УДК 519.217.6 ISSN 1995-5499
DOI: https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2022/4/119-131
Поступила в редакцию 11.07.2022
Подписана в печать 05.12.2022

ДИСКРЕТНАЯ ОДНОРОДНАЯ ЦЕПЬ МАРКОВА ДЛЯ НЕЧЕТКИХ СОСТОЯНИЙ

© 2022 М. Г. Матвеев✉, Н. А. Алейникова, А. А. Громковский

Воронежский государственный университет
Университетская пл., 1, 394018 Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. В результате проведенных исследований разработана методика построения однородной цепи Маркова для системы с нечеткими состояниями, основанная на обработке данных временных рядов выходов системы. В отличие от известных нечетких цепей Маркова переходная матрица не рассматривается как нечеткое отношение, а остается обычной стохастической матрицей. Такой подход позволяет получать стационарные состояния системы, которые характеризуют ее статус на некотором заданном временном промежутке. Эта информация может использоваться в системе поддержки принятия решений по целенаправленному изменению статуса. Особенностью полученной цепи Маркова для нечетких состояний системы является возможность учета динамики изменения состояний системы при расчете средних значений статуса, в отличие от широко применяемой ориентации на усреднения, основанные на вычислении средних арифметических. Приводятся численные эксперименты с построенной цепью Маркова для нечетких состояний, которые подтверждают ее адекватность и возможности учета динамики. Эксперименты приведены на примере оценки статуса обучающегося в системе образования.

Ключевые слова: нечеткое случайное состояние, нечеткое случайное событие, цепь Маркова, временной ряд, оценка состояния.

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В теории систем важную роль играет понятие состояния. По определению Р. Калмана [1] состояние системы представляет собой некоторую внутреннюю характеристику системы, значение которой в текущий момент времени определяет значение выходной величины и оказывает влияние на ее будущее. Таким образом, можно говорить, что состояние системы определяет ее поведение (изменение состояний) во времени наряду с внешними воздействиями. Адекватная оценка текущего состояния системы и прогноз изменения состояния чрезвычайно важны при управлении системой, в частности, при принятии решений о целенаправленном изменении состояния, или при оценке потенциальных возможностей системы. Для этого в теории систем рассматривается модель состояний в виде соответствующего динамического уравнения [2]. Однако, как правило, состояние системы непосредственно не наблюдаемо, поэтому наряду с уравнением состояния теория систем вводит дополнительное уравнение наблюдения [2]. Уравнение наблюдения устанавливает связь между состояниями $s \in S$ и наблюдаемыми признаками этих состояний. Признаки обычно рассматриваются как наблюдаемые выходные переменные системы $x \in X$. Теоретико-множественное представление уравнения состояния, η и уравнения наблюдения, μ с множеством входов (внешних воздействий) U, множеством выходов X, множеством состояний S, в моменты времени $t \in T$ принято представлять в виде следующих соответствий [3]:

$$\eta : S \times U \times T \to S, \quad (1)$$

$$\mu : S \times T \to X. \quad (2)$$

✉ Матвеев Михаил Григорьевич
e-mail: mgmatveev@yandex.ru

Во многих практических задачах анализа поведения конкретной системы удобно вводить градацию ее состояний на основе значений наблюдаемой динамики выходов x системы. Например, в медицине употребительны состояния человека: «здоров», «болен», определяемые значениями временных рядов температур, концентраций и т. п.; в образовании состояния обучающегося: «полностью обучен», «фрагментарно обучен», «необучаем», определяемые временными рядами бальных оценок знаний по совокупности учебных предметов; в экономике состояния предприятия: «стабильное», «критическое», «катастрофическое», определяемые временными рядами финансово-экономических показателей. Следует отметить, что все приведенные примеры относятся к состояниям, которые описываются термами соответствующих лингвистических переменных. Действительно, на множестве X наблюдаемых значений признаков рассматриваемых классов состояний невозможно провести четкую границу, отделяющую одно состояние от другого. В таком случае установление соответствия состояния, s и наблюдаемых значений признаков, x обычно определяется экспертным путем и носит нечеткий характер.

На систему всегда действует множество неконтролируемых внешних факторов, обуславливающих случайный характер изменения ее состояний. Допустим, что процессы изменения дискретных состояний простейшие и рассматриваются в дискретном времени. Тогда адекватным описанием динамики состояний будут дискретные марковские цепи [4]. Уравнение состояний (1) в этом случае представимо в виде рекуррентной зависимости:

$$\mathbf{p}^{t+1} = \mathbf{M}^t \mathbf{p}^t,\ t = 0;1;2;\ldots;\ \mathbf{p}^0 = (1;0;\ldots;0), \quad (3)$$

где t — дискретное время; $\mathbf{p}^t = (p_1^t;\ldots;p_s^t)^T$ — вектор, задающий распределение вероятностей нахождения системы в соответствующем состоянии; s — число состояний; $\mathbf{M}^t = \left\| p_{ij} \right\|$ — стохастическая матрица $s \times s$ вероятностей переходов состояний с элементами p_{ij} — вероятности перехода системы из состояния i в состояние j. Переход системы из одного состояния в другое будем называть событием. Вероятности p_{ij} могут меняться во времени, но на начальном этапе исследований примем их константами. В этом случае марковская цепь называется однородной.

Для работы с марковской цепью необходимо задать стохастическую матрицу $\mathbf{M}$. В классическом случае это делается на основе статистического анализа интенсивности потока наблюдаемых событий с вычислением средней интенсивности λ и вычислении вероятности $p = \lambda \cdot \Delta t$ при соблюдении условий простейшего потока событий [4]. Но в рассматриваемой ситуации наблюдаемы только признаки состояний, при нечетком (неоднозначном) соответствии признаков и событий. Кроме того, неоднозначность влечет нарушение условий простейшего потока. Существуют различные подходы к заданию матрицы $\mathbf{M}$ для случая нечетких состояний. Например, представление матрицы переходов как нечеткого отношения на множестве состояний S рассматривается в работе [5], на основе которой выполнен ряд исследований, как за рубежом, так и в России, например, [6, 7]. Однако, как будет показано далее, решение задачи построения матрицы переходов в рассматриваемых условиях можно решить другим, более простым путем, основываясь на временных рядах изменения значений признаков состояний. Временные ряды, представляющие поведение системы, образуются не состояниями s, а наблюдаемыми четкими выходными переменными x, что обуславливает необходимость определения соответствия состояний и выходных переменных в рамках системной зависимости (2).

