УДК 517.97 : 532.526 ISSN 1995-5499
DOI: https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2022/4/5-11
Поступила в редакцию 03.10.2022
Подписана в печать 05.12.2022

ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРЕЖАЮЩИХ ИНДИКАТОРОВ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАТОРОВ

© 2022 Д. А. Хрипушин✉

Воронежский государственный университет
Университетская пл., 1, 394018 Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. Рассматривается задача построения опережающих индикаторов экономических процессов. Такие индикаторы предоставляют информацию о начале трендов, которые еще явно себя не проявили. Научная новизна исследования, проведенного в данной статье, состоит в том, что задача построения опережающих индикаторов сводится к задаче автоматического прогнозирования некоторого класса сигналов, т. е. к задаче синтеза автоматического прогнозатора некоторого класса сигналов. Задачи синтеза автоматических прогнозаторов возникают как в теории автоматического управления, так и в различных приложениях, где требуется получить прогноз по наблюдаемой реализации. Класс рассматриваемых в статье сигналов достаточно широкий. Синтез автоматических прогнозаторов осуществляется с помощью дифференцирующих устройств: для решения поставленной задачи используется разложение экспоненциальной передаточной функции в ряд Бурмана — Лагранжа по степеням передаточной функции реализуемого дифференцирующего звена. Аппроксимируемая передаточная функция является трансцендентной и бесконечномерной. Разложение в ряд Бурмана — Лагранжа позволяет осуществить регуляризацию некорректной задачи. Точность прогнозирования может быть увеличена за счет параметра регуляризации, а также за счет увеличения числа членов ряда Бурмана — Лагранжа. Приводятся результаты моделирования опережающего индикатора, построенного с помощью автоматического прогнозатора. Сравнение построенного в статье опережающего индикатора с широко применяемыми на практике индикаторами, построенными на основе фильтра Калмана и фильтра Савицкого — Голея, показывает хорошую точность прогнозирования тренда экономического процесса. Предложенный метод построения опережающих индикаторов может быть применен для прогнозирования экономических процессов, для принятия обоснованных инвестиционных решений и своевременного проведения ребалансинга инвестиционного портфеля.

Ключевые слова: опережающий индикатор, дифференциатор, автоматический прогнозатор, класс сигналов, передаточная функция, ряд Бурмана — Лагранжа.

ВВЕДЕНИЕ

Фондовый рынок не статичен, на нем происходят периоды роста и спада. Такие колебания оказывают влияние и на глобальные тренды различных финансовых инструментов. Однако продолжительность периодов роста или падения не одинакова, поэтому для того, чтобы определить тенденцию, необходимо уметь использовать различные экономические индикаторы. В данной статье рассматривается применение опережающих индикаторов.

Такие индикаторы предоставляют информацию о начале трендов, которые еще явно

✉ Хрипушин Денис Александрович
e-mail: qepm@outlook.com

себя не проявили. Опережающие индикаторы могут использоваться для прогнозирования экономических процессов, для принятия обоснованных инвестиционных решений и своевременного проведения ребалансировки инвестиционного портфеля. Очевидно, что для построения опережающих индикаторов требуется определение в настоящем будущей тенденции. Это, в свою очередь, приводит к необходимости прогнозирования экономических процессов.

Как известно, любые процессы характеризуются некоторыми параметрами. В связи с этим во многих областях возникают задачи прогнозирования параметров: прогнозирование цены на какой-либо финансовый инструмент, прогнозирование числа заболевших определенной болезнью, прогнозирование температуры воздуха или количества осадков и т. д. Один из подходов к решению таких задач основан на построении математических моделей соответствующих процессов. Например, с помощью математических моделей физических процессов в атмосфере и океане были разработаны гидродинамические методы прогноза погоды [1]. Однако такой подход требует описания сложных математических моделей, а также знания параметров, характеризующих рассматриваемое явление или процесс. Эти трудности существенно ограничивают применение описываемого подхода. В прикладных исследованиях нередко возникают ситуации, когда математическое моделирование, основанное на использовании точных законов, оказывается затруднительным, но в распоряжении исследователей оказывается результат наблюдений параметров исследуемого процесса или явления. В этих случаях для решения задач прогнозирования могут быть использованы методы, основанные на анализе наблюдаемых параметров.

