УДК 517.97 *Посвящается памяти А. Е. Барабанова (1954–2017)*

# УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ В СРЕДНЕМ РЕШЕНИЕ

**В. Г. Задорожний*, Г. А. Курина****

**,** Воронежский государственный университет,*
***Воронежский экономико-правовой институт,*
***Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН)*

**Поступила в редакцию 29.09.2018 г.**

**Аннотация.** Результаты этой статьи были представлены на 11-й Российской мультиконференции по проблемам управления (Санкт-Петербург, 2–4 октября 2018). Получена формула для математического ожидания решений линейного неоднородного уравнения диффузии с одной пространственной переменной и случайными коэффициентами. Для этого сначала находится вспомогательное не случайное дифференциальное уравнение с обычными и вариационными производными и детерминированное начальное условие. Для частного случая рассматриваемого уравнения, а именно уравнения теплопроводности, в котором коэффициент перед неизвестной функцией является гауссовым или равномерно распределенным, приводятся условия существования периодических в среднем решений. Если рассматривать неоднородность в качестве управляющей функции, то полученные результаты можно трактовать как нахождение управления, обеспечивающего периодичность математического ожидания решения.
**Ключевые слова:** линейные дифференциальные уравнения со случайными коэффициентами, вариационная производная, математическое ожидание решения и его периодичность.
**Annotation.** The results of this paper have been presented at the 11-th Russian Multiconference on control problems (St. Petersburg, 2–4 October 2018). The formula for the expectation of solutions of a linear diffusion equation with one spatial variable and random coefficients has been obtained. For this we find firstly an auxiliary non-random differential equation with ordinary and variational derivatives and a determinate initial condition. For the particular case of the equation under consideration, namely the heat equation, in which the coefficient in front of an unknown function is Gaussian or uniformly distributed, conditions for the existence of mean periodic solutions are given. If we consider the non-homogeneity as a control function, then obtained results can be interpreted as finding a control that ensures the periodicity of the expectation of a solution.
**Keywords:** linear-quadratic differential equations with periodic coefficients, variation derivative, expectation of the solution and its periodicity.

## ВВЕДЕНИЕ

Содержание настоящей статьи докладывалось на 11-й Российской мультиконференции по проблемам управления (Санкт-Петербург, 2-4 октября 2018г.) на секции «Обработка сигналов в системах управления и связи» [1], посвященной памяти выдающегося ученого Андрея Евгеньевича Барабанова, широко известные во всем мире работы которого оказали заметное влияние на формирование современного облика математической кибернетики. Необычайно широк круг его прикладных исследований, в частности, им разработаны и внедрены методы слежения из космоса за движущимися объектами, система радиолокационного сопровождения и управления движением морских объектов, системы кодирования и декодирования речевого сигнала, алгоритмы и программы акустической эхокомпенсации, автопилот вертолета, опирающийся на данные системы видеонаблюдения, модель коммуникационных сигналов дельфинов и эффективный алгоритм определения, какому из видов принадлежит записанный сигнал.

Хорошо известны (см., например, [2], с. 90–98) условия существования периодического решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения при условии, что коэффициент при искомой функции и правая часть являются детерминированными периодическими функциями.

Задача существенно усложняется, если коэффициенты являются случайными процессами.

Приведем здесь некоторые результаты из [3, 4], касающиеся условий, обеспечивающих периодичность математического ожидания и дисперсионной функции решений скалярных обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка со случайными коэффициентами.

Решение дифференциального уравнения со случайными коэффициентами называется периодическим в среднем, если его математическое ожидание является периодической функцией.

Предположим, что коэффициент при неизвестной и правая часть являются независимыми случайными процессами, заданными характеристическими функционалами. При этом не предполагается представление коэффициентов в виде суммы детерминированной функции и белого шума.

Далее используется понятие вариационной производной. Напомним её определение (см., например, [5], с. 14).

Пусть $y$ – функционал на пространстве $L_1(\mathbb{R}_+)$ комплекснозначных функций, интегрируемых на $\mathbb{R}_+$, т. е. $y : L_1(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{C}$, и $v \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $h \in L_1(\mathbb{R}_+)$. Если

$$y(v+h) - y(v) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t,v) h(t)\, dt + o(h),$$

где интеграл понимается в смысле Лебега и является линейным ограниченным относительно $h$ функционалом на $L_1(\mathbb{R}_+)$, а $o(h)$ обозначает бесконечно малую высшего порядка относительно $h$, то отображение $\varphi : \mathbb{R}_+ \times L_1(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{C}$ называется вариационной производной функционала $y$ в точке $v$ и обозначается $\dfrac{\delta y(v)}{\delta v(t)}$.

