УДК 517.97: 532.526 ISSN 1995-5499
DOI: https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2023/3/143-155
Поступила в редакцию 20.08.2023
Подписана в печать 30.09.2023

ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ НА ОСНОВЕ ОТНОШЕНИЯ СХОДСТВА В НЕЧЕТКОМ МЕТОДЕ РЕЗОЛЮЦИЙ

© 2023 Т. М. Леденева✉, М. В. Лещинская

Воронежский государственный университет
Университетская пл., 1, 394018 Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. В данной статье представлен нечеткий метод резолюций, который базируется на дизъюнктивном силлогизме и применим для рассуждений с неопределенностью в аргументации и выводах. В этом случае степень истинности каждой переменной оценивается числом из промежутка [0,1], а одной из основных проблем является определение условий, которые позволят получить значимый логический вывод. Для построения резолютивного вывода используется степень сходства для пары контрарных литер, которые потенциально могут быть выбраны для построения нечеткой резольвенты. В статье представлены системы аксиом, постулирующие свойства нечетких отношений сходства/несходства между парой нечетких множеств. Каждая из систем отражает определенную комбинацию множеств. На их основе с учетом формального представления нечетких логических связок может быть построено множество скалярных индексов сравнения, поэтому данный результат имеет самостоятельное значение и может использоваться в тех приложениях, где возникает проблема сравнения нечетких множеств или их частного случая — нечетких чисел. В статье приводится обоснование нечеткого метода резолюций с использованием понятия нечеткого условного подмножества. Предложена схема метода, в которой нечеткая резольвента строится на основе сходства выбранных литер. Иллюстративный пример позволяет продемонстрировать возможности метода и подтверждает его применимость для генерации правдоподобных рассуждений в условиях неопределенности.

Ключевые слова: метод резолюций, скалярный индекс сравнения, сходство, нечеткая резольвента.

ВВЕДЕНИЕ

Принцип резолюций является основой для методов машинной логики, в частности, автоматического доказательства теорем и дедуктивного синтеза программ [1]. По существу, он является расширением однолитерального правила M. Davis и N. Putnam [2]. В [3] J. Robinson расширил данное правило на случай произвольных дизъюнктов с любым числом литер. Затем появились различные модификации принципа резолюций [4–11]. Заметим, что метод резолюций относится к синтаксическим методам, поэтому при его использовании возникает проблема представления знаний в различных предметных областях. Неопределенность в аргументации и выводах, которая характерна для неформальных суждений с недостаточно определенными объектами и неоднозначными утверждениями о них, существенно ограничивает применение классического принципа резолюций. Этот факт обусловил необходимость использования нечеткой логики для генерации правдоподобных рассуждений. Важной проблемой в применении нечеткого принципа резолюций, как отмечается в [4, 5], является определение условий, при которых резольвента приводит к значимому логическому выводу. Одним из ключевых свойств вывода, основанного на принципе резолю-

✉ Лещинская Мария Владимировна
e-mail: maria-leshchinskaya@mail.ru

ций, является его способность снижать неопределенность. Именно это свойство было положено в основу определения нечеткой резольвенты, которое было предложено в [4] Lee. Впоследствии данный подход был развит в работах [5, 8, 12 и др.]. В частности, Mukaidono предложил использовать степень доверия для нечеткой резольвенты [5]. Особенностью формул нечеткой логики является то, что степень истинности каждой переменной, а, следовательно, и всей формулы оценивается числом из промежутка $[0,1]$, поэтому при построении резольвенты этот факт должен учитываться. В [13] предложен подход для оценки сходства литер, выбранных в дизъюнктах для построения резольвенты. Очевидно, что если степень сходства превышает некоторый заданный порог, то такую резольвенту имеет смысл считать значимым логическим следствием. В данной статье развивается именно этот подход. В его основе лежит сравнение соответствующих нечетких множеств. В разделе 1 вводятся основные понятия метода резолюций и приводятся определения нечеткой резольвенты. В разделе 2 предложены специальные индексы для сравнения нечетких множеств и приводится схема метода резолюций, основанного на вычислении сходства литер при построении нечеткой резольвенты. В разделе 3 приведен иллюстративный пример, подтверждающий применимость предложенного подхода к построению резолютивного вывода.

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1 Основные понятия метода резолюций

Метод резолюций применяется для решения следующих основных задач: *проверка правильности рассуждений* (заданы формула A и множество гипотез $\{H_1,...,H_n\}$, требуется проверить выводимость (доказуемость) формулы A из заданного множества гипотез); *доказательство, что формула A является теоремой* (в этом случае множество гипотез пустое); *доказательство, что заданное множество формул является противоречивым.*

Переменную x или ее отрицание $\overline{x}$ будем называть литерой, дизъюнкт — это совокупность различных литер, связанных символом дизъюнкции.

Пустой дизъюнкт — это тождественно ложный дизъюнкт, который будем обозначать □.

Введем основные понятия метода резолюций, базируясь на [14].

Пусть $D_1 = D_1' \vee p$, $D_2 = D_2' \vee \overline{p}$ — дизъюнкты, содержащие контрарные литеры p и $\overline{p}$. *Резольвентой* дизъюнктов D_1 и D_2 *по литере* p называется дизъюнкт вида $res_p(D_1, D_2) = D_1' \vee D_2'$.

Для однолитеральных дизъюнктов, состоящих из контрарных литер, имеем пустой дизъюнкт $res(p, \neg p) = \square$.

Резольвентой $res(D_1, D_2)$ дизъюнктов D_1 и D_2 называется резольвента по некоторой литере, при этом если дизъюнкты не содержат контрарных литер, то резольвент у них не существует.

Пусть $S = \{D_1,..., D_N\}$ — множество дизъюнктов. *Резолютивным выводом* из S называется такая конечная последовательность дизъюнктов $\varphi_1,...,\varphi_n$, что для каждого $\varphi_i (i = \overline{1,n})$ выполняется одно из условий: a) $\varphi_i \in S$; b) существуют $j,k < i$ такие, что $\varphi_i = res(\varphi_j, \varphi_k)$.

Согласно теореме о полноте резолюций, множество дизъюнктов S противоречиво в том и только в том случае, когда существует резолютивный вывод из S, заканчивающийся пустым дизъюнктом □. Если множество S не содержит ни одной пары дизъюнктов, допускающих резольвенту, то оно выполнимо.

