

---

---

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА И УПРАВЛЕНИЯ

---

---

УДК 517.97 : 532.526

## АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПОСТОЯННЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКИ

Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко

*Казанский национальный исследовательский технический университет  
(КНИТУ - КАИ) им. А. Н. Туполева*

Поступила в редакцию 12.03.2018 г.

**Аннотация.** Исследуются свойства математической модели управления тепломассообменом и трением в ламинарном пограничном слое на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. Получены зависимости значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики (интегрального теплового потока и суммарной силы ньютоновского трения) от управляющих воздействий (вдува, температурного фактора, магнитного поля). Приведены результаты вычислительных экспериментов.

**Ключевые слова:** управление, тепломассообмен, ламинарный пограничный слой, гиперзвуковые течения, проницаемые поверхности, интегральный тепловой поток, суммарная сила ньютоновского трения, метод обобщенных интегральных соотношений, аппроксимирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений, нелинейная система алгебраических уравнений.

**Annotation.** The properties of mathematical model of heat and mass transfer and friction control in laminar boundary layer on permeable cylindrical and spherical surfaces of hypersonic aircraft are investigated. The dependences of hypersonic aerodynamics functionals (the total heat flow and the total Newton friction force) values on controls (the blowing into boundary layer, the temperature factor, the magnetic field) are obtained. The computational experiments results are presented.

**Keywords:** control, heat and mass transfer, laminar boundary layer, hypersonic flows, permeable surfaces, total heat flow, total Newton friction force, method of generalized integral relations, approximating system of ordinary differential equations, nonlinear algebraic equations system.

### ВВЕДЕНИЕ

Обеспечение выполнения требований прочности, лёгкости, эффективности и надёжности конструктивных элементов очень важно при проектировании гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА). Полёты ГЛА, предназначенных для движения в плотных слоях атмосферы, сопровождаются различными физико-химическими процессами (возбуждение колебательных уровней молекул, диссоциация, ионизация) [1]. Моделиро-

вание всех реальных условий гиперзвукового полёта в аэродинамических трубах в настоящее время невозможно. Следовательно, необходимо разработать адекватные математические модели, описывающие эти процессы с учётом их особенностей. С помощью метода обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына [2] системы дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), описывающие ламинарные пограничные слои (ЛПС), могут быть сведены к аппроксимирующим системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Этот подход, требующий большой подготовитель-

---

© Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г., 2018

ной работы, очень популярен в инженерной практике для расчёта аэродинамических характеристик течений сжимаемых газов [3–6]. В [7, 8] получены аппроксимирующие системы ОДУ, описывающие ЛПС на участке управления для проницаемых цилиндрических и сферических поверхностей ГЛА. В данной работе, продолжая исследование свойств математической модели ЛПС электропроводящего газа на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях ГЛА [8–15], рассматривается влияние **постоянных** управляющих воздействий (вдува, температурного фактора, магнитного поля) на функционалы гиперзвуковой аэродинамики (интегральный тепловой поток  $Q$  и суммарную силу ньютоновского трения  $F$ ), являющиеся интегральными характеристиками тепломассообмена и трения, и на мощность  $N$  системы, обеспечивающей вдув. В частности,

1) приводится **объединённая** для случаев обтекания боковой поверхности прямого кругового цилиндра и поверхности сферического носка система аппроксимирующих ОДУ;

2) приводится **объединённая** система нелинейных алгебраических уравнений;

3) выводится **объединённая** система аппроксимирующих ОДУ для предельного случая значения температурного фактора  $\tau_w = 0$ ;

4) изучаются зависимости значений функционалов  $Q$ ,  $F$  и  $N$  от управляющих воздействий;

5) определяется вид области допустимых значений «Тепло и Трение»  $\Omega = \{(Q, F)\}$ ;

6) исследуется влияние магнитного поля на вид области  $\Omega = \{(Q, F)\}$ ;

7) подтверждается вывод о необходимости учёта диссоциации в расчётах [9, 10];

8) устанавливается свойство симметричности  $N$  относительно постоянных безразмерных управлений (вдува и температурного фактора).

Являясь продолжением [8–15], данная статья сохраняет введённые в них обозначения.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую прямую задачу [7–12]:

$$(m, \tau_w, s) \rightarrow (q, f, \eta; Q, F, N). \quad (1)$$

По заданным управлениям:  $m(x)$  – вдуву в ламинарный пограничный слой (ПС), где  $x \in X = [0; 1]$ , а ось  $x$  направлена вдоль контура тела;  $\tau_w(x) = T_w(x)/T_{e_0}$  – температурному фактору, где  $T_w(x)$  – температура стенки, а  $T_{e_0}$  – температура в точке торможения (ТТ)  $x_0 = 0$  потока;  $s(x) = \sigma B_0^2(x)$  – магнитному полю требуется рассчитать параметры  $\theta_0(m, \tau_w, s)$ ,  $\theta_1(\dots)$ ,  $\omega_0(\dots)$ ,  $\omega_1(\dots)$  математической модели ПС [8] для случаев обтекания боковой поверхности кругового цилиндра и поверхности сферического носка. После этого необходимо определить: локальный тепловой поток  $q(x; m, \tau_w, s)$ ; локальное напряжение трения  $f(x; m, \tau_w, s)$ ; локальную мощность  $\eta(x; m, \tau_w, s)$ ; интегральный тепловой поток  $Q(m, \tau_w, s)$

$$Q = \int_0^{x_k} (2\pi r)^{k_4} \left( \frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial H}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot dx; \quad (2)$$