Для нахождения математического ожидания решения сначала строится вспомогательное детерминированное дифференциальное уравнение первого порядка с обычной и вариационной производными и с детерминированным начальным условием. Выясняется, что это уравнение интегрируется, т. е. получается формула для общего решения. Определяются условия, при которых вспомогательное уравнение имеет периодическое решение, находится формула для такого решения.

Чтобы определить вторую моментную функцию решения, вводится новое вспомогательное отображение. Для этого отображения получается детерминированное дифференциальное уравнение, содержащее обычную производную и вариационные производные. Также находится детерминированное начальное условие для решения уравнения. Однако полученная задача имеет бесчисленное множество решений и возникает проблема выбора соответствующего решения. Поскольку вторая моментная функция решения является симметричной функцией двух переменных, то ищется симметричное по этим переменным решение вспомогательной задачи. Такое решение оказывается единственным, и оно выписывается в явном виде. Анализ вида решения позволяет найти условия, при которых решение вспомогательного уравнения оказывается периодическим. Из этого решения находится формула для периодической второй моментной функции. Так как вторая моментная функция симметрична, то получается периодическая вторая моментная функция по обеим переменным. С помощью формулы для второй моментной функции получается вид дисперсионной функции.

Приводятся условия, при которых формула для периодического математического ожидания решения совпадает с формулой периодического решения соответствующего детерминированного уравнения.

Решение дифференциального уравнения со случайными коэффициентами называется периодическим в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсионная функция являются периодическими с одинаковыми периодами.

При условии, что коэффициент при искомой функции является гауссовым случайным процессом или имеет равномерное распределение, в [3, 4] получены условия существования периодического в среднем решения и явная формула для периодического математического ожидания. Для этих случаев найдены условия существования периодических в широком смысле решений и формула для периодической дисперсионной функции. Рассмотрен также и более сложный резонансный случай, когда линейное однородное уравнение со случайным коэффициентом допускает ненулевое периодическое в среднем решение.

В настоящей статье рассматривается задача Коши для неоднородного линейного дифференциального уравнения диффузии с одной пространственной переменной, коэффициенты которого являются статистически независимыми случайными гауссовыми процессами. Предполагается, что случайные процессы заданы характеристическими функционалами.

Получено вспомогательное не случайное дифференциальное уравнение с обычными и вариационными производными и детерминированное начальное условие. Найдены явное представление для обобщенного решения вспомогательной задачи и явный вид математического ожидания обобщенного решения исходной задачи для уравнения диффузии.

Для частного случая рассматриваемого уравнения, а именно уравнения теплопроводности, приводятся условия существования периодических в среднем решений.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

### *1.1. Постановка задачи*

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon_1(t,\omega)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon_2(t,\omega)u + f(t,x,\omega), \quad (1)$$

$$u(0,x) = u_0(x,\omega), \quad (2)$$

где $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_2$, $f$, $u_0$ – случайные процессы, $\omega$ – случайное событие. Если $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $f$, $u_0$ не являются случайными процессами, то решение задачи известно (см., например, [6], с. 64 и [7], с. 218). Если $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_2$, $f$, $u_0$ – случайные процессы, то решение также является случайным процессом. Мы не ставим себе задачей определить функцию распределения либо плотность распределения, либо характеристический функционал решения – эти задачи пока достаточно сложны. Мы находим математическое ожидание $M(u(t,x))$ решения задачи (1), (2). Для этого применяем метод, основанный на сведении задачи к не случайному дифференциальному уравнению с обычными и вариационными производными (см. [5]).

### *1.2. Сведение к детерминированной задаче*

Пусть $L_1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ – пространство суммируемых на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ функций. Введем обозначение

$$e(v_1,v_2,z) = \exp( \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}_+}[\ \varepsilon_1(s)v_1(s) + \varepsilon_2(s)v_2(s)]ds + i\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_+} f(s,\tau)z(s,\tau)\,ds\,d\tau),$$

где $i = \sqrt{-1}$, $v_1, v_2 \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $z \in L_1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Будем предполагать, что известен характеристический функционал (см., например, [5], с. 30) $\psi(v_1,v_2,z) = M(e(v_1,v_2,z))$ случайных процессов $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $f$. Здесь математическое ожидание $M$ вычисляется по функции распределения процессов $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $f$.