Метод резолюций представляет собой итерационную процедуру: на каждой итерации в соответствии с некоторой стратегией формируется резольвента, причем данный процесс продолжается до тех пор, пока не будет получен пустой дизъюнкт □, или окажется, что получить новую резольвенту невозможно.

Для подготовки к использованию метода резолюций все исходные логические формулы должны быть приведены к конъюнктивной нормальной форме (КНФ), на основе которой формируется ее теоретико-множественное представление в виде множества дизъюнктов. В исчислении предикатов первого порядка формулы содержат кванторы, поэтому на первом этапе от них необходимо избавиться. Каждая формула должна быть приведена к префиксной нормальной форме, а затем к сколемовской нормальной форме (если имеются кванторы существования). Затем бескванторная формула (матрица) преобразуется в КНФ, и множество дизъюнктов, сформированное на основе КНФ, представляет собой исходную информацию для метода резолюций. Особенностью метода резолюций в исчислении предикатов первого порядка является использование процедуры унификации для контрарных литер.

Целенаправленный выбор дизъюнктов для порождения резольвенты осуществляется на основе различных стратегий [15,16].

1.2. Понятие нечеткой резольвенты

Основное предположение, на основе которого осуществляется переход к нечеткой логике, заключается в том, что множество значений истинности в этом случае включает не пару значений 0 и 1, а промежуток $[0,1]$, при этом логические связки определяются следующим образом:

$$a \vee b = \max\{a,b\},$$

$$a \wedge b = \min\{a,b\},$$

$$\neg a = \overline{a} = 1 - a.$$

Заметим, что для данных операций из основных алгебраических свойств не выполняются только законы комплементарности. Помимо min и max, для формализации связок *и* и *или* могут использоваться соответственно треугольные нормы и конормы [17], которые, по сути, являются обобщенными формами данных связок. С одной стороны, треугольные нормы и конормы обеспечивают гибкость при построении нечетких моделей, в частности, за счет настройки параметров, которыми большинство из них обладает, с другой стороны, для данных операций, помимо комплементарности, не выполняются законы идемпотентности и дистрибутивности, что обусловливает невозможность проведения некоторых преобразований формул.

Каждому элементарному высказыванию x поставим в соответствие значение его истинности $t(x) \in [0,1]$. Чем ближе $t(x)$ к 1, тем в большей степени высказывание x можно считать истинным. Чем ближе $t(x)$ к 0, тем в большей степени высказывание x ложно. Если $t(x) = 0.5$, то высказывание одновременно и истинное, и ложное, а, следовательно, имеем максимальную степень неопределенности.

Пусть $t(x) \in [0,1]$. *Степенью доверия* к $t(x)$ называется величина

$$c_x = 2 \cdot \big(t(x) - 0.5\big) \in [-1,1],$$

а ее модуль $|c_x|$ характеризует уровень определенности высказывания x.

Пусть F — некоторая формула. При заданной интерпретации I значение истинности каждой переменной определяется однозначно. Выбрав подходящую формализацию логических связок, можно получить значение истинности формулы F. Будем говорить, что интерпретация I удовлетворяет (или не удовлетворяет) формуле F, если значение $t_I(F)$ истинности F в интерпретации I не меньше (не больше) 0.5.

Если $F = \{F_1, \ldots, F_m\}$ — множество формул, то $t_I(F) = t_I(F_1 \wedge \ldots \wedge F_m)$.

Пусть $D_1 = p \vee D_1'$, $D_2 = \overline{p} \vee D_2'$. Резольвента $res(D_1, D_2) = D_1' \vee D_2'$ называется *резольвентой Lee* [4], если

$$t(D_1 \wedge D_2) \le t\big(res(D_1, D_2)\big).$$

В [5] упоминается обобщение резольвенты Lee, сопряженное со степенью доверия. Для резольвенты степень доверия вычисляется по формуле

$$c = |c_p| = 2 \cdot \big(\max\{t(p), t(\overline{p})\} - 0.5\big).$$

Пусть $D_1 = p \vee D_1'$ и $D_2 = \overline{p} \vee D_2'$ — дизъюнкты. *Резольвента Mukaidono* [5] дизъюнктов D_1 и D_2, обозначаемая $res(D_1, D_2)_{c_p}$, где c_p — степень доверия к переменной p, вычисляется по формуле

$$res(D_1, D_2)_{c_p} = res(D_1, D_2) \vee (p \wedge \overline{p}),$$

при этом степень ее истинности определяется формулой

$$t\Big(res(D_1, D_2)_{c_p}\Big) =$$

$$= \max\Big\{t\big(res(D_1, D_2)\big), \min\{t(p), t(\overline{p})\}\Big\}.$$

Множество нечетких дизъюнктов невыполнимо тогда и только тогда, когда существует вывод из S пустого дизъюнкта с ненулевой степенью доверия c_p.

Имеет место утверждение [5]: формула невыполнима в нечеткой логике тогда и только тогда, когда она невыполнима в двузначной логике.

Заметим, что резольвента Lee может быть или не быть значимым логическим следствием в зависимости от степени истинности переменной p и посылки $D_1 \wedge D_2$. Данное требование является достаточно жестким и ограничивает применение метода резолюций.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

2.1. Метод резолюций, основанный на сходстве/несходстве

2.1.1. О подходах к сравнению двух нечетких множеств

Проблема сравнения двух нечетких множеств актуальна для многих приложений, в частности, ориентированных на обработку нечетких чисел [18]. В данной статье развивается подход к сравнению нечетких множеств, основанный на анализе их взаимного расположения в «четком» случае [19].

Пусть A, B — обычные подмножества некоторого универсального множества U. При условии, что A и B находятся в общем положении, т. е. пересекаются, можно выделить следующие естественные точки зрения на способы сравнения этих множеств. Измерение сходства множеств A и B сводится к оценке пересечения $A \cap B$, которое характеризует частичное совпадение множеств. Под степенью несовпадения множества A относительно множества B понимается $A \cap \overline{B}$. Аналогично, степень несовпадения B относительно A есть $\overline{A} \cap B$. Тогда под степенью несходства будем понимать оценку симметрической разности $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Теперь предположим, что $F(U)$ — семейство нечетких подмножеств универсального множества U, и $A, B \in F(U)$. Для количественной оценки перечисленных отношений между нечеткими множествами, следуя [19], введем *скалярный индекс сравнения* (scalar comparison index)

$$SCI\left(A, B\right) = f\left(g_1\left(A * B\right), \dots, g_k\left(A * B\right)\right) \in \left[0,1\right],$$

где $*$ — бинарная операция, задающая комбинацию нечетких множеств; g_i — оценочная функция нечеткого множества; f — оператор, обеспечивающий нормализацию.