Для построения уравнения наблюдения (2) в рассматриваемых предметных областях часто применяют экспертные методы, например [8], комбинации экспертного и критериального подхода, например [9–12], методы, основанные на нечеткой логике, например [13–15]. Методы нечеткой логики позволяют осуществлять автоматический переход от числовых рядов выходных значений x к нечетким рядам лингвистических переменных (кластеров, паттернов, сегментов), которые можно интерпретировать как состояния, заданные в нечеткой форме. Примеры применения таких методов можно найти в работах [16, 20]. Однако, указанные методы не позволяют получить формализованное соответствие между вектором распределения вероятностей состояний p в терминах марковских цепей и наблюдаемыми выходами x многомерных временных рядов. Наличие такого соответствия следует из того, что дискретная цепь Маркова с лингвистическими состояниями и нечеткий временной ряд суть разные формы отображения динамики одного и того же процесса. Помимо динамики состояний системы в переходных процессах дискретные цепи Маркова позволяют определять стационарные состояния системы, т. е. состояния с неизменными вероятностями. Применительно к рассматриваемым предметным областям стационарные состояния целесообразно определять термином «статус» понимая его как совокупность стабильных внутренних характеристик системы, определяющий ее ранг, положение на заданном временном промежутке. Компоненты вектора p стационарного состояния цепи Маркова рассматриваются как предельные вероятностные характеристики исследуемых состояний. Динамические состояния в переходных процессах в каждый момент времени зависят от своих начальных условий, определяемых непосредственно предшествующими состояниями и случайными воздействиями, не всегда наблюдаемыми. Наличие случайных воздействий влечет изменение поведения системы, но никак не влияет на ее статус, который определяется исключительно матрицей $\mathbf{M}$. Случайные воздействия хорошо интерпретируются в рассматриваемых предметных областях. Здоровый человек съел неподходящую пищу и на короткое время его характеристики отображают нездоровье (переход к стационарному статусу будет происходить, но из других начальных условий). Способный обучающийся, в силу обстоятельств, пропустил занятия и получил плохую оценку. Но это не помешает ему оставаться потенциально способным и вернуться в свой стационарный статус. Предприятие банкрот может совершить одну удачную сделку, но это не спасает ее от банкротства. Результаты случайных воздействий отображаются на временных рядах x и экспертная оценка статуса может привести к серьезным ошибкам.

Целью исследования является оценка статуса рассматриваемой системы на основе разработки дискретной цепи Маркова для нечетких случайных состояний по наблюдаемым значениям признаков системы. Для достижения цели необходимо: определить понятия нечеткого случайного состояния, нечеткого случайного события; построить модель системы, конкретизирующую теоретико-множественные выражения (1) и (2) и получить стационарные распределения вероятностей состояний. Также необходимо провести численную апробацию модели, подтверждающую ее адекватность.

1. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1. Построение временного ряда нечетких состояний и вычисление вероятности нечеткого случайного события

На начальном этапе исследований принято упрощающее допущение: многомерные временные ряды значений признаков состояний заменяются одним временным рядом. Это может быть достигнуто, например, с помощью той или иной формы агрегирования. Такое допущение обеспечило разработку методики построения модели цепи Маркова в пространстве нечетких состояний для частного случая — скалярного признака состояния.

В процессе исследования ключевыми понятиями являются «нечеткое состояние системы», «нечеткое соответствие скалярного признака и состояния», «лингвистическая шкала состояний», «нечеткие события», определяемые как переход системы из одного состояния в другое. Эти понятия нуждаются в детальной формализации.

Определение 1. Нормальное нечеткое подмножество с именем $\tilde{x}_i$, $i = 1;\ldots;s$ на универсальном множестве значений признаков $X = \{x\}$ будем называть нечетким состоянием системы и задавать треугольной функцией принадлежности $\mu_{\tilde{x}i}(x)$.

Определение 2. Под лингвистической переменной, S с именем «Статус системы», будем понимать лингвистическую переменную с заданным конечным терм-множеством состояний $\{\tilde{x}_1;...;\tilde{x}_s\}$, семантика которых определяется с помощью совокупности функций принадлежности $\{\mu_{\tilde{x}i}(x)\}$.

Определение 3. Лингвистической шкалой состояний системы на универсальном множестве X будем называть упорядоченное множество нечетких состояний $\tilde{x}_i$, таких, что если $i<j$, то $\tilde{x}_i$ предшествует $\tilde{x}_j$ $(\tilde{x}_i \prec \tilde{x}_j)$ [21]. Примерный вид лингвистической шкалы показан на рис. 1.

Определение 4. Нечетким соответствием $C: X \rightarrow \{\tilde{x}_i | \mu_{\tilde{x}i}(x)\}$ будем называть соответствие значения признака, $x \in X$ и нечеткого состояния $\tilde{x}_i$, с уровнем соответствия, определяемым значением функции принадлежности $\mu_{\tilde{x}i}(x)$. В общем случае нечеткое соответствие неоднозначно, одному значению x может соответствовать несколько нечетких состояний $\tilde{x}_i$ со своими значениями функций принадлежности. Пример неоднозначности нечеткого соответствия показан на рис. 1.

Цепи Маркова описывают динамику изменения состояний, следовательно, нечеткое соответствие значения признака и нечеткого состояния также потребуется определять в динамике. Поэтому необходимо рассматривать временной ряд значений признака — $(x^0;x^1;...;x^t;...)$, где индекс t означает дискретное время. На основе определенного выше нечеткого соответствия, временной ряд значений признака формирует временной ряд нечетких состояний. Следуя [15], будем называть такой ряд нечетким временным рядом, т. е. упорядоченной в равноотстоящие моменты времени последовательностью наблюдений над некоторой системой со случайно изменяющимися состояниями, если значение состояния в момент времени t может быть выражено с помощью нечеткой переменной $\tilde{x}$.

Классические подходы к моделированию нечетких временных рядов имеют своей целью построение систем нечетких продукционных правил или реляционных уравнений [15–18, 20, 22–26]. Наша задача — построение модели нечеткого временного ряда в форме цепи Маркова. Для решения этой задачи целесообразно воспользоваться основными этапами известных методик, добавляя при этом необходимую случайную компоненту.

Рассмотрим основные этапы предлагаемой методики моделирования. Для построения модели нечеткого временного ряда необходимо задать лингвистическую шкалу в виде упорядоченного набора термов $(\tilde{x}_1;\tilde{x}_2;...;\tilde{x}_s)$, как показано на рис. 1. Делается это следующим образом [23]. Выбирается непрерывный отрезок $[a;b] \subseteq X$, так чтобы в этот отрезок попадали все возможные значения уровней x^t рассматриваемого сегмента временного ряда. Производится нечеткое разбиение $[a;b]$, то есть задается терм-множество состояний $(\tilde{x}_1;\tilde{x}_2;...;\tilde{x}_s)$, отвечающих следующим допущениям:

– функции принадлежности $\mu_{\tilde{x}}(x)$ строятся в классе треугольных, нормированных функций с модой равной единице и нулевыми значениями на концах носителя;

– для обеспечения равномерного покрытия $[a;b]$, носители смежных функций принадлежности $\mu_{\tilde{x}i}(x)$ выбираются и располагаются на множестве $[a;b]$ в виде пересекающихся промежутков так, чтобы в точках пересечений, x^* выполнялось равенство $\mu_{\tilde{x}i-1}(x^*) = \mu_{\tilde{x}i}(x^*) = 0,5$.