Умножим уравнение (1) и условие (2) на $e(v_1,v_2,z)$ и вычислим математическое ожидание полученных выражений

$$M\left(\frac{\partial u}{\partial t}e(v_1,v_2,z)\right) \tag{3}$$
$$=M\left(\varepsilon_1(t,\omega)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e(v_1,v_2,z)\right)$$
$$+M\left(\varepsilon_1(t)ue(v_1,v_2,z)\right)$$
$$+M\left(f(t,x,\omega)e(v_1,v_2,z)\right),$$
$$M\left(u(0,x)e(v_1,v_2,z)\right)=M\left(u_0(x)e(v_1,v_2,z)\right). \tag{4}$$

В дальнейшем зависимость случайных процессов от случайного события $\omega$ в записи не отражается и предполагается, что $u_0$ не зависит от случайных процессов $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $f$.

Введем отображение

$$y(t,x,v_1,v_2,z)=M\left(u(t,x)e(v_1,v_2,z)\right).$$

Отметим, что $y(t,x,0,0,0)=M\left(u(t,x)\right)$. Равенства (3), (4) (формально) можно записать с помощью $y$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-i\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\delta_p y}{\delta v_1(t)}-i\frac{\delta_p y}{\delta v_2(t)}-i\frac{\delta_p \psi}{\delta z(t,x)}, \tag{5}$$
$$y(0,x,v_1,v_2,z)=M\left(u_0(x)\right)\psi(v_1,v_2,z). \tag{6}$$

Здесь, например, $\dfrac{\delta_p y}{\delta v_1(t)}$ – частная вариационная производная по переменной $v_1$. Задача (5), (6) является детерминированной (не зависит от случайного события $\omega$), и содержит обычные и вариационные производные. Задача получена формально, но естественным является следующее

**Определение.** Математическим ожиданием $M\left(u(t,x)\right)$ решения задачи (1), (2) называется $y(t,x,0,0,0)$, где $y(t,x,v_1,v_2,z)$ – решение задачи (5), (6).

### *1.3. Решение задачи (5), (6)*

Пусть процессы $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $f$ независимы, являются гауссовыми и заданы характеристическими функционалами

$$\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)=\exp(i\int_{\mathbb{R}_+}a_{\varepsilon_1}(s)v_1(s)ds$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+}b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)ds_1ds_2),$$
$$\varphi_{\varepsilon_2}(v_2)=\exp(i\int_{\mathbb{R}_+}a_{\varepsilon_2}(s)v_2(s)ds$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+}b_{\varepsilon_2}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)ds_1ds_2),$$
$$\varphi_f(z)=exp(i\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}a_f(s,\xi)z(s,\xi)d\xi ds$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}b_f(s_1,\xi_1,s_2,\xi_2)z(s_1,\xi_1)$$
$$\times z(s_2,\xi_2)d\xi_1ds_1d\xi_2ds_2),$$

где

$$a_{\varepsilon_1}(s)=M\left(\varepsilon_1(s)\right)\geq 0,$$
$$a_{\varepsilon_2}(s)=M\left(\varepsilon_2(s)\right),\ a_f(s,\xi)=M\left(f(s,\xi)\right),$$
$$b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)=M\left(\varepsilon_1(s_1)\varepsilon_1(s_2)\right)$$
$$-M\left(\varepsilon_1(s_1)\right)M\left(\varepsilon_2(s_2)\right),$$
$$b_{\varepsilon_2}(s_1,s_2)=M\left(\varepsilon_2(s_1)\varepsilon_2(s_2)\right)$$
$$-M\left(\varepsilon_2(s_1)\right)M\left(\varepsilon_2(s_2)\right),$$
$$b_f(s_1,\xi_1,s_2,\xi_2)=M\left(f(s_1,\xi_1)f(s_2,\xi_2)\right)$$
$$-M\left(f(s_1,\xi_1)\right)M\left(f(s_2,\xi_2)\right).$$

Решение задачи (5), (6) будем искать в пространстве обобщенных функций. Пусть $\theta(t)=1$ при $t\geq 0$ и $\theta(t)=0$ при $t<0$,

$$\Phi_1(t,x)=\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

– фундаментальное решение уравнения теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (см., например, [7], с. 191) и $\Phi_2(t,x)$ – фундаментальное решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$. Пусть $\delta$ – дельта-функция, * – знак свертки по переменным $x$, $t$. Определим функцию $\chi(\tau)=\chi(s,t,\tau)$ переменной $\tau$ следующим образом: $\chi(\tau)=sign(\tau-s)$, если $\tau$ принадлежит отрезку с концами $s$, $t$, и равна нулю в противном случае.