Нормализация представляет собой линейное преобразование шкалы, при котором область значений любой ограниченной действительной переменной переводится в $[0,1]$.

Под *оценочной функцией* нечеткого множества будем понимать отображение $g: F(U) \to [0,1]$, удовлетворяющее следующим свойствам:

a) $g(\varnothing) = 0$ и $g(U) = 1$;

b) если $A \subseteq B$, то $g(A) \le g(B)$.

Согласно [19], можно определить следующие типы оценочных функций.

Функция g называется *оценочной функцией существования*, если $g(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = \varnothing$, и *универсальной*, если $g(A) = 1$ тогда и только тогда, когда $A = U$.

Заметим, что если g — оценочная функция существования, то $g'(\cdot) = 1 - g(\cdot)$ — универсальная оценочная функция и наоборот.

В предположении, что универсальное множество U является конечным, в качестве оценочных можно рассматривать следующие функции:

$g_{\max}(A) = \max\limits_{x \in U}\{\mu_A(x)\}$ — функция существования, которая не является универсальной;

$g_{\min}(A) = \min\limits_{x \in U}\{\mu_A(x)\}$ — универсальная функция, которая не является функцией существования;

$g_{\Sigma}(A) = \dfrac{1}{|U|}\sum\limits_{x \in U}\mu_A(x)$ — функция, которая одновременно является и универсальной, и функцией существования (здесь под мощностью нечеткого множества понимается $|A| = \sum\limits_{x \in U}\mu_A(x)$, поэтому если $A = U$, то $g_{\Sigma}(A) = 1$; если $A = \varnothing$, то $g_{\Sigma}(A) = 0$; если $A \subset U$, то $g_{\Sigma}(A) \in (0,1)$).

Учитывая перечисленные выше подходы к сравнению нечетких множеств, введем соответствующие количественные оценки.

Если A, B — обычные множества, то $A \subset B$, если любой элемент из A также принадлежит и B, т. е.

$$\forall x\left(\left(x \in A\right) \to \left(x \in B\right)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall x\left(\left(x \in \overline{A}\right) \vee \left(x \in B\right)\right).$$

Под *индексом включения* $I(A,B)$ для нечетких множеств $A, B \in F(U)$ понимается скалярная величина, удовлетворяющая следующим свойствам:

a) $I(A,B)=1$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$, что равносильно условию $\overline{A} \cup B = U$;

b) $I(A,B)=0$ тогда и только тогда, когда $A \cap B = \varnothing$, при этом $\overline{A} \cup B = \overline{A}$;

c) $I(A,B)$ зависит от $g(\overline{A} \cup B)$.

С учетом перечисленных свойств, индекс включения может быть представлен следующим образом:

$$I\left(A,B\right)=\frac{g\left(\overline{A} \cup B\right)-g\left(\overline{A}\right)}{1-g\left(\overline{A}\right)}, \qquad (1)$$

где g — универсальная функция.

Например, если $g = g_{\min}$ и $\cup = \max$, то получим следующую формулу

$$I\left(A,B\right)=$$
$$=\frac{\min\limits_{x\in U}\left\{\max\left\{1-\mu_A\left(x\right),\mu_B\left(x\right)\right\}-\min\left\{1-\mu_A\left(x\right)\right\}\right\}}{1-\min\limits_{x\in U}\left\{1-\mu_A\left(x\right)\right\}}.$$

Если нечеткие множества A и B — нормальные, а, следовательно, $\max\limits_{x\in U}\{\mu_A(x)\}=1$ и $\min\limits_{x\in U}\{1-\mu_A(x)\}=0$, то скалярный индекс включения будет иметь более простой вид

$$I\left(A,B\right)=\min_{x\in U}\max\left\{1-\mu_A\left(x\right),\mu_B\left(x\right)\right\}. \qquad (2)$$

Можно рассматривать несколько подходов к оценке сходства/несходства двух множеств A и B.

1) Подход, основанный на оценке симметрической разности $A\Delta B$, которая включает элементы, принадлежащие только одному из множеств, тогда если $A\Delta B=\varnothing$, то $A\Delta B = A \cup B$ и множества A и B равны, т. е. максимально схожи.

В соответствии с данным подходом под *индексом сходства* будем понимать скалярную величину $Sim(A,B)$, обладающую следующими свойствами:

a) $Sim(A,B)=1$ тогда и только тогда, когда $A\Delta B=\varnothing$;

b) $Sim(A,B)=0$, если $A \cap B=\varnothing$;

c) $Sim(A,B)=Sim(B,A)$.

Перечисленным свойствам соответствует следующая функция:

$$Sim_1\left(A,B\right)=1-\frac{g'\left(A\Delta B\right)}{g'\left(A\cup B\right)}, \qquad (3)$$

где g' — оценочная функция существования.

Учитывая, что $A\Delta B=(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$ и используя классические определения операций $\cap$ и $\cup$, представим

$$\mu_{\overline{A}\cap B}\left(x\right)=\min\left\{1-\mu_A\left(x\right),\mu_B\left(x\right)\right\},$$
$$\mu_{A\cap\overline{B}}\left(x\right)=\min\left\{\mu_A\left(x\right),1-\mu_B\left(x\right)\right\},$$

а затем получим формулу

$$Sim_1\left(A,B\right)=1-\frac{\max\limits_{x}\left\{\mu_{\overline{A}\cap B}\left(x\right),\mu_{A\cap\overline{B}}\left(x\right)\right\}}{\max\limits_{x}\left\{\mu_A\left(x\right),\mu_B\left(x\right)\right\}}. \qquad (4)$$

2) Можно сравнивать дополнительные множества $\overline{A\Delta B}$ и $\overline{A\cup B}$, тогда формула (3) преобразуется к виду

$$Sim_2\left(A,B\right)=\frac{g\left(\overline{A\Delta B}\right)-g\left(\overline{A\cup B}\right)}{1-g\left(\overline{A\cup B}\right)}, \qquad (5)$$

где g — универсальная оценочная функция.