суммарную силу трения Ньютона  $F(m, \tau_w, s)$

$$F = \int_0^{x_k} (2\pi r)^{k_4} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot dx; \quad (3)$$

мощность  $N(m, \tau_w, s)$  системы, обеспечивающей вдув, вычисляемую с использованием фильтрационного закона Дарси

$$N = \int_0^{x_k} (2\pi r)^{k_4} a v_w^2(x) \cdot dx. \quad (4)$$

В (2)–(4) и далее коэффициент  $k_4 = 0$  для боковой поверхности цилиндра,  $k_4 = 1$  для поверхности сферического носка с текущим радиусом  $r(x)$ .

## 2. ОБЪЕДИНЁННАЯ СИСТЕМА АППРОКСИМИРУЮЩИХ ОДУ

Для определения параметров  $\theta_0, \dots, \omega_1$ , ПС применяется следующая аппроксимирующая система ОДУ

$$\theta'_0 = 18m\bar{r}^{k_4} - 6\beta q \left[ \frac{9}{6}\theta_0 + \frac{7}{6}\theta_1 - \right.$$

$$-\frac{4}{3}\omega_0 - \frac{5}{3}\omega_1 \Big] + \frac{34b_0q}{\theta_0} - \frac{32b_1q}{\theta_1} +$$

$$+ 6AB_0^2q \left\{ \theta_0 \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{60}\alpha_e^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \theta_1 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{15}\alpha_e^2 \right) - \frac{2}{15}\omega_0 - \frac{11}{30}\omega_1 \right\}; \quad (5)$$

$$\theta_1' = 12m\bar{r}^{k_4} - 12\beta q \left[ \frac{1}{3}\theta_0 + \frac{1}{2}\theta_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\omega_0 - \frac{2}{3}\omega_1 \right] + \frac{20b_0q}{\theta_0} - \frac{16b_1q}{\theta_1} +$$

$$+ 24AB_0^2q \left\{ \frac{1}{60}\alpha_e^2\theta_0 + \right.$$

$$\left. + \theta_1 \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{30}\alpha_e^2 \right) - \frac{1}{60}\omega_0 - \frac{1}{15}\omega_1 \right\}; \quad (6)$$

$$\omega_0' = (1 - \tau_w)\theta_0' - \tau_w'\theta_0; \quad (7)$$

$$\omega_1' = 6m\bar{r}^{k_4} \frac{\omega_0}{\theta_0} - 6\beta q \left[ \frac{1}{6}\omega_0 + \frac{1}{2}\omega_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{6}\frac{\omega_0^2}{\theta_0} - \frac{2}{3}\frac{\omega_1^2}{\theta_1} \right] + \frac{6b_0\omega_0q}{\theta_0^2} +$$

$$+ 6q \left( \frac{1}{Pr} + 1 \right) \left[ \frac{1}{6}\frac{b_0}{\theta_0} \left( -3\frac{\omega_0}{\theta_0} + 4\frac{\omega_1}{\theta_1} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}\frac{b_1}{\theta_1} \frac{\omega_0}{\theta_0} \right] - \frac{6qb_0}{Pr\theta_0} \left( -3\frac{\omega_0}{\theta_0} + 4\frac{\omega_1}{\theta_1} \right) +$$

$$+ 4\alpha_e^2 q \left( \frac{1}{Pr} - 1 \right) \frac{b_1}{\theta_1} +$$

$$+ 6B_0^2q \left( A \left\{ \frac{1}{60}\alpha_e^2\omega_0 + \omega_1 \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{15}\alpha_e^2 \right) - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{60}\frac{\omega_0^2}{\theta_0} - \frac{2}{15}\frac{\omega_1^2}{\theta_1} \right\} +$$

$$+ G \left\{ \theta_0 \left( \frac{1}{60} - \frac{1}{70}\alpha_e^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \theta_1 \left( -\frac{1}{20} + \frac{1}{42}\alpha_e^2 \right) + \frac{1}{30}\omega_1 \right\} \Big), \quad (8)$$

объединяющая системы (14) и (29) из [8], полученные по методу А. А. Дородницына [2].  
Здесь

$$m = \frac{(\rho\nu)_w}{\rho_{e_0}} \sqrt{\frac{\ell}{V_{\max}\nu_{e_0}}}, \quad \bar{r} = \frac{r}{\ell},$$

$$q = \alpha_e \varphi \bar{r}^{k_5}, \quad \varphi = (1 - \alpha_e^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

В (5)–(8) коэффициент  $k_5 = 2 \cdot k_4$ , таким образом,  $(k_4; k_5) = (0; 0)$  для боковой поверхности цилиндра,  $(k_4; k_5) = (1; 2)$  для поверхности сферического носка.