В настоящее время для выделения тенденций и построение прогнозов на фондовом рынке широкое распространение получили опережающие индикаторы, построенные на основе фильтров Савицкого — Голея и Калмана.

Фильтры Савицкого — Голея [2] осуществляют полиномиальную аппроксимацию отрезков входного сигнала по критерию минимума квадратической ошибки. Фильтры Савицкого — Голея лучше сохраняют высокочастотные компоненты сигнала, однако обеспечивают худшее подавление шума по сравнению с обычными рекурсивными фильтрами. Фильтр Калмана [3] предназначен для рекурсивного дооценивания вектора состояния априорно известной динамической системы, то есть для расчёта текущего состояния системы необходимо знать текущее измерение, а также предыдущее состояние самого фильтра. Алгоритм работает в два этапа. На этапе прогнозирования фильтр Калмана экстраполирует значения переменных состояния, а также их неопределённости. На втором этапе по данным измерения результат экстраполяции уточняется. Благодаря пошаговой природе алгоритма он может в реальном времени отслеживать состояние объекта.

В данной статье для прогнозирования экономических процессов и построения экономических индикаторов применяется метод синтеза автоматических прогнозаторов, основанный на применении автоматических дифференциаторов широкого класса сигналов [4].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Экономические процессы или явления в произвольный момент времени характеризуются некоторыми параметрами. Как правило, процесс характеризуется конечным числом параметров, зависящих только от времени. Такие процессы описываются конечным числом обыкновенных дифференциальных, интегральных, дифференциально-разностных либо разностных уравнений. Будем в дальнейшем предполагать, что исследуемый процесс $g : C^m\left[0,+\infty\right) \to \mathbb{R}$.

Опережающий индикатор должен сохранять тенденцию развития экономического процесса $g(t)$ и обеспечивать подавление шума, т. е. опережающий индикатор должен осуществлять сглаживание сигнала $g(t)$ с минимальной задержкой. Для этого рассмотрим задачу построения автоматического устройства прогнозирования (прогнозатора), который должен находить значение $g(t+\tau)$ по известным значениям произвольного сигнала $g(t)$, где $t \in [0,T]$, $\tau > 0$ — время упреждения [5]. Следует отметить, что прогнозатор должен осуществлять автоматическое прогнозирование произвольного, заранее неизвестного сигнала $g(t)$.

2. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для решения поставленной задачи рассмотрим разложение сигнала $g(t+\tau)$ в ряд Тейлора в окрестности точки t:

$$g(t+\tau) = \sum_{k=0}^{m} \frac{g^{(k)}(t)\tau^k}{k!} + \delta_m(t). \qquad (1)$$

Здесь $\delta_m(t)$ — остаточный член ряда Тейлора.

Применим к равенству (1) преобразование Лапласа. Тогда, учитывая свойства преобразования Лапласа, получаем следующее равенство в комплексной области:

$$\begin{aligned} G(p)e^{\tau p} = \sum_{k=0}^{m} \Bigg[\frac{(\tau p)^k}{k!} G(p) + \\ + G_{0,k}(p) \Bigg] + \Delta_m(p). \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь $G(p)$ — изображение по Лапласу сигнала $g(t)$; $G_{0,k}(p)$ — алгебраический многочлен аргумента p, коэффициенты которого определяются значениями $g^{(i)}(0), i = 0,\ldots,k-1$, при этом $G_{0,0}(p) \equiv 0$; $\Delta_m(p)$ — изображение по Лапласу $\delta_m(t)$,

$$\Delta_m(p) = \frac{p^{m+1}}{2\pi j} \int_{C_0} \frac{G(z)e^{\tau z}\, dz}{(z-p)z^{m+1}}, \qquad (3)$$

C_0 — некоторый замкнутый контур, лежащий в $\mathbb{C}$ и содержащий точки p и 0.

Таким образом, для осуществления автоматического прогноза произвольного сигнала требуется реализовать передаточную функцию трансцендентного бесконечномерного объекта $e^{\tau p}$.