3) Заметим, что

$$A\Delta B=\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)=\varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\overline{A}\cap B=\varnothing,\\ A\cap\overline{B}=\varnothing,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A\cup\overline{B}=U,\\ \overline{A}\cup B=U.\end{array}\right.$$

Из первого условия следует, что $B \subset A$, а из второго — $A \subset B$, тогда при построении индекса сходства можно использовать индекс включения в виде

$$Sim_3\left(A,B\right)=h\left(I\left(A,B\right),I\left(B,A\right)\right), \qquad (6)$$

где функция h должна быть симметричной, а также удовлетворять следующим свойствам: $h(0,0)=0$, $h(x,y)=1 \Leftrightarrow x=y=1$. В качестве h можно использовать, например, $\min$.

Если $I(A,B)=\min\limits_{x\in U}\max\{1-\mu_A(x),\mu_B(x)\}$, то

$$Sim_3\left(A,B\right)=\min\left\{I\left(A,B\right),I\left(B,A\right)\right\}=$$
$$=\min\left\{\begin{array}{l}\min\limits_{x\in U}\max\left\{1-\mu_A\left(x\right),\mu_B\left(x\right)\right\},\\ \min\limits_{x\in U}\max\left\{\mu_A\left(x\right),1-\mu_B\left(x\right)\right\}\end{array}\right\}=$$

$$= \min_{x \in U} \min \begin{Bmatrix} \max\{1-\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \\ \max\{\mu_A(x), 1-\mu_B(x)\} \end{Bmatrix}.$$

4) Можно сравнивать пересечение множеств $A \cap B$ и их объединение $A \cup B$: если $A \cap B = A \cup B$, то множества равны и, следовательно, максимально схожи.

В этом случае под *индексом сходства* будем понимать отображение $Sim' : F(U) \times F(U) \to [0,1]$, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $Sim'(A,B) = 1$ тогда и только тогда, когда $A = B$;

2) если $A \cap B = \varnothing$, то $Sim'(A,B) = 0$;

2) для любых нечетких множеств A и B имеем $Sim'(A,B) \neq 0$ только если одно из множеств не пустое;

3) $Sim'(A,B) = Sim'(B,A)$;

4) если $A \subseteq B \subseteq C$ или $A \supseteq B \supseteq C$, то $Sim'(A,C) \leq \min\{Sim'(A,B), Sim'(B,C)\}$.

Перечисленным свойствам удовлетворяет, например, функция вида

$$Sim'(A,B) = \frac{g(A \cap B)}{g(A \cup B)}, \tag{7}$$

где $g = g_\Sigma$ — скалярная оценочная функция.

Если $g_\Sigma(A) = \frac{1}{|U|}\sum_{x \in U} \mu_A(x)$ и $|A| = \sum_{x \in U} \mu_A(x)$, откуда $g_\Sigma(A) = \frac{|A|}{|U|}$, то

$$Sim'(A,B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}. \tag{8}$$

На основе индекса сходства можно построить индексы для других отношений

a) отрицание сходства $1 - S(A,B)$;

b) несходство $1 - S(\overline{A},\overline{B})$;

c) отрицание несходства $S(\overline{A},\overline{B})$.

Как правило, индексы $S(A,B)$ и $S(\overline{A},\overline{B})$ отражают различную информацию о нечетких множествах, и поэтому в общем случае сходство и отрицание несходства не будут точными синонимами.

Для оценки несходства используется индекс несходства вида $D(A,B) = 1 - S(A,B)$, при этом $D(A,B) = S(\overline{A},B) = S(A,\overline{B})$.

Распространенный подход к формированию индекса несходства основан на понятии функции расстояния [20].

Пусть A, B — нечеткие множества, определенные на одно и том же конечном универсальном множестве U, тогда имеет место расстояние Минковского, вычисляемое по формуле

$$\rho_t(A,B) = \left(\frac{1}{|U|}\sum_{x \in U} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|^t\right)^{1/t},$$

где t — настраиваемый параметр.

В этом случае индекс сходства определяется правилом

$$Sim(A,B) = 1 - \rho_t(A,B). \tag{9}$$

2.1.2. Обоснование метода

Пусть U и V — множества и $f : U \to V$ — некоторое отображение (необязательно однозначное) U в V, так что элементу $x \in U$ соответствует элемент $y \in f(x)$. Пусть A — нечеткое подмножество U с функцией принадлежности μ_A, тогда отображение f индуцирует в V нечеткое множество B с функцией принадлежности μ_B, которая определяется правилом [20]

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \max\limits_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu_A(x)\}, \textit{если } f^{-1}(y) \neq \varnothing; \\ 0, \qquad\qquad \textit{если } f^{-1}(y) \neq \varnothing. \end{cases}$$

Пусть $F(U)$ и $F(V)$ — семейства нечетких подмножеств множеств U и V соответственно. Нечеткое множество $B \in F(V)$ будем называть *условным* на U, и этот факт обозначается в виде $\mu_B(y \| x)$, где $x \in U, y \in V$, если его функция принадлежности зависит от $x \in U$ как от параметра.

Данная функция определяет отображение U в множество нечетких подмножеств, определенных на V. Таким образом, нечеткое подмножество $A \in F(U)$ будет индуцировать нечеткое подмножество $B \in F(V)$ с функцией принадлежности

$$\mu_B(y) = \max_{x \in U}\left\{\min\left\{\mu_B(y\|x), \mu_A(x)\right\}\right\}.$$

Заметим, что каждому нечеткому множеству $A \in F(U)$ отображение f ставит в соответствие нечеткое множество $B \in F(V)$. Такую зависимость можно выразить условным высказыванием «если x равно a, то в соответствии с f значение y равно b», то есть

$y = f(x)$. Понятие условного нечеткого множества играет именно такую роль.

Пусть X, Y — переменные со значениями в $F(U)$ и $F(V)$ соответственно. Условному высказыванию «если $X = A$, то $Y = B$» соответствует нечеткое отношение $R \in F(U \times V)$ между U и V с функцией принадлежности $\mu_R(x, y)$, которое, по сути, играет роль функции $A \underset{R}{\to} B$. Тогда функция принадлежности нечеткого множества $B \in F(V)$ определяется правилом

$$\mu_B\left(y\right) = \max_{x \in U}\left\{\min\left\{\mu_R\left(x, y\right), \mu_A\left(x\right)\right\}\right\}.$$

Это выражение устанавливает другое представление условных нечетких подмножеств.