### 3. ОБЪЕДИНЁННАЯ СИСТЕМА НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Обозначим

$$m_0 = m(x_0), \quad \tau_0 = \tau_w(x_0), \quad s_0 = s(x_0).$$

Для  $x_0^* \approx x_0$  из окрестности ТТ начальные условия для (5)–(8) следующие [8]:

$$\theta_0 = \bar{\theta}_0 \cdot (x_0^*)^{k_3}, \quad \theta_1 = \bar{\theta}_1 \cdot (x_0^*)^{k_3},$$

$$\omega_0 = \bar{\omega}_0 \cdot (x_0^*)^{k_3}, \quad \omega_1 = \bar{\omega}_1 \cdot (x_0^*)^{k_3}. \quad (9)$$

Для  $\tau_0 \neq 1$  величины  $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1$  могут быть получены из нелинейной алгебраической системы (1)–(4) [15]

$$18m_0 - k_0\bar{\theta}_0 - 7\bar{\theta}_1 + 8\bar{\omega}_0 + 10\bar{\omega}_1 +$$

$$+ \frac{34b_0(0)C}{\bar{\theta}_0} - \frac{32b_1(0)C}{\bar{\theta}_1} + \frac{1}{5}C_0B_0^2 \times$$

$$\times (5\bar{\theta}_0 + 10\bar{\theta}_1 - 4\bar{\omega}_0 - 11\bar{\omega}_1) = 0; \quad (10)$$

$$12m_0 - 4\bar{\theta}_0 - k_1\bar{\theta}_1 - 4\bar{\omega}_0 + 8\bar{\omega}_1 +$$

$$+ \frac{20b_0(0)C}{\bar{\theta}_0} - \frac{16b_1(0)C}{\bar{\theta}_1} +$$

$$+ \frac{2}{5}C_0B_0^2 \cdot (5\bar{\theta}_1 - \bar{\omega}_0 - 4\bar{\omega}_1) = 0; \quad (11)$$

$$(1 - \tau_0) \cdot \bar{\theta}_0 - \bar{\omega}_0 = 0; \quad (12)$$

$$6m_0 \frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0} - \bar{\omega}_0 - k_2\bar{\omega}_1 +$$

$$+ \frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{\theta}_0} + 4\frac{\bar{\omega}_1^2}{\bar{\theta}_1} + 6\frac{\bar{\omega}_0b_0(0)C}{\bar{\theta}_0^2} +$$

$$+ C \left( \frac{1}{Pr} + 1 \right) \left[ \frac{b_0(0)}{\bar{\theta}_0} \left( -3\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0} + 4\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1} \right) - \right.$$

$$\left. - 4\frac{b_1(0)}{\bar{\theta}_1} \frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0} \right] - \frac{6Cb_0(0)}{Pr\bar{\theta}_0} \left( -3\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0} + 4\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1} \right) +$$

$$+ \frac{1}{10}B_0^2C_0 \left( 10\bar{\omega}_1 - \frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{\theta}_0} - 8\frac{\bar{\omega}_1^2}{\bar{\theta}_1} \right) = 0, \quad (13)$$

объединяющей системы (15) и (31) из [8].

Для  $\tau_0 = 1$ , следуя [15],  $\bar{\omega}_0 = 0$  и  $\bar{\omega}_1 = 0$ , а величины  $\bar{\theta}_0$ ,  $\bar{\theta}_1$  могут быть получены из «укороченной» нелинейной алгебраической системы

$$18m_0 - k_0\bar{\theta}_0 - 7\bar{\theta}_1 + \frac{34b_0(0)C}{\bar{\theta}_0} - \frac{32b_1(0)C}{\bar{\theta}_1} + C_0B_0^2 \cdot (\bar{\theta}_0 + 2\bar{\theta}_1) = 0; \quad (14)$$

$$12m_0 - 4\bar{\theta}_0 - k_1\bar{\theta}_1 + \frac{20b_0(0)C}{\bar{\theta}_0} - \frac{16b_1(0)C}{\bar{\theta}_1} + 2C_0B_0^2 \cdot \bar{\theta}_1 = 0; \quad (15)$$

объединяющей системы (16)–(17), (18)–(19) из [14].