Для решения поставленной задачи прогнозирования сигнала $g(t)$, как отмечалось выше, требуется реализовать передаточную функцию $\Psi(p) = e^{\tau p}$. Так как эта функция является бесконечномерной и трансцендентной, то осуществить непосредственно эту реализацию не получится. Другой способ реализации может быть связан с аппроксимацией функции $\Psi(p) = e^{\tau p}$ отрезком ряда Тейлора. Но и этот подход не позволяет решить задачу, так как разложение $e^{\tau p}$ по степеням p приводит к необходимости реализации идеального дифференцирующего звена с передаточной функцией $W(p) = p$, что, как известно, неосуществимо [6]. Однако если рассмотреть разложение $\Psi(p) = e^{\tau p}$ в ряд Бурмана — Лагранжа по степеням дробно-рациональных выражений, то задача может быть решена. Итак, рассмотрим аппроксимацию передаточной функции с помощью дробно-рациональных выражений. С этой целью будем использовать ряды Бурмана — Лагранжа — полезное для приложений обобщение рядов Тейлора. Ряды Бурмана — Лагранжа [7, 8] получаются при разложении одной аналитической функции $\Psi(p)$ по степеням другой аналитической функции $w(p)$:

$$\Psi(p) = \sum_{n=0}^{m} d_n w^n(p) + \Delta_m(p,a). \qquad (4)$$

Формулы для коэффициентов ряда Бурмана — Лагранжа [7, 8] имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\Psi(z)w'(z)}{w^{n+1}(z)} dz = \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{p\to a} \frac{d^n}{dp^n} \left[\frac{\Psi(p)w'(p)(p-a)^{n+1}}{w^{n+1}(p)} \right], n \in \mathbb{Z}_0. \end{aligned} \qquad (5)$$

При $n \geq 1$ формулы (5) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\Psi'(z)}{w^n(z)} dz = \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{p\to a} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \left[\Psi'(p) \frac{(p-a)^n}{w^n(p)} \right]. \end{aligned} \qquad (6)$$

Формулы (5) и (9) для коэффициентов ряда Бурмана — Лагранжа получены при предположении, что $\Psi(p)$ и $w(p)$ правильны в некоторой точке a, т. е. существуют и конечны пределы $\lim\limits_{p\to a}\Psi(p)$ и $\lim\limits_{p\to a} w(p)$, причем $w(p)$ имеет в точке a нуль первого порядка. Замкнутый контур C, ограничивающий некоторую область D, выбирается так, чтобы D содержала точку a, обе функции были правильны в $\overline{D} = D \cup C$ и чтобы $w(p)$ принимала свои значения лишь один раз. Отметим, что если $w(a) \neq 0$, то функцию $\Psi(p)$

можно раскладывать в ряд по степеням функции $w_1(p) = w(p) - a$.

Выражение для остаточного члена ряда Бурмана — Лагранжа имеет вид

$$\Delta_m(p,a) = \frac{w^{m+1}(p)}{2\pi j} \times \\ \times \int_C \frac{\Psi(z) w'(z) dz}{w^{m+1}(z)\left(w(z) - w(p)\right)}. \quad (7)$$

Рассмотрим далее разложение функции $\Psi(p) = e^{\tau p}$ по степеням $w(p) = \frac{p}{\mu p + 1}$, $\mu \geq 0$, при $a = 0$. Тогда

$$e^{\tau p} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{p^k}{(\mu p + 1)^k}. \quad (8)$$

Имеем $\alpha_0 = \Psi(0) = 1$. По формуле (6), применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения двух функций, после элементарных преобразований получаем

$$\alpha_k = \frac{\tau^k}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i A_k^i \left(\frac{\mu}{\tau}\right)^i, \quad (9)$$

