.04.2021).

Копытина Екатерина Александровна — старший преподаватель кафедры информационных технологий управления Воронежского государственного университета.
E-mail: zhemkaterina@yandex.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-8362-1878

Копытин Алексей Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры информационных технологий управления Воронежского государственного университета.
E-mail: alexkopytin@gmail.com
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6850-0138

Матвеев Михаил Григорьевич — д-р техн наук, проф., профессор кафедры информационных технологий управления Воронежского государственного университета.
E-mail: mgmatveev@yandex.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6528-6420

DOI: https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2022/3/45-54 ISSN 1995-5499
Received 19.08.2022
Accepted 30.09.2022

PREDICTION OF ATMOSPHERIC TEMPERATURE FIELDS USING THE EXTENDED KALMAN FILTER

© 2022 E. A. Kopytina✉, A. V. Kopytin, M. G. Matveev

Voronezh State University
1, Universitetskaya Square, 394018 Voronezh, Russian Federation

Annotation. A combined method for forecasting temperature fields of the atmosphere, based on statistical data from the reanalysis of atmospheric parameters, is proposed. The first component of the method is to obtain least squares estimates of the parameters of the Crank-Nicolson finite difference scheme. However, these estimates turn out to be biased due to the presence of errors in the regressors. In order to reduce the specified bias, the extended Kalman filter is used as the

✉ Kopytina Ekaterina A.
e-mail: zhemkaterina@yandex.ru

second component of the method. Using the found parameter estimates, substituted into the Crank-Nicholson finite-difference scheme, the temperature values at the internal nodes were predicted from the test part of the sample. A full-scale computational experiment is presented, confirming the effectiveness of the proposed method, based on the data of time series of atmospheric temperatures obtained from the NCEP/DOE AMIP II Reanalysis system. The conducted studies have shown that the quality of model parameter estimates in the form of parabolic differential equations is significantly affected by the choice of the type of difference approximation; the quality of the estimates improves when stable finite difference schemes are used and their order is increased. The combination of LSM and the extended Kalman filter with an evolution model based on the Crank-Nicolson finite-difference scheme developed as a result of research provides an increase in the accuracy of forecasting changes in atmospheric temperature fields by an average of 38%. The obtained mathematical models of temperature fields of the atmosphere can be used in the study of the meteorological situation, which determines the safety of aviation flights.
Keywords: parameter estimation, LSM, Crank-Nicholson difference scheme, extended Kalman filter.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

REFERENCES

1. *Efimov V. V., Barabanov V. S., Krupin A. V.* (2012) Modelirovanie mezomasshtabnyh osobennostej atmosfernoj cirkuljacii v Krymskom regione Chernogo morja [Modeling of mesoscale features of atmospheric circulation in the Crimean region of the Black Sea], *Morskoy Gidrofizicheckiy Zhurnal*. (1). P. 64–74. (in Russian)

2. *Efimov V. V., Komarovskaja O. I.* (2018) Prostranstvennaja struktura i povtorjaemost' krupnomasshtabnyh anomalij temperatury poverhnosti Chernogo morja [Spatial structure and frequency of large-scale anomalies of the Black Sea surface temperature], *Okeanologija*. (2). P. 173–180. (in Russian). doi: 10.7868/S0030157418020016

3. *Matveev M. G., Sirota E. A.* (2014) Pazpabotka i issledovanie statistidheskih modclej nestacionapnogo mnogomepnogo vpemennogo pyada atmosfepnyh tempepatup v usloviyah neodnopodnosti [Development and study of statistical models of a non-stationary multidimensional time series of atmospheric temperatures in conditions of heterogeneity], *Informacionnye tekhnologii*. (12). P. 20–24. (in Russian).

4. *Matveev M. G., Kopytin A. V., Sirota E. A., Kopytina E. A.* (2017) Modeling of Nonsta-tionary Distributed Processes on the Basis of Multidimensional Time Series. Procedia Engineering. (201). P. 1–862. doi: 10.1016/j. proeng. 2017. 09. 643.

5. *Jarovaja D. A., Shokurov M. V.* (2012) Mezomasshtabnye ciklonicheskie vihri, voznikajushhie nad Chernym morem vblizi Kavkazskogo poberezh'ja [Mesoscale cyclonic eddies emerging over the Black Sea near the Caucasian coast], *Morskoy Gidrofizicheckiy Zhurnal*. (3). P. 14–30. (in Russian)

6. *Ben-Moshe, D.* (2020) Identification of linear regressions with errors in all variables. *Econometric Theory*.P. 1–31.

7. *Cao J., Huang J. Z., Wu H.* (2012) Penalized nonlinear least squares estimation of time-varying parameters in ordinary differential equations. *Journal of Computational and Graphical Statistics*. (21). P. 42–56.

8. *Chen J., Wu H.* (2008) Efficient local estimation for time-varying coefficients in deterministic dynamic models with applications to HIV-1 dynamics. *Journal of the American Statistical Association*. (103). P. 369–384.

9. *Fogler, H. R.* (1974) A pattern recognition model for forecasting. *Management science*. (8). P. 1178—1189.

10. *Xiaolei Xun, Jiguo Cao, Bani Mallick, Raymond J. Car-roll, Arnab Maity* (2013) Parameter Estimation of Partial Differential Equation Models. *Journal of the American Statistical Association*. (108:503), P. 1009–1020, doi: 10.1080/01621459.2013.794730

11. *Kopytin A. V., Kopytina E. A., Matveev M. G.* (2021) Identifying a distributed dynamic system using an advanced filter Informacionnye tehnologii i vychislitel'nye sistemy [*Information tech-*

nology and computing systems]. (2). P. 75–83. (in Russian). doi: 10.14357/20718632210208.

12. *Kopytin A. V., Kopytina E. A.* (2019). Primeneniye integral'nogo metoda identifikatsii parametrov raspredelennoy dinamicheskoy sistemy [Application of the integral method for identifying the parameters of a distributed dynamic system]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Sistemnyy analiz i informatsionnyye tekhnologii* [*Proceedings of Voronezh State University. Series Systems Analysis and Information Technologies*]. 1:21–26.

13. *Kopytin A. V., Kopytina E. A.* (2018) Application of the method of instrumental variables for parametric identification of a distributed dynamic system. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii* [*Voronezh State University Bulletin. Series: Systems Analysis and Information Technology*]. (4). P. 19–23. (in Russian).

14. *Kopytina E. A., Kopytin A. V.* Application of the extended Kalman filter in distributed dynamic systems. Certificate of registration of the computer program 2021617140, 05/20/2021. Application No. 2021617892. dated 05/13/2021. (in Russian)

15. *Chui C. K., Chen G.* (2009) Kalman filtering with real-time applications. *Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelberg*. 241 p.

16. NCEP/DOE AMOP II Reanalysis [Elektronnyj resurs], URL: http:// https://www.psl.noaa.gov/data/gridded/data.ncep.reanalysis2.html.html.

Kopytina Ekaterina A. — старший преподаватель кафедры информационных технологий управления Воронежского государственного университета.
E-mail: zhemkaterina@yandex.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-8362-1878

Kopytin Alexei V. — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры информационных технологий управления Воронежского государственного университета.
E-mail: alexkopytin@gmail.com
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6850-0138

Matveev Mikhail G. — д-р. техн наук, проф., профессор кафедры информационных технологий управления Воронежского государственного университета.
E-mail: mgmatveev@yandex.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6528-6420