В (9)–(15) коэффициенты  $k_0 = k_4 + 10$ ,  $k_1 = k_4 + 7$ ,  $k_2 = k_4 + 4$ ,  $k_3 = k_4 + 1$ , таким образом,  $(k_0; \dots; k_4) = (10; 7; 4; 1; 0)$  для случая боковой поверхности цилиндра и  $(k_0; \dots; k_4) = (11; 8; 5; 2; 1)$  для случая поверхности сферического носка.

#### 4. О ПРЕДЕЛЬНОМ ЗНАЧЕНИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ФАКТОРА

Отметим, что для предельного случая  $\tau_0 = 0$  из (12) получаем (5) [15]

$$\bar{\omega}_0 = \bar{\theta}_0. \quad (16)$$

Оставшиеся уравнения (10), (11), (13) с учётом (16) примут вид (6)–(8) [15]

$$18m_0 + (8 - k_0)\bar{\theta}_0 - 7\bar{\theta}_1 + 10\bar{\omega}_1 + \frac{34b_0(0)C}{\bar{\theta}_0} - \frac{32b_1(0)C}{\bar{\theta}_1} + \frac{C_0B_0^2}{5} \cdot (\bar{\theta}_0 + 10\bar{\theta}_1 - 11\bar{\omega}_1) = 0; \quad (17)$$

$$12m_0 - 8\bar{\theta}_0 - k_1\bar{\theta}_1 + 8\bar{\omega}_1 + \frac{20b_0(0)C}{\bar{\theta}_0} - \frac{16b_1(0)C}{\bar{\theta}_1} + \frac{2C_0B_0^2}{5} \cdot (-\bar{\theta}_0 + 5\bar{\theta}_1 - 4\bar{\omega}_1) = 0; \quad (18)$$

$$6m_0 - k_2\bar{\omega}_1 + 4\frac{\bar{\omega}_1^2}{\bar{\theta}_1} + 6\frac{b_0(0)C}{\bar{\theta}_0} + C\left(\frac{1}{Pr} + 1\right)\left[\frac{b_0(0)}{\bar{\theta}_0}\left(-3 + 4\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1}\right) - 4\frac{b_1(0)}{\bar{\theta}_1}\right] - \frac{6Cb_0(0)}{Pr\bar{\theta}_0}\left(-3 + 4\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{10}B_0^2C_0\left(-\bar{\theta}_0 + 10\bar{\omega}_1 - 8\frac{\bar{\omega}_1^2}{\bar{\theta}_1}\right) = 0. \quad (19)$$

В случае  $\tau_w \equiv 0$  из (7) с учётом (16) получаем

$$\omega_0 = \theta_0. \quad (20)$$

Оставшиеся уравнения (5), (6), (8) с учётом (20) примут вид:

$$\theta'_0 = 18m\bar{r}^{k_4} - 6\beta q\left[\frac{1}{6}\theta_0 + \frac{7}{6}\theta_1 - \frac{5}{3}\omega_1\right] + \frac{34b_0q}{\theta_0} - \frac{32b_1q}{\theta_1} + 6AB_0^2q\left\{\theta_0\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{60}\alpha_e^2\right) + \theta_1\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{15}\alpha_e^2\right) - \frac{11}{30}\omega_1\right\}; \quad (21)$$

$$\theta'_1 = 12m\bar{r}^{k_4} - 12\beta q\left[\frac{1}{2}\theta_1 - \frac{2}{3}\omega_1\right] + \frac{20b_0q}{\theta_0} - \frac{16b_1q}{\theta_1} + 24AB_0^2q\left\{\theta_0\left(\frac{1}{60}\alpha_e^2 - \frac{1}{60}\right) + \theta_1\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{30}\alpha_e^2\right) - \frac{1}{15}\omega_1\right\}; \quad (22)$$

$$\omega'_1 = 6m\bar{r}^{k_4} - 6\beta q\left[\frac{1}{2}\omega_1 - \frac{2}{3}\frac{\omega_1^2}{\theta_1}\right] + \frac{6b_0q}{\theta_0} + 6q\left(\frac{1}{Pr} + 1\right)\left[\frac{1}{6}\frac{b_0}{\theta_0}\left(-3 + 4\frac{\omega_1}{\theta_1}\right) - \frac{2}{3}\frac{b_1}{\theta_1}\right] - \frac{6q}{Pr}\frac{b_0}{\theta_0}\left(-3 + 4\frac{\omega_1}{\theta_1}\right) + 4\alpha_e^2q\left(\frac{1}{Pr} - 1\right)\frac{b_1}{\theta_1} + 6B_0^2q\left\{A\left\{\theta_0\left(\frac{1}{60}\alpha_e^2 - \frac{1}{60}\right) + \omega_1\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{15}\alpha_e^2\right) - \frac{2}{15}\frac{\omega_1^2}{\theta_1}\right\} + G\left\{\theta_0\left(\frac{1}{60} - \frac{1}{70}\alpha_e^2\right) + \theta_1\left(-\frac{1}{20} + \frac{1}{42}\alpha_e^2\right) + \frac{1}{30}\omega_1\right\}\right\}. \quad (23)$$