где $C_{k-1}^i = \frac{(k-1)!}{i!(k-i-1)!}$, $A_k^i = \frac{k!}{(k-i)!}$. Нетрудно проверить, что при $\mu = 0$ коэффициенты рядов Тейлора и Бурмана — Лагранжа совпадают. При $\mu > 0$ получаем реализуемое разложение $\Psi(p) = e^{\tau p}$ по степеням $w(p) = \frac{p}{\mu p + 1}$. В этом случае μ можно рассматривать как параметр регуляризации, применяемый для решения некорректных задач [9]. С помощью ряда (2) найдем передаточную функцию автоматического прогнозатора [10]. С этой целью представим разложение (9) в следующем виде:

$$e^{\tau p} = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \frac{p^k}{(\mu p + 1)^k} + \Delta_N(p).$$

где $\Delta_N(p)$ — остаточный член ряда Бурмана — Лагранжа при $w(p) = \frac{p}{\mu p + 1}$, $\mu \geq 0$ и $a = 0$ функции $e^{\tau p}$. Можно показать, что в любом круге $|p| \leq R$ имеет место равенство

$$\lim_{N \to \infty} \Delta_N(p) = 0. \quad (10)$$

Поэтому передаточную функцию прогнозатора рассмотрим в виде

$$W_N(p) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \frac{p^k}{(\mu p + 1)^k}. \quad (11)$$

В силу (10) при $N \to \infty$ имеем $W_N(p) \to e^{\tau p}$ для всех $|p| \leq R$, то есть точность прогноза будет повышаться с увеличением числа членов ряда Бурмана — Лагранжа.

С помощью автоматического прогнозатора осуществим построение опережающего индикатора для процесса $g(t)$. Для этого в качестве T следует выбирать ширину окна или период сглаживания, а прогноз осуществлять на τ шагов.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 1–4 представлены результаты моделирования прогнозатора (11) при $\mu = 0{,}01$, $\tau = 1$ и $N = 3$.

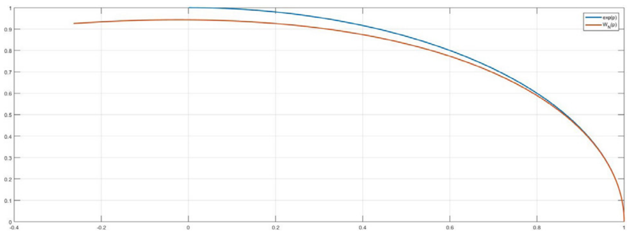

Рис. 1. Амплитудная фазо-частотная характеристика прогнозатора
[Fig. 1. Amplitude phase-frequency response of the predictor]

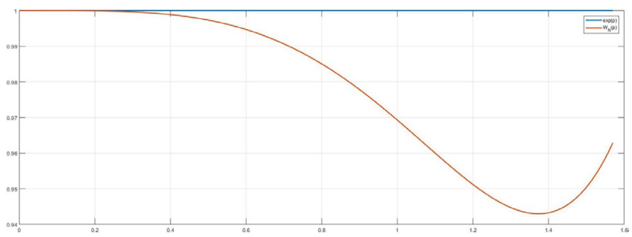

Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика прогнозатора
[Fig. 2. Amplitude phase-frequency response of the predictor]

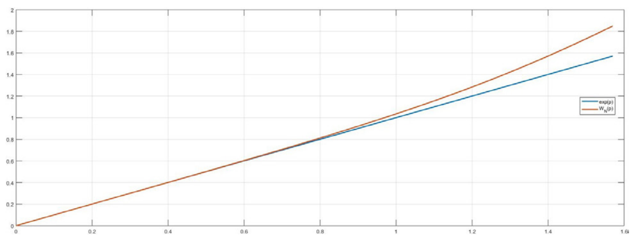

Рис. 3. Фазо-частотная характеристика прогнозатора
[Fig. 3. Phase-frequency response of the predictor]

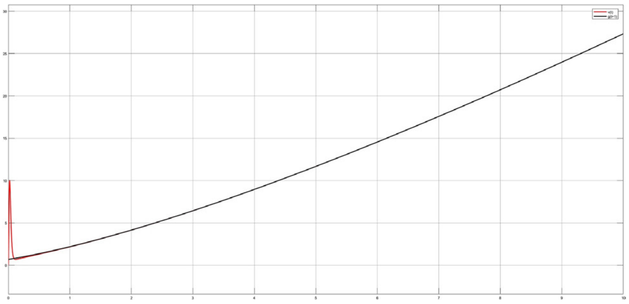

Рис. 4. Результат прогноза сигнала $tln(t+1)$
[Fig. 4. The result of the signal prediction]

На рис. 5 представлены результаты моделирования опережающих индикаторов, построенных соответственно с помощью фильтра Калмана, фильтра Савицкого — Голея и автоматического прогнозатора.