Примерный вид лингвистической шкалы показан на рис. 1.

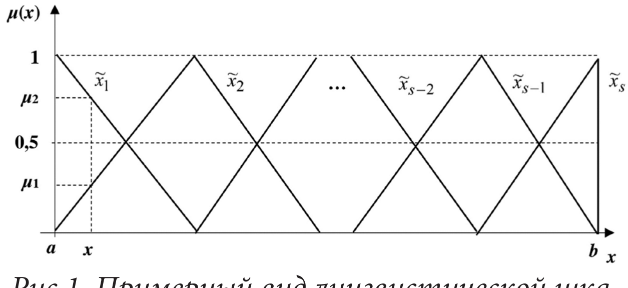

Рис.1. Примерный вид лингвистической шкалы и пример неоднозначности соответствия [Fig. 1. Approximate view of a linguistic scale and an example of ambiguity of correspondence]

Пусть имеется временной ряд значений признака $x^t = (x^0;x^1;...;x^n)$, уровни которого заданы дискретными значениями или интервалами (в случае непрерывного x) на промежутке $[a;b]$ и определена лингвистическая шкала, содержащая необходимое и достаточное число термов для описания нечетких состояний.

Нечеткий временной ряд состояний формируется на основе введенного понятия нечеткого соответствия $C: X \to \{\tilde{x}_i | \mu_{\tilde{x}i}(x)\}$, которое устанавливается в каждый момент времени t. Будем последовательно подставлять значения x^t во все функции принадлежности $\mu_{\tilde{x}i}(x^t)$; $i = 1,...,s$; $t = 0,...,n$ и отмечать те состояния, значения которых будут отличны от нуля. Отмеченные функции принадлежности, в силу неоднозначности соответствия C, определят нечеткий вектор нечетких состояний, сформированный в момент времени t:

$$\tilde{X}^t = (\tilde{x}_i^t | \mu_{\tilde{x}i}(x^t) \neq 0, i = 1;...;k). \qquad (4)$$

Выражение (4) устанавливает соответствие обратное соответствию (2) и может рассматриваться как уравнение наблюдения.

Таким образом, изменения во времени значений признака x задает динамику изменения нечетких состояний в виде случайной последовательности векторов $(\tilde{X}^1;...;\tilde{X}^t;...)$. Если принять, что временной ряд значений признака обладает марковским свойством, то случайная последовательность нечетких состояний, в силу принятого алгоритма ее формирования, также будет отвечать свойству марковости. В этом случае, следуя классическим методикам, в частности работам [25, 26], можно утверждать, что за предыдущим состоянием $\tilde{x}_i^{t-1} \in \tilde{X}^{t-1}$ с определенной вероятностью будет следовать состояние $\tilde{x}_j^t \in \tilde{X}^t$, а, следовательно, на множестве состояний, можно ввести нечеткое отношение $R_{ij}(t-1,t) = (\tilde{x}_i^{t-1}, \tilde{x}_j^t)$, которое формально представимо с помощью нечеткой импликации $\tilde{x}_i^{t-1} \to \tilde{x}_j^t$. Такое нечеткое отношение будем рассматривать как нечёткое событие, поскольку оно формализует переход между состояниями.

Следует обратить внимание на появление в момент времени t сразу нескольких нечетких событий, определяемых прямым произведением нечетких векторов $R^{t-1,t} = \tilde{X}^{t-1} \times \tilde{X}^t$. Тогда каждое бинарное отношение, определяемое таким прямым произведением, будет записываться в виде $\tilde{x}_i^{t-1} \to \tilde{x}_j^t | \mu_{ij}$, где значение функции принадлежности задается следующим выражением:

$$\mu_{ij} = \min\left(\mu_{\tilde{x}i}; \mu_{\tilde{x}j}\right). \qquad (5)$$

Наблюдаемые признаки состояния x обычно рассматриваются как случайные величины, вследствие случайности факторов их формирующих и (или) наличия погрешностей наблюдения. Следовательно, событие, состоящее в том, что наблюдаемый признак принял конкретное значение x^t, является случайным и характеризуется вероятностью $p(x^t) \in [0;1]$. Поскольку нечеткое событие смены состояний задается с участием x^t, его также следует рассматривать как случайное событие. Сочетание двух разнородных видов неопределенности: нечеткости и случайности, встречается во многих исследованиях, например, [7, 27–31] и требует введения понятия нечеткого вероятностного пространства.

Согласно [31], нечеткое вероятностное пространство определяется тройкой $(\Omega, \sigma(\Omega), P(\tilde{A}))$, где Ω — множество нечетких случайных событий; $\sigma(\Omega) \subset 2^{\Omega}$ — сигма-алгебра на множестве Ω; $P(\tilde{A})$ — вероятность нечеткого случайного события $\tilde{A} \in 2^{\Omega}$. Нечеткое вероятностное пространство является обобщением классического вероятностного пространства.

Определение 5. Нечетким элементарным случайным событием $\tilde{A}_{ij}^{э} = (\tilde{x}_i^{t-1} \to \tilde{x}_j^t) | \mu_{ij}$ будем называть случайное событие перехода системы из нечеткого состояния $\tilde{x}_i$ в нечеткое состояние $\tilde{x}_j$ в момент времени t со степенью уверенности μ_{ij}. Случайный характер события $\tilde{A}_{ij}^{э}$ обусловлен случайной последовательностью значений признака; нечеткий характер $\tilde{A}_{ij}^{э}$ придает нечеткое отношение, импликация — $(\tilde{x}_i^{t-1} \to \tilde{x}_j^t) | \mu_{ij}$.