## 5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Пусть фиксированы значения *неизменяемых параметров*:

$$\text{число Маха } M_\infty \in [10; 40], \quad (24)$$

$$\text{высота полёта } H \in [10; 30] \text{ [км]}, \quad (25)$$

$$\text{радиус тела } R \in [0, 1; 1] \text{ [м]}. \quad (26)$$

Пусть диапазоны изменения *управляющих параметров* ограничены:

$$t \in M^c = [0; 1], \quad (27)$$

$$\tau_w \in T^c = [0; 1], \quad (28)$$

$$s \in S^c = [0; 5 \cdot 10^4] \text{ [Тл / (Ом} \cdot \text{м)]}. \quad (29)$$

Далее размерность [Тл / (Ом · м)] параметра *s* опущена.

Результаты вычислительных экспериментов (выполненных для воздуха в атмосфере Земли при  $H = 10$  [км],  $M_\infty = 10$ ,  $R = 0,1$  [м] для удобства сравнения с результатами [9–12]) для случая обтекания боковой поверхности прямого кругового цилиндра представлены на рис. 1–9, на которых отмечены точки *A*, *B*, *C*, *D* (сочетания значений параметров, характеризующие их, указаны в скобках):

$$A : (t \equiv 0, \tau_w \equiv 0, s \equiv 0),$$

$$B : (t \equiv 1, \tau_w \equiv 0, s \equiv 0),$$

$$C : (t \equiv 0, \tau_w \equiv 1, s \equiv 0),$$

$$D : (t \equiv 0, \tau_w \equiv 0, s \equiv 5 \cdot 10^4).$$

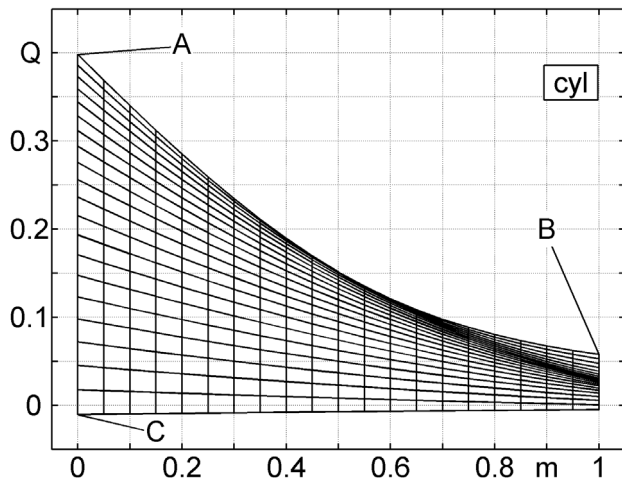


Рис. 1. Зависимости  $Q$  от  $m \in M^c$  при  $\tau_w \in T_{05}^d$  и  $s \equiv 0$

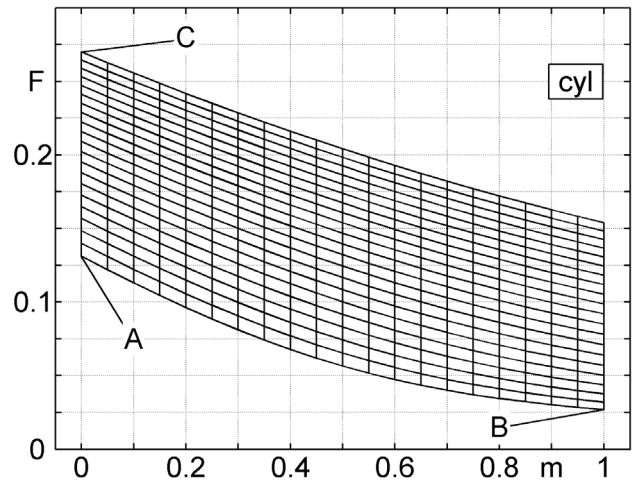


Рис. 2. Зависимости  $F$  от  $m \in M^c$  при  $\tau_w \in T_{05}^d$  и  $s \equiv 0$

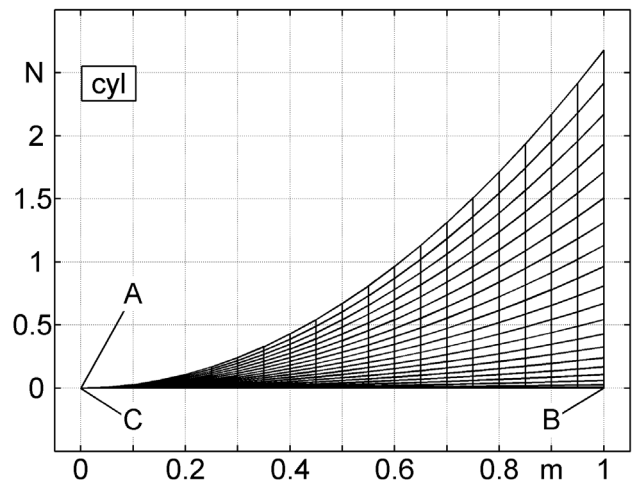


Рис. 3. Зависимости  $N$  от  $m \in M^c$  при  $\tau_w \in T_{05}^d$  и  $s \equiv 0$