2.1.3. Схема метода резолюций, основанного на сходстве/несходстве

Пусть $D_1 = P \vee D_1'$, $D_2 = P' \vee D_2'$ — дизъюнкты, $\varepsilon \in [0,1]$ — пороговое значение. Чем ε ближе к 0, тем сильнее подходят для построения резольвенты. Резольвента дизъюнктов $res(D_1, D_2) = D_1' \vee D_2'$ существует тогда и только тогда, когда сходство между $\overline{P}$ и P' не меньше заданного порога ε, т. е. $Sim(\overline{P}, P') \geq \varepsilon$, а $Sim(P, P') \to 0$, но не равное 0. $Sim(P, P') \to 1$ означает, что P близко к P', $Sim(P, P') \to 0$ означает, что P близко к $(1 - P')$ или близко к $\overline{P}$.

Особенностью этого определения является то, что вместо контрарных литер здесь используется понятие сходства/несходства.

Метод резолюций основан на правиле вывода, которое называется *дизъюнктивным силлогизмом* $\dfrac{x \vee y, \overline{y}}{x}$, и имеет вид

$$\frac{\begin{array}{l}\textit{посылка}\ 1: x \vee y\\ \textit{посылка}\ 2: \overline{y}\end{array}}{\textit{заключение}: x}.$$

В предположении, что значениями переменных являются нечеткие множества, в [4] предложено обобщенное правило нечеткой резолюции, которое имеет вид

$$\frac{\begin{array}{l}\textit{посылка}\ 1: x\ \textit{есть}\ A\ \textit{или}\ y\ \textit{есть}\ B\\ \textit{посылка}\ 2: y\ \textit{есть}\ B'\end{array}}{\textit{заключение}: x\ \textit{есть}\ A'}. \quad (10)$$

Здесь нечеткие множества A и A' определены на одном и том же универсальном множестве U, а нечеткие множества B и B' — на универсальном множестве V.

Будем говорить, что дизъюнктивный силлогизм (10) имеет место или *заключение по правилу нечеткой резолюции* имеет место, если B' близко к $\overline{B}$ и A' близко к A [13].

Пусть $Sim(A', A)$ и $Sim(B', \overline{B})$ — степени близости соответствующих нечетких множеств в (10). Под *степенью доверия* схемы будем понимать величину

$$s = Sim\left(A', A\right) \cdot Sim\left(B', \overline{B}\right).$$

Заметим, что посылка 1 и эквивалентные ей формулы формально могут быть представлены нечеткими отношениями $R \in F(U \times V)$ с учетом способов формализации логических связок. Отношение R задает отображение семейства нечетких подмножеств $F(U)$ в семейство нечетких подмножеств $F(V)$. Степень сходства между множеством B и множеством B', которое представлено посылкой 2, используется для модификации отношения R. Тогда для получения заключения A', близкого к A, применяется формула $\forall x \in U$

$$\mu_{A'}\left(x\right) = \max_{y \in V}\left\{\min\left\{\mu_R\left(x, y\right), \mu_{B'}\left(y\right)\right\}\right\}.$$

Сформулируем процедуру для нахождения заключения A'.

1. Пусть $A \in F(U)$, $B \in F(V)$. Учитывая, что $\vee = \max$, посылке 1 поставить в соответствие нечеткое отношение $R \in F(U \times V)$ по правилу $\mu_R(x, y) = \max_{(x,y) \in U \times V}\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$.

2. Для нечетких множеств $\overline{B}$ и B' вычислить индекс сходства $s = Sim(\overline{B}, B')$, используя подходящее определение.

3. Вычислить модифицированное условное отношение $R(A, B \| B')$ с функцией принадлежности

$$\mu_{R(A,B\|B')}\left(x, y\right) = s \to$$

$$\to \mu_{R(A,B)}\left(x, y\right) = \min\left\{s, \mu_{R(A,B)}\left(x, y\right)\right\},$$

где $a \to b \Leftrightarrow \min\{a, b\}$.

4. Используя операцию проектирования, найти нечеткое множество A', функция принадлежности которого вычисляется следующим образом:

$$\mu_{A'}(x) = \max_{y \in V} \mu_{R(A,B\|B')}(x, y).$$

Для вычисления индекса сходства будем использовать формулу (4).

2.2. Иллюстративный пример

Символом ~ в выражении $A \sim B$ обозначим сходство A и B, так что $Sim(A,B) = 1$.

Пусть задано следующее множество предложений, состоящих из различных атомов:

$$\{P_1 \vee P_2, P_3 \vee P_4, P_5 \vee P_6, P_7 \vee P_8, P_9 \vee P_{10}\},$$

где

$$P_1 \sim \neg P, P_2 \sim Q, P_3 \sim \neg Q,$$
$$P_4 \sim R, P_5 \sim \neg R, P_6 \sim S,$$
$$P_7 \sim \neg S, P_8 \sim T, P_9 \sim \neg T,$$
$$P_{10} \sim P,$$

при этом известно, что

$$\mu(P_1) = 0.1, \mu(P_2) = 0.2,$$
$$\mu(P_3) = 0.9, \mu(P_4) = 0.3,$$
$$\mu(P_5) = 0.8, \mu(P_6) = 0.3,$$
$$\mu(P_7) = 0.8, \mu(P_8) = 0.2,$$
$$\mu(P_9) = 0.9, \mu(P_{10}) = 0.9.$$

Положим $\varepsilon = 0.1$ и, используя формулу (6) для вычисления индекса сходства, докажем или опровергнем противоречивость заданного множества. Если будем получать несколько значений $Sim(P, P') \neq 0$, то выберем первое, наиболее близкое к 0.