Заметим, что нечеткие соответствия C в различные смежные моменты времени могут порождать однородные (в смысле неизменности значения пары ij) импликации, но, в общем случае, с различными значениями функции принадлежности:

$$\tilde{A}_{ij} = \{(\tilde{x}_i^{t_1-1} \to \tilde{x}_j^{t_1}) | \mu_{ij}^1; \ldots \\ \ldots; (\tilde{x}_i^{t_k-1} \to \tilde{x}_j^{t_k}) | \mu_{ij}^k\}. \qquad (6)$$

Определение 6. Нечеткое событие $\tilde{A}_{ij}$ будем называть составным событием, которое отображает все однородные переходы $\tilde{x}_i \to \tilde{x}_j$ на заданном промежутке временного ряда, но с различными значениями функций принадлежности — $U_k(\tilde{x}_i \to \tilde{x}_j)\big|\mu_{ij}^{kij}$.

Л. Заде [26] определил вероятность нечеткого события $\tilde{A}$ относительно распределения $p(\tilde{A})$ в виде следующего выражения:

$$P(\tilde{A}_{ij}) = \sum\nolimits_k p(\tilde{A}_{ij}^{эk})\mu_{ij}^k, \tag{7}$$

которое можно интерпретировать как взвешенное среднее вероятностей нечетких элементарных случайных событий, где в качестве весов выступают функции принадлежности переходов из состояния в состояние на заданном промежутке временного ряда.

Оценку распределения вероятностей $p(\tilde{A}_{ij}^{эk})$ можно получить, основываясь на понятии статистической вероятности. С этой целью представим все возможные нечеткие случайные события на множестве нечётких состояний $(\tilde{x}_1;\tilde{x}_2;...;\tilde{x}_s)$ в виде матрицы размерности $s \times s$:

$$\begin{pmatrix} U_{k11}(\tilde{x}_1 \to \tilde{x}_1)\big|\mu_{11}^{k11} & \dots & U_{k1s}(\tilde{x}_1 \to \tilde{x}_s)\big|\mu_{1s}^{k1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ U_{ks1}(\tilde{x}_s \to \tilde{x}_1)\big|\mu_{s1}^{ks1} & \dots & U_{kss}(\tilde{x}_s \to \tilde{x}_s)\big|\mu_{ss}^{kss} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Элементами матрицы (8) являются объединения всех, полученных в результате наблюдений, однородных нечетких событий. Обозначим максимальное значение индекса k_{ij} как K_{ij} — количество однородных событий в объединении ij. Нетрудно заметить, что каждая строка матрицы (8) содержит полную группу событий. Количество элементарных нечетких событий в каждой строке матрицы (8) равно $K_i = \sum_{j=1}^{s} K_{ij}$ для всех i. Выделим в составе каждого однородного объединения ij повторяющиеся элементарные события с одинаковыми значениями μ_{ij}^k. Обозначим количество таких повторов как K_{ij}^{μ}. Тогда частость или статистическая вероятность элементарного события $\tilde{A}_{ij}^{э} = (\tilde{x}_i^{t-1} \to \tilde{x}_j^t)\big|\mu_{ij}$ в полной группе событий вычисляется отношением:

$$w(\tilde{A}_{ij}^{эk}) = p(\tilde{A}_{ij}^{эk}) = \frac{K_{ij}^{\mu}}{K_i}. \tag{9}$$

Выражение (9) позволяет рассчитывать вероятности (7) для элементов матрицы (8). Матрица вероятностей, соответствующая матрице (8) будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} P(\tilde{A}_{11}) & \dots & P(\tilde{A}_{1s}) \\ \dots & \dots & \dots \\ P(\tilde{A}_{s1}) & \dots & P(\tilde{A}_{ss}) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

1.2. Цепь Маркова нечетких случайных событий и определение статуса системы

Вероятности нечетких случайных событий $P(\tilde{A}_{ij})$ можно было бы рассматривать как элементы стохастической матрицы переходов в выражении (3), но эти вероятности, вообще говоря, не удовлетворяют обязательному условию:

$$\forall\, i\, (\sum\nolimits_j P_{ij} = 1). \tag{11}$$

Условие (11) будет выполняться после следующей нормировки P_{ij}:

$$\forall\, i \left(P_{ij} = \frac{P(\tilde{A}_{ij})}{\sum_j P(\tilde{A}_{ij})} \right). \tag{12}$$

Теперь полученные значения p_{ij} можно рассматривать как элементы стохастической матрицы переходов в (3) и интерпретировать как вероятности случайных нечетких событий — переход из нечеткого состояния $\tilde{x}_i$ в нечеткое состояние $\tilde{x}_j$. С точки зрения формальных обозначений дискретная модель цепи Маркова случайных нечетких состояний ничем не отличается от классической записи:

$$\begin{pmatrix} p_1^{t+1} \\ \dots \\ p_s^{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{s1} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{1s} & \dots & p_{ss} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1^t \\ \dots \\ p_s^t \end{pmatrix} \tag{13}$$

с начальным условием $(p_1^0,...,p_s^0)^T$.

Вернемся к исходной задаче. Дискретные цепи Маркова можно использовать для предсказания состояний системы в некоторый момент времени или для вычисления стационарных состояний системы, которые можно рассматривать как ее внутреннюю характеристику, статус системы. Исследуемая система, как правило, испытывает внешние воздействия, которые вызывают изменения состояний системы. Внешние воздействия можно разделить на два типа. Первый тип — случайные, плохо контролируемые воздействия в каждый момент времени t, вызывающие изменения предшествующих состояний $\mathbf{p}^t$, то есть $\mathbf{p}^{t+1} = \mathbf{M}^t \mathbf{p}^t$, где $\mathbf{p}^t$ является результатом аддитивного влияния предшествующего вычисления по рекуррентной процедуре в момент времени t и некоторого случайного воздействия. Второй тип — управляющие воздействия, вызывающие изменения матрицы переходов. Будем считать, что на заданном интервале временного ряда наблюдаемых значений выходной переменной системы, x имеются только воздействия первого типа, обуславливающие случайные изменения этих значений. Очевидно, что в этом случае случайным изменениям будут подвержены и нечеткие состояния $\tilde{x}_i^t$. Поскольку матрица переходов на рассматриваемом временном промежутке не изменяется, можно определить стационарные состояния или статус системы на этом промежутке.

Для определения статуса системы, т. е. определения вероятностей ее стационарных состояний $\mathbf{p}^c = (p_1^c; p_2^c; ...; p_s^c)$, необходимо решить систему (13) с условием стационарности, которое записывается в виде $\mathbf{p}^{t+1} = \mathbf{p}^t$. В результате система (13) приобретает вид системы однородных линейных уравнений:

$$\begin{cases} \left(p_{11} - 1\right) p_1^c + ... + p_{s1} p_s^c = 0, \\ \qquad \qquad \dots \\ p_{1s} p_1^c + ... + \left(p_{ss} - 1\right) p_s^c = 0 \end{cases} \qquad (14)$$

или в матричном виде $(\mathbf{M}^T - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{p}^c = 0$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Для получения нетривиальных решений систему (14) обычно переписывают с заменой одного уравнения на уравнение нормировки, $p_1^c + p_2^c + ... + p_s^c = 1.$ Если определитель системы, полученной в результате замены, отличен от нуля, то решение в виде вектора $(p_1^c; p_2^c; ...; p_s^c)$ рассматривается как статус системы, то есть характеристика системы на рассматриваемом промежутке времени.