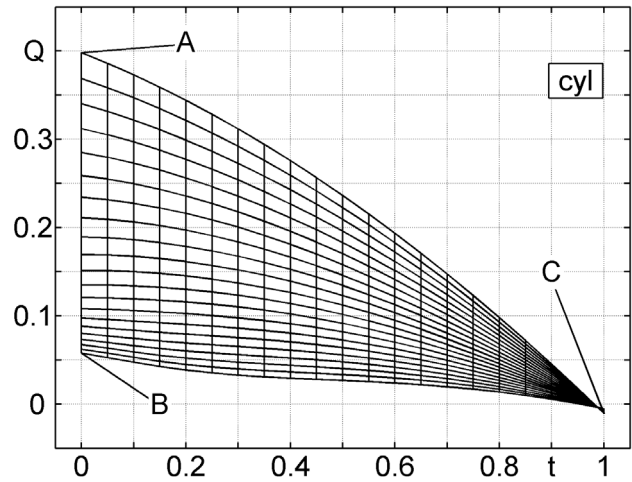


Рис. 4. Зависимости  $Q$  от  $\tau_w \in T^c$  при  $m \in M_{05}^d$  и  $s \equiv 0$

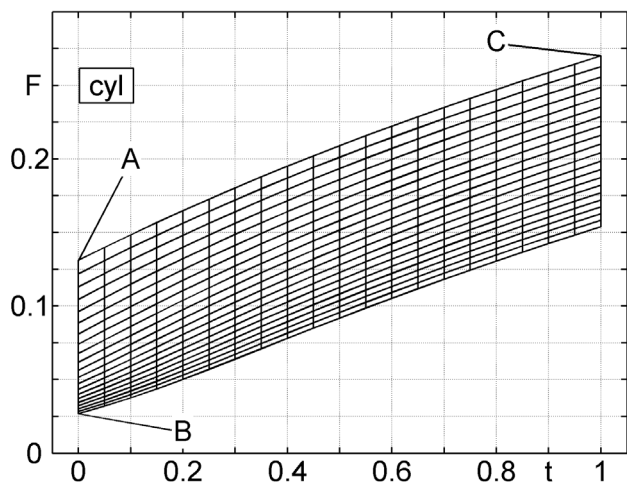


Рис. 5. Зависимости  $F$  от  $\tau_w \in T^c$  при  $m \in M_{05}^d$  и  $s \equiv 0$

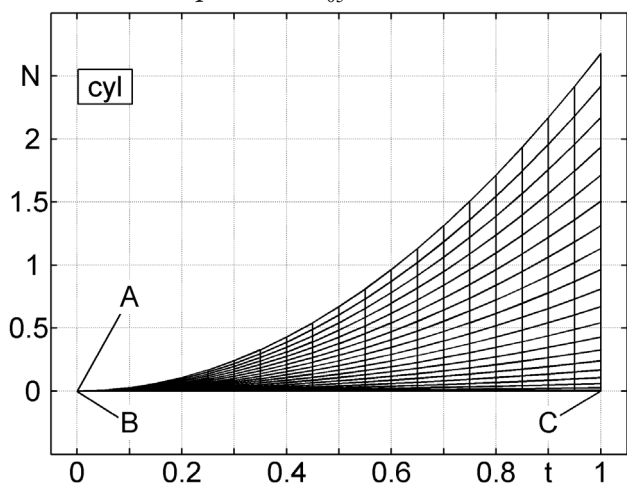


Рис. 6. Зависимости  $N$  от  $\tau_w \in T^c$  при  $m \in M_{05}^d$  и  $s \equiv 0$

Обозначим  $M_{05}^d = \{0; 0,05; \dots; 1\}$ ,  $T_{05}^d = \{0; 0,05; \dots; 1\}$ . На рис. 1–6 представлены зависимости функционалов (2)–(4) от непрерывного вдува при дискретных значениях температурного фактора (рис. 1–3) и от непрерывного температурного фактора при дискретных значениях вдува (рис. 4–6) в условиях отсутствия магнитного поля. На рис. 7 представлена область допустимых значений «Тепло и Трение»  $\Omega = \{(Q, F)\}$  в условиях отсутствия магнитного поля.