Пусть $A = P_1 \vee P_2$, $B = P_3 \vee P_4$, тогда $\mu(A,B) = 0.9$. По формуле (6) вычислим

$$Sim(P_1, P_3) = 1 - \frac{\max\{\min\{1-0.1, 0.9\}, \min\{0.1, 1-0.9\}\}}{\max\{0.1, 0.9\}} = 1 - \frac{\max\{0.9, 0.1\}}{\max\{0.1, 0.9\}} = 0;$$

$$Sim(P_1, P_4) = 1 - \frac{\max\{\min\{1-0.1, 0.3\}, \min\{0.1, 1-0.3\}\}}{\max\{0.1, 0.3\}} = 1 - \frac{\max\{0.3, 0.1\}}{\max\{0.1, 0.3\}} = 0;$$

$$Sim(P_2, P_3) = 1 - \frac{\max\{\min\{1-0.2, 0.9\}, \min\{0.2, 1-0.9\}\}}{\max\{0.2, 0.9\}} = 1 - \frac{\max\{0.8, 0.1\}}{\max\{0.2, 0.9\}} = \frac{1}{9};$$

$$Sim(P_2, P_4) = 1 - \frac{\max\{\min\{1-0.2, 0.3\}, \min\{0.2, 1-0.3\}\}}{\max\{0.2, 0.3\}} = 1 - \frac{\max\{0.3, 0.2\}}{\max\{0.2, 0.3\}} = 0.$$

Заметим, что $Sim(P_2, P_3) \neq 0$, причем $Sim(P_2, P_3) \to 0$, тогда

$$res(A,B) = res(P_1 \vee P_2, P_3 \vee P_4) = P_1 \vee P_4.$$

Согласно определению $P_1 \sim \neg P, P_4 \sim R$, при этом дизъюнкт $P_1 \vee P_4$ не образует пустой дизъюнкт, алгоритм продолжает работу.

Пусть $A = P_5 \vee P_6$, $B = P_7 \vee P_8$ и $\mu(A,B) = 0.8$. Вычислим

$$Sim(P_5, P_7) = 1 - \frac{\max\{\min\{1-0.8, 0.8\}, \min\{0.8, 1-0.8\}\}}{\max\{0.8, 0.8\}} = 1 - \frac{\max\{0.2, 0.2\}}{\max\{0.8, 0.8\}} = \frac{6}{8};$$

$$Sim(P_5, P_8) = 1 - \frac{\max\{\min\{1-0.8, 0.1\}, \min\{0.8, 1-0.1\}\}}{\max\{0.8, 0.1\}} = 1 - \frac{\max\{0.1, 0.8\}}{\max\{0.8, 0.1\}} = 0;$$

$$Sim(P_6, P_7) = 1 - \frac{\max\{\min\{1-0.3, 0.8\}, \min\{0.3, 1-0.8\}\}}{\max\{0.3, 0.8\}} = 1 - \frac{\max\{0.7, 0.2\}}{\max\{0.3, 0.8\}} = \frac{1}{8};$$

$$Sim(P_6, P_8) = 1 - \frac{\max\{\min\{1-0.3, 0.1\}, \min\{0.3, 1-0.1\}\}}{\max\{0.3, 0.1\}} =$$

$$=1-\frac{\max\{0.1,0.3\}}{\max\{0.3,0.1\}}=0.$$

Заметим, что

$$Sim(P_6,P_7)\neq 0, Sim(P_5,P_7)\neq 0$$

и

$$Sim(P_6,P_7)<Sim(P_5,P_7),$$

причем $Sim(P_6,P_7)\to 0$. Тогда

$$res(A,B)=res(P_5\vee P_6,P_7\vee P_8)=P_5\vee P_8.$$

Поскольку $P_5\sim\neg R$, $P_8\sim T$, то дизъюнкт $P_5\vee P_8$ не образует пустой дизъюнкт, поэтому алгоритм продолжает работу.

Пусть $A=P_1\vee P_4$, $B=P_5\vee P_8$, $\mu(A,B)=0.8$. Вычислим

$Sim(P_1,P_5)=$

$$=1-\frac{\max\{\min\{1-0.1,0.3\},\min\{0.1,1-0.3\}\}}{\max\{0.1,0.3\}}=$$

$$=1-\frac{\max\{0.3,0.1\}}{\max\{0.1,0.3\}}=0;$$

$Sim(P_1,P_8)=$

$$=1-\frac{\max\{\min\{1-0.1,0.1\},\min\{0.1,1-0.1\}\}}{\max\{0.1,0.1\}}=$$

$$=1-\frac{\max\{0.1,0.1\}}{\max\{0.1,0.1\}}=0;$$

$Sim(P_4,P_5)=$

$$=1-\frac{\max\{\min\{1-0.3,0.8\},\min\{0.3,1-0.8\}\}}{\max\{0.3,0.8\}}=$$

$$=1-\frac{\max\{0.7,0.2\}}{\max\{0.3,0.8\}}=\frac{1}{8};$$

$Sim(P_4,P_8)=$

$$=1-\frac{\max\{\min\{1-0.3,0.1\},\min\{0.3,1-0.1\}\}}{\max\{0.3,0.1\}}=$$

$$=1-\frac{\max\{0.1,0.3\}}{\max\{0.3,0.1\}}=0.$$

Здесь $Sim(P_4,P_5)\neq 0$, $Sim(P_4,P_5)\to 0$, тогда

$$res(A,B)=res(P_1\vee P_4,P_5\vee P_8)=P_1\vee P_8.$$

Так как $P_1\sim\neg P$, $P_8\sim T$, то дизъюнкт $P_1\vee P_8$ не образует пустой дизъюнкт, поэтому алгоритм продолжает работу.

Пусть $A=P_1\vee P_8$, $B=P_9\vee P_{10}$, $\mu(A,B)=0.9$. Вычислим степени сходства всевозможных пар.

$Sim(P_1,P_9)=$

$$=1-\frac{\max\{\min\{1-0.1,0.9\},\min\{0.1,1-0.9\}\}}{\max\{0.1,0.9\}}=$$

$$=1-\frac{\max\{0.9,0.1\}}{\max\{0.1,0.9\}}=0;$$

$Sim(P_1,P_{10})=$

$$=1-\frac{\max\{\min\{1-0.1,0.8\},\min\{0.1,1-0.8\}\}}{\max\{0.1,0.8\}}=$$

$$=1-\frac{\max\{0.8,0.1\}}{\max\{0.1,0.8\}}=0;$$

$Sim(P_8,P_9)=$

$$=1-\frac{\max\{\min\{1-0.2,0.9\},\min\{0.2,1-0.9\}\}}{\max\{0.2,0.9\}}=$$

$$=1-\frac{\max\{0.8,0.1\}}{\max\{0.2,0.9\}}=\frac{1}{9};$$

$Sim(P_8,P_{10})=$

$$=1-\frac{\max\{\min\{1-0.2,0.9\},\min\{0.2,1-0.9\}\}}{\max\{0.2,0.9\}}=$$

$$=1-\frac{\max\{0.8,0.2\}}{\max\{0.2,0.9\}}=\frac{1}{9}.$$

В этом случае

$$Sim(P_8,P_9)\neq 0, Sim(P_8,P_{10})\neq 0,$$

причем $Sim(P_8,P_9)\to 0$, $Sim(P_8,P_{10})\to 0$. Выберем первый по порядку вариант

$$res(A,B)=res(P_1\vee P_8,P_9\vee P_{10})=P_1\vee P_{10}.$$

Здесь $P_1\sim\neg P$, $P_{10}\sim P$, дизъюнкт $P_1\vee P_{10}$ равносилен пустому дизъюнкту, останов, решение найдено. Дерево вывода представлено на рис. 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассмотрен нечеткий метод резолюций для нового определения резольвенты, которое основано на вычислении степени сходства литер, по которым она определяется. Особое внимание уделе-