Полученные в этом разделе результаты будем рассматривать как методику построения цепи Маркова для нечетких состояний.

2. ЧИСЛЕННАЯ АПРОБАЦИЯ ЦЕПИ МАРКОВА ДЛЯ НЕЧЕТКИХ СОСТОЯНИЙ

Задачей численной апробации является проверка адекватности методики построения цепи Маркова для нечетких состояний в аспекте оценки статуса исследуемой системы. Численная апробация предложенной цепи Маркова для нечетких состояний рассматривалась на примере состояния обучающегося по определенной учебной дисциплине после окончания текущего семестра.

Рассматривалась лингвистическая переменная «Уровень освоения дисциплины», значение которой влияет на принятие решения о переводе на следующий семестр. Шкала лингвистической переменной задана четырьмя нечеткими состояниями: $\tilde{x}_1$ — «неудовлетворительно», $\tilde{x}_2$ — «удовлетворительно», $\tilde{x}_3$ — «хорошо», $\tilde{x}_4$ — «отлично». Оценка состояния обучающегося производилась на основе наблюдений за итогами локальных испытаний, проводимых в течение текущего семестра. Итоги локальных испытаний оценивались по десятибалльной шкале — (1; 2;…; 10).

Для каждого нечеткого состояния эксперт, например деканат, определяет треугольную функцию принадлежности, задающую состояние. Лингвистическая шкала нечетких состояний, показана на рис. 2.

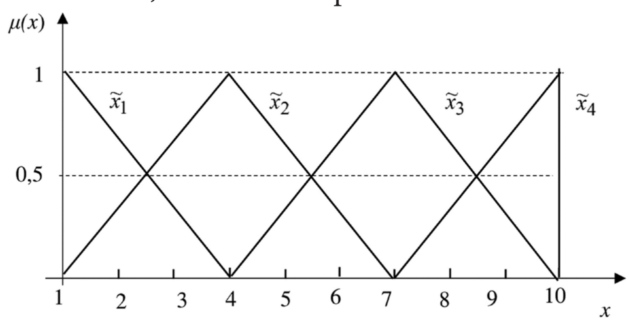

Рис. 2. Лингвистическая шкала нечетких состояний системы оценивания успеваемости обучающегося
[Fig. 2. Linguistic scale of fuzzy states of the student's progress assessment system]

Пусть временной ряд локальных оценок, полученных обучающимся по отдельным разделам дисциплины в течение семестра, имеет следующий вид:

$x = (x^1; x^2; ...; x^{12}) = (5; 6; 6; 5; 6; 6; 5; 6; 6; 5; 6; 6).$

Такой временной ряд можно считать стационарным. Среднее значение уровней ряда составит:

$$\overline{x} = \frac{1}{12}\sum\nolimits_i x_i = 5,67.$$

Видно, что обучающийся учился почти стабильно с минимальным разбросом оценок в середине шкалы. Обычный подход к оценке статуса студента при условии равнозначности полученных локальных оценок состоит в ориентации на средний балл, в данном случае этот балл — 5,67.

Предлагаемая методика оценки статуса, в данном случае статуса обучающегося, состоит в получении стационарного состояния распределения вероятностей состояний лингвистической шкалы «Уровень освоения дисциплины». Если оцифровать лингвистическую шкалу, задав следующие часто употребляемые соответствия: «неудовлетворительно» — 2; «удовлетворительно» — 3; «хорошо» — 4; «отлично» — 5, то при заданном распределении вероятностей можно вычислить среднее значение состояния. Здесь надо иметь в виду, что средние значения дискретных величин всегда определяются на непрерывной шкале. Например, при равномерном распределении состояний рассматриваемой лингвистической шкалы, среднее значение состояний составит 3,5. Это интерпретируется как промежуточное состояние, которое можно с равной долей уверенности отнести как к состоянию «удовлетворительно» так и к состоянию «хорошо». Но с полной уверенностью полученное промежуточное состояние нельзя отнести к состояниям «неудовлетворительно» или «отлично».

В таком случае появляется возможность сравнения средних значений временного ряда локальных оценок и средних значений нечетких состояний. Для этого только необходимо установить соответствие измерительных шкал средних значений. Линейное соответствие шкал легко построить на основании соответствий начала и конца каждой шкалы. В данном случае линейное соответствие шкалы [1; 10] и шкалы [2; 5] будет иметь вид:

$$\overline{x}^{[2;5]} = \frac{1}{3}\cdot\overline{x}^{[1;10]} + \frac{5}{3}. \qquad (15)$$

Логично предположить, что среднее стационарного временного ряда и среднее стационарных состояний должны совпадать с учетом введенного соответствия.

Рассчитаем среднее стационарных состояний по предложенной в разделе 1 методике для рассматриваемого временного ряда. Матрица вероятностей переходов будет иметь вид:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,42 & 0,58 & 0 \\ 0 & 0,48 & 0,52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая система уравнений (14) примет вид:

$$\begin{cases} (0,42-1)\,p_2^c + 0,48p_3^c = 0, \\ p_2^c + p_3^c = 1. \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений дает следующий вектор стационарных состояний $\mathbf{p}^c = \{0; 0,45; 0,55; 0\}$. Среднее стационарных состояний равно:

$$\overline{x}^{мар} = 0\cdot 2 + 0,45\cdot 3 + 0,55\cdot 4 + 0\cdot 5 \approx 3,56.$$

Полученное значение будем рассматривать как числовую характеристику статуса.

Приведенное по соответствию (15) значение среднего временного ряда локальных оценок составит:

$$\overline{x}^{[2;5]} = \frac{1}{3}\cdot 5,67 + \frac{5}{3} = 3,5566 \approx 3,56.$$

Как видно, среднее стационарного временного ряда и среднее стационарных состояний практически совпали. Этот факт можно рассматривать как экспериментальное подтверждение адекватности предложенной методики. В то же время, такие совпадения не должны давать повод для сомнений в актуальности применении цепей Маркова для нечетких состояний с их громоздкими вычислениями статуса. Вычисления статуса как среднего значения ряда показателей происходит в статике, без учета динамических особенностей формирования статуса. Примером может служить два нестационарных временных ряда локальных оценок по разделам учебной дисциплины: возрастающий ряд оценок $x = (2; 3; 3; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 8; 9; 10)$ и убывающий ряд $x = (10; 9; 8; 7; 6; 6; 5; 5; 4; 3; 3; 2)$. Легко заметить, что оба ряда имеют одно и то же среднее значение, совпадающее со средним стационарного ряда 5,67.