Обозначим  $M_{25}^d = \{0; 0,25; \dots; 1\}$ ,  $T_{05}^d = \{0; 0,15; \dots; 0,9\}$ ,  $S_{25}^d = \{0; 2,5 \cdot 10^4; 5 \cdot 10^4\}$ . На рис. 8 представлены три семейства

$$M = \left\{ \left\{ (m, \tau_w, s) \mid m \in M^c \right\} \mid \tau_w \in T_{15}^d, s \in S_{25}^d \right\},$$

$$T = \left\{ \left\{ (m, \tau_w, s) \mid \tau_w \in T^c \right\} \mid m \in M_{25}^d, s \in S_{25}^d \right\},$$

$$S = \left\{ \left\{ (m, \tau_w, s) \mid s \in S^c \right\} \mid m \in M_{25}^d, \tau_w \in T_{15}^d \right\}$$

линий. Рис. 9 демонстрирует влияние учёта диссоциации на область  $\Omega = \{(Q, F)\}$ .

**Замечания.** 1) Поведение локальных тепловых потоков  $q$  и локальных касательных сил ньютоновского трения  $f$  в окрестности ТТ изучено в [13–15], результаты представлены в виде областей допустимых пар значений  $(q, f)$  «тепло и трение».

2) Все вычислительные эксперименты выполнены для безразмерных случаев. Возврат к физическим переменным является предметом отдельного исследования.

3) Для случая обтекания сферического носка зависимости функционалов гиперзвуковой аэродинамики от управляющих воздействий подобны, представленным на рис. 1–9.

Анализируя результаты вычислительных экспериментов, можно сделать следующие **выводы:**

1) Полученные области допустимых значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики помогают ответить на вопрос о возможности реализации определенной пары  $(Q, F)$  «Тепло и Трение» в зависимости от допустимого диапазона управлений.

2) Рис. 7 может быть использован в качестве номограммы в инженерной практике.

3) Необходимо учитывать влияние диссоциации при расчёте функционалов гиперзвуковой аэродинамики.

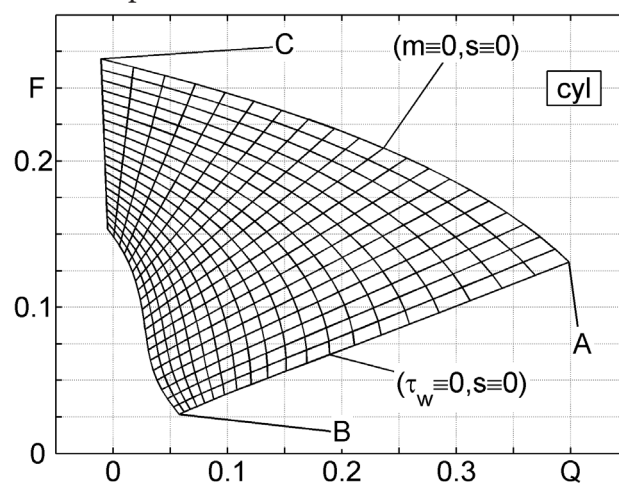


Рис. 7. Область  $\Omega = \{(Q, F)\}$  при  $s \equiv 0$

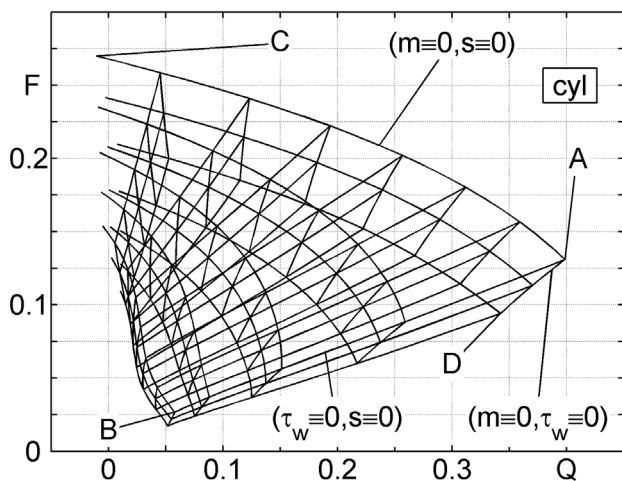


Рис. 8. Три семейства линий  $M, T, S$

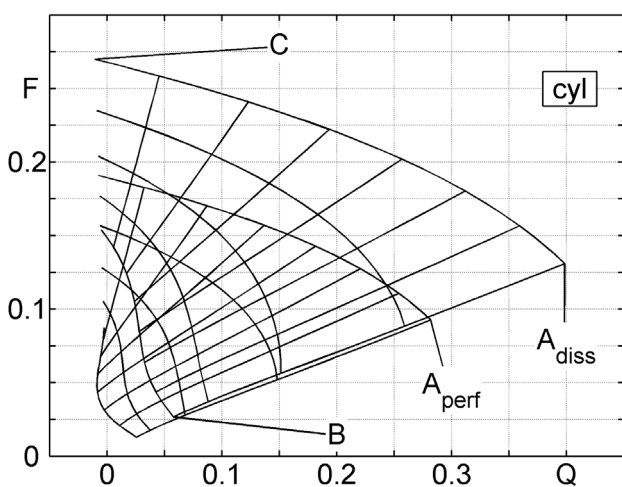


Рис. 9. Зависимость областей  $\Omega = \{(Q, F)\}$  от диссоциации при  $s \equiv 0$