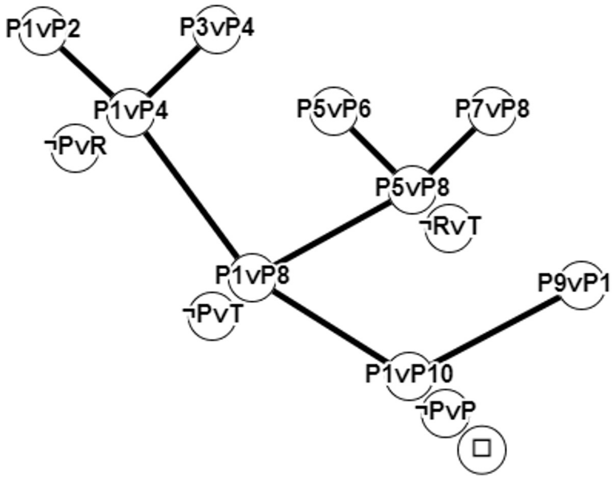

Рис. 1. Дерево вывода
[Fig. 1. Inference tree]

но способам сравнения нечетких множеств, которые позволяют установить их сходство или различие. Введены системы аксиом для скалярных индексов, оценивающих теоретико-множественные отношения между множествами. На основе формул (1), (3), (5), (6), (7), (9) при соответствующем выборе оценочных функций могут быть построены различные скалярные индексы для решения задач, в которых необходимо сравнивать нечеткие множества. В статье представлен алгоритм нечеткого метода резолюций, особенностью которого является использование понятия «нечеткого отображения». Данное понятие, по сути, формализует правило дизъюнктивного силлогизма, лежащего в основе принципа резолюций. Проведенное исследование, с одной стороны, расширяет теоретическую базу метода резолюций, а, с другой, предоставляет практические инструменты для решения различных прикладных задач.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *NewBorn M.* Automated Theorem Proving: Theory and Practice. Springer Verlag. – 2000. – 231 p.

2. *Davis M., Putnam H.* A computing procedure for quantification theory // J. Assoc. Comput. Mach. – 1960. – № 7. – P. 201–215.

3. *Robinson J. A.* A Machine Oriented Logic Based on the Resolution Principle // Journal of the ACM. – 1965. – 12(1). – P. 23–41. doi:10.1145/321250.321253

4. *Lee R. C. T.* Fuzzy Logic and the Resolution Principle // Journal of the ACM. – 1972. – 19(1). – P. 109–119. doi:10.1145/321679.321688

5. *Mukaidono M.* Fuzzy Inference of Resolution Style. In: R. R. Yager, Ed., Fuzzy Set and Possibility Theory. – New York : Pergamon Press, 1988. – P. 224–231.

6. *Dubois D., Prade H.* Necessity and Resolution Principle // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. – 1987. – 17(3). – P. 474–478. doi:10.1109/TSMC.1987.4309063

7. *Guller D.* Hyperresolution for Gödel logic with truth constants // Fuzzy Sets and Systems. – 2019. – 363. P. 1–65.

8. *Habiballa H.* Resolution principle and fuzzy logic // In: E. Dadios (ed.), Fuzzy Logic Algorithms, Techniques, and Implementations. Ch. 3, IntechOpen. London. – 2012. – P. 55–74.

9. *Tammet T.* A Resolution Theorem Prover for Intuitonistic Logic. – 1996. – P. 2–16. doi:10.1007/3-540-61511-3_65.

10. *Viedma M.A.C., Morales R. M., Sanchez I. N.* Fuzzy Temporal Constraint Logic: A Valid Resolution Principle // Fuzzy Sets and Systems. – 2001. – 117(2). P. 231–250.

11. *Thi-Minh-Tam Nguyen, Duc-Anh-Khanh Tran.* Resolution Method in Linguistic Propositional Logic // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. – 2016. – 7(1). – P. 672–678. DOI:10.14569/IJACSA.2016.070191

12. *Samokhvalov Y.* Proof of Theorems in Fuzzy Logic Based on Structural Resolution // Cybernetics and Systems Analysis. – 2019. – 55. – P. 1–13. doi:10.1007/s10559-019-00125-8.

13. *Mondal B., Raha S.* Approximate reasoning in fuzzy resolution // International Journal of Intelligence Science. – 2013. – 3(2). – P. 86–98. doi: 10.4236/ijis.2013.32010

14. *Леденева Т. М., Лещинская М. В.* Метод резолюций и стратегии поиска опровержений // Вестник ВГУ. Серия: Системный ана-

лиз и информационные технологии. – 2021. – 1. – P. 98–111.

15. Искусственный интеллект. – В 3-х кн. Кн. 2 Модели и методы: Справочник / Под. Ред. Д. А. Поспелова – М. : Радио и связь, 1990. – 304 с.

16. *Вагин В. Н., Головина Е. Ю., Загорянская А. А., Фомина М. В.* Достоверный и правдоподобный вывод / Под ред. В. Н. Вагина, Д. А. Поспелова. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 712 с.

17. *Klement E. P., Mesiar R., Pap E.* Triangular norms. Position paper II: general constructions and parameterized families // Fuzzy Sets and Systems. – 2004. – 145. – P. 439–454.

18. *Yager R. R., Filev D.* On ranking fuzzy numbers using valuations // International Journal of Intelligent Systems. – 1999. – 14. – P. 1249–1268.

19. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения: Пер. с англ. / Под ред. Р. Р. Ягера. – М. : Радио и связь, 1986. – 408 с.

20. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М. : Радио и связь, 1982. – 432 с.