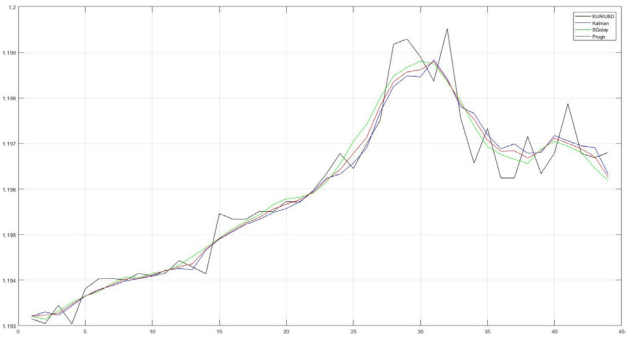

Рис. 5. Результаты моделирования опережающих индикаторов
[Fig. 5. Results of the modeling of leading indicators]

Нетрудно заметить, что сравнение построенного в статье опережающего индикатора с широко применяемыми на практике индикаторами, построенными на основе фильтра Калмана и фильтра Савицкого — Голея, показывает хорошую точность прогнозирования тренда курса валютной пары EUR/USD.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложено решение задачи построения опережающих индикаторов экономических процессов. Решение сводится к задаче автоматического прогнозирования некоторого класса сигналов, т. е. к задаче синтеза автоматического прогнозатора некоторого класса сигналов. Синтез автоматических прогнозаторов осуществляется с помощью дифференцирующих устройств: для решения поставленной задачи используется разложение экспоненциальной передаточной функции в ряд Бурмана — Лагранжа по степеням передаточной функции реализуемого дифференцирующего звена. Точность прогнозирования может быть увеличена за счет параметра регуляризации, а также за счет увеличения числа членов ряда Бурмана — Лагранжа. Для курса валютной пары EUR/USD приводятся результаты моделирования опережающего индикатора, построенного с помощью автоматического прогнозатора. Результаты показывают хорошую точность прогнозирования тренда данного экономического процесса. Предложенный метод построения опережающих индикаторов может быть применен для прогнозирования экономических процессов, для принятия обоснованных инвестиционных решений и своевременного проведения ребалансинга инвестиционного портфеля.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марчук, Г. И.* Численные методы в прогнозе погоды / Г. И. Марчук. – Л. : Гидрометеоиздат, 1967. – 355 с.

2. *Orfanidis, S. J.* Introduction to Signal Processing / S. J. Orfanidis. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2010. – 795 p.

3. *Kalman, R. E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems / R. E. Kalman. – Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering. – 1960. – 82 (Series D). – P. 35–45.

4. *Лозгачев, Г. И.* Автоматические дифференциаторы: построение и применение в задачах управления / Г. И. Лозгачев, А. В. Дылевский. – Воронеж : Изд-во Воронежского гос. ун-та, 2000. – 144 с.

5. *Ивахненко, А. Г.* Кибернетические предсказывающие устройства / А. Г. Ивахненко, В. Г. Лапа. – К. : «Наукова думка», 1965. – 213 с.

6. *Дылевский, А. В.* Синтез конечномерных регуляторов для бесконечно-мерных объек-

тов / А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев, В. С. Малютина; Воронежский государственный университет. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – 299 с.

7. *Девятов, Б. Н.* Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач упраавления. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1964. – 324 с.

8. *Лаврентьев, М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1987. – 688 с.

9. *Тихонов, А. Н.* Методы решения некорректно поставленных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1974. – 223 с.