## 6. СИММЕТРИЧНОСТЬ МОЩНОСТИ

Для постоянных законов управления справедливо следующее

**Утверждение.** В условиях (24)–(29) для законов управления  $m \equiv C_1 \in [0; 1]$  и  $\tau_w \equiv C_2 \in [0; 1]$  мощность  $N(m, \tau_w, s)$  обеспечивающей вдув системы симметрична относительно управлений  $m$  и  $\tau_w$ , т.е.

$$\forall s \in [0; 5 \cdot 10^{-4}] (\forall C_1, C_2 \in [0; 1] \Rightarrow \Rightarrow [N(C_1, C_2, s) = N(C_2, C_1, s)]). \quad (30)$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение свойств математической модели управления ЛПС электропроводящего газа на проницаемых цилиндрических и сфери-

ческих поверхностях ГЛА позволяет проанализировать характер влияния постоянных управляющих воздействий (вдува, температурного фактора, магнитного поля) на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики и принять его во внимание при проведении дальнейших исследований, а также использовать для сравнения со случаями более сложных видов управлений, учитывающих конструкторские и газодинамические ограничения.

Работа выполнена:

а) при государственной поддержке научных исследований, проводимых под руководством ведущих учёных в российских вузах (ведущий учёный - С. А. Исаев, КНИТУ-КАИ, г. Казань) по гранту Правительства России № 14.Z50.31.0003;

б) в рамках Государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации № 9.3236.2017/4.6.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дорренс, У. Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа. – М.: Мир, 1966. – 439 с.
2. Дородницын, А. А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя / А. А. Дородницын // Прикладная математика и техническая физика. – 1960. – № 3. – С. 111–118.
3. Лю Шэнь-Цюань. Расчёт ламинарного слоя в сжимаемом газе при наличии отсоса или вдува / Лю Шэнь-Цюань // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1962. – Т. 2. – № 5. – С. 868–883.
4. Павловский, Ю. Н. Численный расчёт пограничного слоя в сжимаемом газе / Ю. Н. Павловский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1962. – Т. 2. – № 5. – С. 884–901.
5. Башкин, В. А. Расчёт уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя методом интегральных соотношений / В. А. Башкин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1968. – Т. 8. – № 6. – С. 1280–1290.
6. Гараев, К. Г. Об оптимальном управлении тепломассообменом в ламинарном по-

граничном слое сжимаемого газа на проницаемых поверхностях / К. Г. Гараев // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1988. – № 3. – С. 92–100.

7. *Bilchenko N. G., Garaev K. G.* On optimum control of laminar boundary layer of electroconductive gas by supersonic flow conditions // Proceedings of 12th NATIONAL HEAT TRANSFER CONFERENCE (UIT). – L'Aquila, Italy. – 1994. – P. 213–224.

8. *Бильченко, Н. Г.* Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 1. – С. 5–14.

9. *Бильченко, Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 83–94.

10. *Бильченко, Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2015. – № 1. – С. 5–8.

11. *Бильченко, Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения

«простых» законов вдува / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 95–102.

12. *Бильченко, Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – №3. – С. 5–11.

13. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. III. О постановке двумерных задач и областях допустимых значений «тепло - трение» / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2017. – № 1. – С. 18–25.

14. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Об одном специальном случае значения управления (температурного фактора) в точке торможения гиперзвукового потока / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2017. – № 4. – С. 5–12.

15. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* О предельных значениях температурного фактора в точке торможения на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 18–20 декабря 2017 г. – Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2017. – С. 581–586.



**Бильченко Григорий Григорьевич** – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Лаборатории Моделирования Физико-Технических Процессов (при кафедре Теплотехники и Энергетического Машиностроения) Казанского Национального Исследовательского Технического Университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева,  
Казань, Российская Федерация.  
Тел.: +7-905-319-1843  
E-mail: ggbil2@gmail.com

**Бильченко Наталья Григорьевна** – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Лаборатории Моделирования Физико-Технических Процессов (при кафедре Теплотехники и Энергетического Машиностроения) Казанского Национального Исследовательского Технического Университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева,  
Казань, Российская Федерация.  
Тел.: +7-905-319-1842,  
E-mail: bilchnat@gmail.com

**Bilchenko Grigoriy Grigorievich** – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher of Laboratory of Modeling of Physical and Technical Processes, Department of Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev, Kazan, Russian Federation.  
Tel.: +7-905-319-1843,  
E-mail: ggbil2@gmail.com

**Bilchenko Natalya Grigorievna** – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher of Laboratory of Modeling of Physical and Technical Processes, Department of Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev, Kazan, Russian Federation.  
Tel.: +7-905-319-1842,  
E-mail: bilchnat@gmail.com