Цепь Маркова для нечетких состояний, учитывает динамику и позволяет получить более адекватную числовую оценку статуса.

Для приведенных возрастающего и убывающего временного ряда признаков по предложенной методике рассчитаем элементы матриц вероятностей переходов. Для возрастающего ряда матрица переходов будет иметь вид:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,34 & 0,25 & 0 \\ 0,22 & 0,32 & 0,28 & 0,19 \\ 0 & 0,24 & 0,38 & 0,39 \\ 0 & 0 & 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}.$$

Аналогичная матрица для убывающего ряда будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,60 & 0,40 & 0 & 0 \\ 0,34 & 0,36 & 0,30 & 0 \\ 0,18 & 0,26 & 0,32 & 0,24 \\ 0 & 0,20 & 0,39 & 0,41 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие системы уравнений типа (14) примут вид:

– для возрастающего ряда

$$\begin{cases} (0,42-1)\, p_1^c + 0,22 p_2^c = 0, \\ 0,34 p_1^c + (0,32-1)\, p_2^c + 0,24 p_3^c = 0, \\ 0,25 p_1^c + 0,28 p_2^c + (0,38-1)\, p_3^c + 0,39 p_4^c = 0, \\ p_1^c + p_2^c + p_3^c + p_4^c = 1. \end{cases}$$

– для убывающего ряда

$$\begin{cases} (0,60-1)\, p_1^c + 0,34 p_2^c + 0,18 p_3^c = 0, \\ 0,40 p_1^c + (0,36-1)\, p_2^c + 0,26 p_3^c + 0,2 p_4^c = 0, \\ 0,3 p_2^c + (0,32-1)\, p_3^c + 0,39 p_4^c = 0, \\ p_1^c + p_2^c + p_3^c + p_4^c = 1. \end{cases}$$

Решение этих уравнений дает стационарное распределение вероятностей состояний:

– для возрастающего ряда:

$$\mathbf{p}^c = \{0,06;\ 0,15;\ 0,36;\ 0,43\};$$

– для убывающего ряда:

$$\mathbf{p}^c = \{0,38;\ 0,34;\ 0,20;\ 0,08\}.$$

Среднее стационарных состояний:

– для возрастающего ряда:

$$\overline{x}^{мар} = 0,06 \cdot 2 + 0,15 \cdot 3 + 0,36 \cdot 4 + 0,43 \cdot 5 = 4,17;$$

– для убывающего ряда:

$$\overline{x}^{мар} = 0,38 \cdot 2 + 0,34 \cdot 3 + 0,20 \cdot 4 + 0,08 \cdot 5 = 2,98.$$

Полученные результаты существенно различаются и хорошо соответствуют здравому смыслу. Действительно возрастающий ряд всегда будет иметь стационарное состояние больше своего среднего значения, у убывающего ряда, наоборот — среднее значение будет больше стационарного состояния.

Учет динамики, присущий цепям Маркова позволяет более адекватно оценивать статус обучающегося.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований разработана методика построения однородной цепи Маркова для системы с нечеткими состояниями, основанная на обработке данных временных рядов выходов системы. В отличие от известных нечетких цепей Маркова [5–7] переходная матрица не рассматривается как нечеткое отношение, а остается обычной стохастической матрицей. Такой подход позволяет получать стационарные состояния системы, которые характеризуют ее статус на некотором заданном временном промежутке. Эта информация может использоваться в системе поддержки принятия решений по целенаправленному изменению статуса.

Особенностью полученной цепи Маркова для нечетких состояний системы является возможность учета динамики изменения состояний системы при расчете средних значений статуса, в отличии от широко применяемой ориентации на усреднения, основанной на вычислении средних арифметических.

Приводятся численные эксперименты с построенной цепью Маркова для нечетких состояний, которые подтверждают ее адекватность и возможности учета динамики. Эксперименты приведены на примере оценки статуса обучающегося в системе образования. Но применение предлагаемой методики оценки статуса в других системах — социальных, экономических и т. п., может принести не менее, а возможно более значимый эффект.

Представленная статья посвящена только описанию новой методики построения цепи Маркова для нечетких состояний. Безусловно, пока остается без обсуждения множество вопросов, например, связанных с поведением систем при различных структурах заполнения матриц переходов, существованием и единственностью стационарных состояний и т. д. Ответы на эти вопросы предмет наших дальнейших исследований.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калман, Р.* Очерки по математической теории систем. Пер. с англ. / Р. Калман, П. Фарб, М. Арбиб. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 400 с.

2. Теория систем и системный анализ в управлении организациями: Справочник. / Под ред. В. Н. Волковой и А. А. Емельянова. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 848 с.

3. *Перегудов, Ф. И.* Введение в системный анализ / Ф. И. Перегудов, Ф. П. Тарасенко. – М. : Высш. шк., 1989. – 367 с.

4. *Венцель, Е. С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология / Е. С. Венцель. – М. : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 208 с.

5. *Avrachenkov, K. E.* Fuzzy Markov Chains and Decision-Making / K. E. AvrachenkovElie Sanchez // Fuzzy Optimization and Decision Making 1(2). – 2002. – P. 143–159. DOI: 10.1023/A:1015729400380

6. *Guangming, L.* Fuzzy Markov chains based on the fuzzy transition probability / L. Guangming, X. Baoxin // 26th Chinese Control and Decision Conference (CCDC) 978-1-4799-3708-0, 2014 IEEE. DOI:10.1109/CCDC.2014.6852945.

7. *Полещук, О. М.* Нечетко-вероятностные пространства и вероятность нечетких событий / О. М. Полещук // Лесной вестник. – 2014. – № 4. – С. 162–169.

8. *Бурсиков, А. В.* Оценка общего состояния пациента в амбулаторных условиях. / А. В. Бурсиков, М. В. Александров, Т. И. Рупасова // Вестник Ивановской медицинской академии.– 2009. – Т. 14, № 4. – С. 51–54.

9. *Залещанский, Б. Д.* Вероятностно-статистические стратегии обеспечения подготовки персонала социотехнических систем / Б. Д. Залещанский, А. П. Свиридов, О. А. Шаболина, Е. А. Шаболина // Информационные технологии. – 2013. – № 8. – С. 67–70.

10. *Шеремет, А. Д.* Анализ и диагностика финансово-хозяйственной деятельности предприятия: учебник / А. Д. Шеремет. – 2-е изд., доп. – М. : ИНФРА-М, 2020. – 374 с.