10. *Дылевский А. В.* Автоматическое прогнозирование детерминированных сигналов / А. В. Дылевский, Д. А. Хрипушин // Научный результат. Информационные технологии. – 2021. – Т. 6, № 4. – С. 20–26. doi: 10.46916/22112021-2-978-5-00174-377-4

Хрипушин Денис Александрович — аспирант кафедры программирования и информационных технологий факультета компьютерных наук Воронежского государственного университета.
E-mail: qepm@outlook.com
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-6396-1501

DOI: https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2022/4/5-11 ISSN 1995-5499
Received 03.10.2022
Accepted 05.12.2022

CONSTRUCTION LEADING INDICATORS USING DIFFERENTIATORS

© 2022 D. A. Khripushin✉

Voronezh State University
1, University Square, 394018 Voronezh, Russian Federation

Annotation. The problem of constructing leading indicators of economic processes is considered. These indicators provide information about the beginning of the trends that have not yet explicitly demonstated themselves. The scientific novelty of the research conducted in this article is that the task of constructing leading indicators is reduced to the task of automatic forecasting of a certain class of signals, i.e. to the task of synthesizing an automatic predictor of a certain class of signals. The tasks of synthesis of automatic predictors arise both in the theory of automatic control and in various applications where it is required to obtain a forecast for the observed implementation. The class of signals considered in the article is quite wide. The synthesis of automatic predictors is carried out using differentiating devices: the exponential transfer function is decomposed into the Burman — Lagrange series by degrees of the transfer function of the differentiating link being implemented to solve the problem. The approximated transfer function is transcendental and infinite-dimensional. The Burman — Lagrange expansion allows the regularization of an incorrect problem. Accuracy of the prediction can be increased due to the regularization parameter, as well as by increasing the number of terms of the Burman — Lagrange series. The results of modeling the leading indicator constructed with the help of an automatic forecast are presented. A comparison of the leading indicator constructed in the article with indicators widely used in practice which were built on the basis of the Kalman filter and the Savitsky — Goley filter and it shows good accuracy in predicting the trend of the economic process. The proposed method of constructing leading indicators can be used to predict economic processes, to make informed investment decisions and timely rebalancing of the investment portfolio.

Keywords: leading indicator, differentiator, automatic predictor, class of signals, transfer function, Burman — Lagrange series.

✉ Khripushin Denis A.
e-mail: qepm@outlook.com

CONFLICT OF INTEREST

The author declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

REFERENCES

1. *Marchuk G. I.* (1967) Numerical methods in weather forecasting. *L. : Hydro-meteoizdat*. 355 p.

2. *Orfanidis S. J.* (2010) Introduction to Signal Processing. *Prentice-Hall, Eng-lewood Cliffs, N J.* 795 p.

3. *Kalman R. E.* (1960) A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering.* 82 (Series D). P. 35–45.

4. *Lozgachev G. I. and Dylevsky A. V.* (2000) Automatic differentiators: construction and application in control problems. *Voronezh : Publishing House of the Voronezh State University*. 144 p.

5. *Ivakhnenko A. G. and Lapa V. G.* (1965) Cybernetic predictive devices. *K. : Naukova dumka*. 213 p.

6. *Dylevsky A. V., Lozgachev G. I. and Malyutina V. S.* (2012) Synthesis of finite-dimensional regulators for infinite-dimensional objects. *Voronezh : Publishing and Printing Center of Voronezh State University*. 299 p.

7. *Devyatov B. N.* (1964) Theory of transients in technological devices from the point of view of control tasks. *Novosybirsk : Publishing House of the USSR Academy of Sciences*. 324 p.

8. *Lavrentiev M. A. and Shabat B. V.* (1987) Methods of the theory of functions of a complex variable. *M. : Science*. 688 p.

9. *Tikhonov A. N. and Arsenin V. Y.* (1974) Methods of solving incorrectly set tasks. *M. : Science*. 223 p.

10. *Dylevsky A. V. and Khripushin D. A.* (2021) Automatic prediction of deterministic signals. *Scientific result. Information technologies*. Vol. 6, No. 4. P. 20–26. doi: 10.46916/22112021-2-978-5-00174-377-4

Khripushin Denis A. — postgraduate student of the Department of Programming and Information Technology of the Faculty of Computer Science, Voronezh State University.
E-mail: qepm@outlook.com
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-6396-1501