Леденева Татьяна Михайловна — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и прикладных информационных технологий, факультет прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет.
E-mail: ledeneva-tm@yandex.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3944-2266

Лещинская Мария Владимировна — преподаватель-исследователь, факультет прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет.
E-mail: maria-leshchinskaya@mail.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-6944-8485

DOI: https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2023/3/143-155 ISSN 1995-5499
Received 20.08.2023
Accepted 30.09.2023

CALCULATION OF RESOLVENT BASED ON SIMILARITY RATIO IN FUZZY RESOLUTION METHOD

© 2023 T. M. Ledeneva✉, M. V. Leshchinskaya

Voronezh State University
1, Universitetskaya Square, 394018 Voronezh, Russian Federation

Annotation. This article presents a fuzzy resolution method based on disjunctive syllogism and applicable for reasoning with uncertainty in arguments and conclusions. In this case, the degree of truth of each variable is assessed by a number in the interval [0,1], and one of the main problems is defining the conditions that would allow for a meaningful logical conclusion. To construct a resolution conclusion, the degree of similarity for a pair of contrary literals is used, which could potentially be selected for constructing a fuzzy resolvent. The article presents systems of axioms that postulate the properties of fuzzy similarity/dissimilarity relationships between pairs of fuzzy sets. Each system reflects a specific combination of sets. Based on these, considering the formal representation of fuzzy logical connectors, a set of scalar comparison indices can be constructed. Therefore, this result has independent significance and can be used in applications where the problem of comparing fuzzy sets or their particular case-fuzzy numbers-arises. The article provides a rationale for the fuzzy resolution method using the concept of a fuzzy conditional subset. A scheme of the method is proposed, in

✉ Leshchinskaya Maria V.
e-mail: maria-leshchinskaya@mail.ru

which the fuzzy resolvent is constructed based on the similarity of selected literals. An illustrative example demonstrates the capabilities of the method and confirms its applicability for generating plausible reasoning under conditions of uncertainty.
Keywords: resolution method, scalar comparison index, similarity, fuzzy resolvent.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

REFERENCES

1. *NewBorn M.* (2000) Automated Theorem Proving: Theory and Practice. *Springer Verlag.* 231 p.

2. *Davis M. and Putnam H.* (1960) A computing procedure for quantification theory. *J. Assoc. Comput. Mach*. No 7. P. 201-215.

3. *Robinson J. A.* (1965) A Machine Oriented Logic Based on the Resolution Principle. *Journal of the ACM*. 12(1). P. 23–41. doi:10.1145/321250.321253

4. *Lee R. C. T.* (1972) Fuzzy Logic and the Resolution Principle. // Journal of the ACM. 19(1). P. 109–119. doi:10.1145/321679.321688

5. *Mukaidono M.* (1988) Fuzzy Inference of Resolution Style. In: R. R. Yager, Ed., *Fuzzy Set and Possibility Theory*. New York : Pergamon Press. P. 224–231.

6. *Dubois D. and Prade H.* (1987) Necessity and Resolution Principle. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*. 17(3). P. 474–478. doi:10.1109/TSMC.1987.4309063

7. *Guller D.* (2019) Hyperresolution for Gödel logic with truth constants. *Fuzzy Sets and Systems*. 363. P. 1–65.

8. *Habiballa H.* (2012) Resolution principle and fuzzy logic. *In: E. Dadios (ed.), Fuzzy Logic Algorithms, Techniques, and Implementations*. Ch. 3, IntechOpen. London. P. 55–74.

9. *Tammet T.* (1996) A Resolution Theorem Prover for Intuitonistic Logic. P. 2–16. doi:10.1007/3-540-61511-3_65.

10. *Viedma M.A.C., Morales R. M. and Sanchez I. N.* (2001) Fuzzy Temporal Constraint Logic: A Valid Resolution Principle. *Fuzzy Sets and Systems*. 117(2). P. 231–250.

11. *Thi-Minh-Tam Nguyen and Duc-Anh-Khanh Tran* (2016) Resolution Method in Linguistic Propositional Logic. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 7(1). P. 672–678. DOI:10.14569/IJACSA.2016.070191

12. *Samokhvalov Y.* (2019) Proof of Theorems in Fuzzy Logic Based on Structural Resolution. *Cybernetics and Systems Analysis*. 55. P. 1–13. doi:10.1007/s10559-019-00125-8.

13. *Mondal B. and Raha S.* (2013) Approximate reasoning in fuzzy resolution. *International Journal of Intelligence Science*. 3(2). P. 86–98. doi: 10.4236/ijis.2013.32010

14. *Ledeneva T. M. and Leshchinskaya M. V.* (2021) Resolution Method and Refutation Search Strategies (Metod rezolyutsiy i strategii poiska oproverzheniy). *Vestnik of VSU. Series: System Analysis and Information Technologies*. 1. P. 98–111.

15. Artificial Intelligence. In 3 volumes. Vol. 2 Models and Methods: Handbook / Ed. by D. A. Pospelov. Moscow : Radio i Svyaz, 1990. 304 p.

16. *Vagin V. N., Golovina E. Yu., Zagoryanskaya A. A. and Fomina M. V.* (2008) Reliable and Plausible Inference (Dostovernyy i pravdopodobnyy vyvod) / Ed. by V. N. Vagin, D. A. Pospelov. Moscow : FIZMATLIT. 712 p.

17. *Klement E. P., Mesiar R. and Pap E.* (2004) Triangular norms. Position paper II: general constructions and parameterized families. *Fuzzy Sets and Systems*. 145. P. 439–454.

18. *Yager R. R. and Filev D.* (1999) On ranking fuzzy numbers using valuations, International Journal of Intelligent Systems. 14. P. 1249–1268.

19. Fuzzy Sets and Possibility Theory. Latest Achievements (Nechetkiye mnozhestva i teoriya vozmozhnostey. Posledniye dostizheniya): Translated from English / Ed. by R.R. Yager. Moscow : Radio i Svyaz, 1986. 408 p.

20. *Kaufman A.* (1982) Introduction to the Theory of Fuzzy Sets (Vvedenie v teoriyu nechetkikh mnozhestv). Moscow : Radio i Svyaz. 432 p.

Ledeneva Tatyana M. — DSc in Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Applied Information Technologies, Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics, Voronezh State University.
E-mail: ledeneva-tm@yandex.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3944-2266

Leshchinskaya Maria V. — Teacher-researcher, Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics, Voronezh State University.
E-mail: maria-leshchinskaya@mail.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-6944-8485