11. *Ефимова, О. В.* Финансовый анализ: современный инструментарий для принятия экономических решений / О. В. Ефимова. – Омега-Л, 2010. – 351 с.

12. *Выгодчикова, И. Ю.* Методика рейтинговой оценки компаний с точки зрения их инвестиционной привлекательности / И. Ю. Выгодчикова, А. В. Трофименко, Н. П. Форкунов // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками. – 2020. – № 5. – С. 50–54.

13. *Хвостов, А. А.* Моделирование процесса обучения курсантов на основе цепей Маркова. Военно-космические силы. Теория и практика / А. А. Хвостов, В.В.Синюков. – 2017. – № 1. – С. 311–316.

14. *Кореневский, Н. А.* Метод классификации функционального состояния человека и оценки уровня его составляющих на основе гибридных нечетких моделей / Н. А. Кореневский, О. И. Филатова, А. А. Бурмака, В. В. Серебровский // Биотехносфера. – 2012. – № 1(19). – С. 41–44.

15. *Ярушкина, Н. Г.* Интеллектуальный анализ временных рядов. / Н. Г. Ярушкина, Т. В. Афанасьева, И. Г. Перфильева. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 320 с.

16. *Batyrshin, I.* Perception Based Time Series Data Mining for Decision Making / I. Batyrshin, L. Sheremetov // IFSA'07Theoretical Advances and Applications of Fuzzy Logic, pp. 209–219. DOI: 10.1007/978-3-540-72434-6_22

17. *Giove, S.* Fuzzy logic and Clustering methods for time series analisys / S. Giove // 2009 In-

ternational Fuzzy Systems Association World Congress and 2009 European Society for Fuzzy Logic and Technology Conference (IFSA-EUSFLAT 2009).

18. *Herbst, G.* Online Recognition of fuzzy time series patterns / G. Herbst, S. F. Bocklish // 2009 International Fuzzy Systems Association World Congress and 2009 European Society for Fuzzy Logic and Technology Conference (IFSA-EUSFLAT 2009).

19. *Ярушкина, Н. Г.* Современный интеллектуальный анализ нечетких временных рядов / Н. Г. Ярушкина // Труды V Международной научно-практической конференции «Интегрированные модели и мягкие вычисления» (Коломна, 20–30 мая 2009 г.). В 2-х т. – М. : Физматлит, 2009. – Т. 1. – С. 19–30.

20. *Леденева, Т. М.* Формирование базы знаний на основе выделения типовых состояний сложной системы / Т. М. Леденева, М. А. Сергиенко, Е. А. Тихомирова // Вестник Воронежского государственного университета, серия «Системный анализ и информационные технологии». – 2020. – № 1. – С. 140–151. DOI: 10.17308/sait.2020.1/2629

21. *Леденева, Т. М.* Обработка нечеткой информации / Т. М. Леденева. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2006. – 233 с.

22. *Kosko, B.* Neural Networks and Fuzzy Systems: a Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence / B. Kosko (Prentice-Hill, 1992).

23. *Perfilieva, I.* Fuzzy transforms: Theory and applications / I. Perfilieva // Fuzzy Sets and Systems, 2006. – № 157. – P. 63–82.

24. *Батыршин, И. З.* Модели и методы перцептивного дата майнинга временных рядов для систем поддержки принятия решений / И. З. Батыршин, Л. Б. Шереметов // Нечеткие системы и мягкие вычисления. – 2007. – Т. 2, № 1.– С. 29–52.

25. *Song, Q.* Forecasting enrollments with fuzzy time series – Part I / Q. Song, B. Chissom // Fuzzy Sets and Systems. – № 54 (1993) – P. 1–9.

26. *Song, Q.* Forecasting enrollments with fuzzy time series – Part II / Q. Song, B. Chissom // Fuzzy Sets and Systems. – № 64 (1994) – P. 1–8.

27. *Zadeh, L. A.* Probability measures and fuzzy events / L. Zadeh // J. Math. Anal. Appl. 23, 421 427 (1968).

28. *Yager, R.* A note on probabilities of fuzzy events / R. Yager // Information Sci. 128, 113 129 (1979).

29. *Gudder, S.* What Is Fuzzy Probability Theory? / S. Gudder // Foundations of Physics. – 2000. – Vol. 30, No. 10.

30. Encyclopвia of Physical Science and Technology / Meyers R. A. (ed.), 3rd Edition, V. 18. 2001 Academic Press, 2001. – 220 p.

31. *Guixiang, W.* Fuzzy Event Space and Probability Distribution of Probability Fuzzy Space / W. Guixiang, X. Yifeng, Q.Sen // Mathematics. – 2019. – № 7. – P. 542. DOI:10.3390/math7060542.

Матвеев Михаил Григорьевич — д-р техн. наук, заведующий кафедрой информационных технологий управления Воронежского государственного университета.
E-mail: mgmatveev@yandex.ru
ORCID iD: https://orcid/0000-0002-6528-6420

Алейникова Наталья Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий управления Воронежского государственного университета. Тел.: 8-980-342-68-17, E-mail: balbashovan@mail.ru
ORCID iD: https://orcid/0000-0001-5967-8260

Громковский Андрей Анатольевич — канд. техн. наук, доцент кафедры информационных технологий управления Воронежского государственного университета.
E-mail: aag68@bk.ru
ORCID iD: https://orcid/0000-0001-5062-3263

DOI: https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2022/4/119-131 ISSN 1995-5499
Received 11.07.2022
Accepted 05.12.2022

DISCRETE HOMOGENEOUS MARKOV CHAIN FOR FUZZY STATES

© 2022 M. G. Matveev✉, N. A. Aleynikova, A. A. Gromkovskii

Voronezh State University
1, Universitetskaya Square, 394018 Voronezh, Russian Federation

Annotation. As a result of the conducted research, a method for constructing a homogeneous Markov chain for a system with fuzzy states based on processing time series data of system outputs has been developed. Unlike the well-known fuzzy Markov chains, the transition matrix is not considered as a fuzzy relation, but remains an ordinary stochastic matrix. This approach makes it possible to obtain stationary states of the system, which characterize its status at a given time interval. This information can be used in the decision support system for purposeful status changes. A feature of the obtained Markov chain for fuzzy states of the system is the possibility of taking into account the dynamics of changes in the states of the system when calculating the average status values, in contrast to the widely used orientation to averaging based on the calculation of arithmetic averages. Numerical experiments have been carried out with the constructed Markov chain for fuzzy states, which confirm its adequacy and the possibility of taking into account dynamics. The experiments are implemented on the example of assessing the status of a student in the education system.
Keywords: fuzzy random state, fuzzy random event, Markov chain, time series, state estimation.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

REFERENCES

1. *Kalman R. L., Falb P. and Arbib M.* (2004) Essays on the mathematical theory of systems. *Moscow: Mir*.

2. *Volkova V. N. and Emelyanov A. A.* (2006) Systems theory and system analysis in the management of organizations: Guide. *Moscow: Finance and Statistics.*

3. *Peregudov F. I. and Tarasenko F. P.* (1989) Introduction to system analysis. *Moscow: Higher School.*

4. *Wenzel E. S.* (1988) Operations research. Tasks, principles, methodology. Moscow: *Gl. ed. phys.-mat. lit.*

5. *Avrachenkov K. E. and Sanchez E.* (2002) Fuzzy Markov Chains and Decision-Making. *Fuzzy Optimization and Decision Making*. 1(2). P. 143–159. DOI: 10.1023/A:1015729400380

6. *Guangming L. and Baoxin X.* (2014) Fuzzy Markov chains based on the fuzzy transition probability. *26th Chinese Control and Decision Conference (CCDC) 9781479937080, IEEE.* P. 4351–4356. DOI: 10.1109/CCDC.2014.6852945.

7. *Poleshchuk O. M.* (2014) Fuzzy probability spaces and probabilities of fuzzy events. *Forestry Bulletin*. 4. P. 162–169

8. *Bursikov A. V., Aleksandrov M. V. and Rupasova T. I.* (2009) Evaluation of patient general status in out-patient practice. *Bulletin of the Ivanovo Medical Academy.* 14(4). P. 51–54.

9. *Zaleshchansky B. D., Sviridov A. P., Shabolina O. A. and Shabolina E. A.* (2013) Probabilistic and statistical strategies for ensuring the training of personnel of sociotechnical systems. *Information technologies*. 8. P. 67–70.

10. *Sheremet A. D.* (2020) Analysis and diagnostics of financial and economic activity of the enterprise: textbook. *Moscow: INFRA-M*.

11. *Efimova O. V.* (2010) Financial analysis: modern tools for making economic decisions. *Omega-L*.

✉ Matveev Mikhail G.
e-mail: mgmatveev@yandex.ru

12. *Vygodchikova I. Yu., Trofimenko A. V. and Forkunov N. P.* (2020) Methodology of rating evaluation of companies from the point of view of their investment attractiveness. *Mathematical and computer modeling in economics, insurance and risk management*. 5. P.50–54.

13. *Khvostov A. A. and Sinyukov V. V.* (2017) Modeling of the cadet training process based on Markov chains. Military space forces. *Theory and practice*. 1. P. 311–316.

14. *Korenevsky N. A., Filatova O. I., Burmaka A. A. and Serebrovsky V. V.* (2012) Method of classifying the functional state of a person and assessing the level of its components based on hybrid fuzzy models. *Biotechnosphere*. 1(19). P. 41–44.

15. *Yarushkina N. G. Afanasyeva T. V. and Perfilieva I. G.* (2010) Intellectual analysis of time series. *Ulyanovsk: UlSTU*.

16. *Batyrshin I. and Sheremetov L.* (2007) Perception Based Time Series Data Mining for Decision Making. *IFSA'07Theoretical Advances and Applications of Fuzzy Logic*. P. 209–219. DOI: 10.1007/978-3-540-72434-6_22

17. *Giove S.* (2009) Fuzzy logic and Clustering methods for time series analisys. *International Fuzzy Systems Association World Congress and 2009 European Society for Fuzzy Logic and Technology Conference (IFSA-EUSFLAT 2009)*.

18. *Herbst G. and Bocklish S. F.* (2009) Online Recognition of fuzzy time series patterns. *2009 International Fuzzy Systems Association World Congress and 2009 European Society for Fuzzy Logic and Technology Conference (IFSA-EUSFLAT 2009)*.

19. *Yarushkina N. G.* (2009) Modern intellectual analysis of fuzzy time series. *Proceedings of the V International Scientific and Practical Conference «Integrated models and soft computing»* (Kolomna, May 20–30, 2009).

20. *Ledeneva T. M., Sergienko M. A. and Tikhomirova E. A.* (2020) Formation of a knowledge base based on the allocation of typical states of a complex system. *Bulletin of Voronezh State University. Series: System analysis and Information Technologies*. 1. P. 140–151. DOI: 10.17308/sait.2020.1/2629

21. *Ledeneva T. M.* (2006) Processing of fuzzy information. *Voronezh: Voronezh State University*.

22. *Kosko B.* (1992) Neural Networks and Fuzzy Systems: a Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence. *Prentice-Hill*.

23. *Perfilieva I.* (2006) Fuzzy transforms: Theory and applications. *Fuzzy Sets and Systems*. 157. P. 63–82.

24. *Batyrshin I. Z. and Sheremetov L. B.* (2007) Models and methods of perceptual time series data mining for decision support systems. *Fuzzy systems and soft computing*. 1(2). P.29–52.

25. *Song Q. and Chissom* (1993) Forecasting enrollments with fuzzy time series – Part I. *Fuzzy Sets and Systems*. 54. P. 1–9.

26. *Song, Q. and Chissom B.* (1994) Forecasting enrollments with fuzzy time series – Part II. *Fuzzy Sets and Systems*. 64. P. 1–8.

27. *Zadeh L. A.* (1968) Probability measures and fuzzy events. *Math. Anal. Appl*. 23, 421 427.

28. *Yager R.* (1979) A note on probabilities of fuzzy events. *Information Sci*. 128, 113 129

29. *Gudder S.* (2000) What Is Fuzzy Probability Theory? *Foundations of Physics*. Vol. 30, No. 10.

30. *Meyers R. A. (ed.)* (2001) Encyclopвia of Physical Science and Technology. 3rd Edition.V. 18. *Academic Press*.

31. *Guixiang W., Yifeng X. and Sen Q.* (2019) Fuzzy Event Space and Probability Distribution of Probability Fuzzy Space. *Mathematics*. 7. P. 542. DOI: 10.3390/math7060542

Matveev Mikhail G. — Head of the department Information technologies of the Voronezh State University. E-mail: mgmatveev@yandex.ru.
ORCID iD: https://orcid/0000-0002-6528-6420

Aleynikova Natalya A. — Associate Professor of the department Information technologies of the Voronezh State University, Voronezh. E-mail: balbashovan@mail.ru.
ORCID iD: https://orcid/0000-0001-5967-8260

Gromkovskii Andrey A. — Associate Professor of the department Information technologies of the Voronezh State University, Voronezh. E-mail: aag68@bk.ru
ORCID iD: https://orcid/0000-0001-5062-3263