В дальнейшем нам потребуется следующая

**Теорема 1.** *([5], с. 166) Пусть $a$ – непрерывная функция на $\mathbb{R}_+$ и функционал $y:L_1(\mathbb{R}_+)\to\mathbb{C}$ имеет вариационную производную $\dfrac{\delta y}{\delta v(t)}$, тогда $Y(t,v)=y\left(v+a\chi(s,t)\right)$ имеет производную $\dfrac{\partial Y(t,v)}{\partial t}$, причем*

$$\frac{\partial Y(t,v)}{\partial t}=a(t)\frac{\delta y(v+a\chi(s,t))}{\delta v(t)}.$$

**Теорема 2.** *Отображение*

$$\begin{gathered}
y=\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}(v_2\\
-i\chi(0,t))\varphi_f(z)\Phi_1\left(\int_0^t a_{\varepsilon_1}(s)ds,x\right)\\
\times\Phi_1\left(i\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_1)ds_1ds_2,x\right)\\
\times\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)ds_1ds_2,x\right)\\
*\Big(M(u_0(x))\delta(t)\Big)\\
+\int_0^t\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}(v_2-i\chi(\tau,t))\\
\times\varphi_f(z)\Phi_1\left(\int_\tau^t a_{\varepsilon_1}(s)ds,x\right)\\
\times\Phi_1\left(i\int_{\mathbb{R}_+}\int_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_1)ds_1ds_2,x\right)\\
\times\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int_\tau^t\int_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)ds_1ds_2,x\right)\\
*\left(-i\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\frac{\delta\varphi_f(z)}{\delta z(\tau,x)}\right)d\tau
\end{gathered}\tag{7}$$

*является решением задачи (5), (6).*

**Доказательство** проведем подстановкой (7) в уравнения (5), (6). Частную производную по первому аргументу от функции $g$ будем обозначать $D_1g$. Используя предыдущую теорему 1, находим производную по переменной $t$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial y}{\partial t}=-i\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\frac{\delta\varphi_{\varepsilon_2}(v_2-i\chi(0,t))}{\delta v_2(t)}\\
\times\varphi_f(z)\Phi_1\left(\int_0^t a_{\varepsilon_1}(s)ds,x\right)\\
\times\Phi_1\left(i\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_1)ds_1ds_2,x\right)\\
\times\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)ds_1ds_2,x\right)*\Big(M(u_0(x))\delta(t)\Big)\\
+\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}(v_2-i\chi(0,t))\varphi_f(z)\\
\times D_1\left(\Phi_1\left(\int_0^t a_{\varepsilon_1}(s)ds,x\right)\right)a_{\varepsilon_1}(t)\\
\times\Phi_1\left(i\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_1)ds_1ds_2,x\right)\\
\times\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)ds_1ds_2,x\right)*\Big(M(u_0(x))\delta(t)\Big)\\
+\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}(v_2-i\chi(0,t))\varphi_f(z)\Phi_1\left(\int_0^t a_{\varepsilon_1}(s)ds,x\right)\\
\times D_1\left(\Phi_1\left(i\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_1)ds_1ds_2,x\right)\right)\\
\times\left(i\int_{\mathbb{R}_+}b_{\varepsilon_1}(s_1,t)v_1(s_1)ds_1\right)\\
\times\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)ds_1ds_2,x\right)*\Big(M(u_0(x))\delta(t)\Big)\\
+\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}(v_2-i\chi(0,t))\varphi_f(z)\Phi_1\left(\int_0^t a_{\varepsilon_1}(s)ds,x\right)\\
\times\Phi_1\left(i\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_1)ds_1ds_2,x\right)\\
\times D_1\left(\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)ds_1ds_2,x\right)\right)\\
\times\int_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,t)ds_1*\Big(M(u_0(x))\delta(t)\Big)\\
+\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}(v_2)\varphi_f(z)\Phi_1^2(0,x)\Phi_2(0,x)\\
*\left(-i\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\frac{\delta\varphi_f(z)}{\delta z(t,x)}\right)\\
-i\int_0^t\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\frac{\delta\varphi_{\varepsilon_2}(v_2-i\chi(\tau,t))}{\delta v_2(t)}\varphi_f(z)\\
\times\Phi_1\left(\int_\tau^t a_{\varepsilon_1}(s)ds,x\right)\\
\times\Phi_1\left(i\int_{\mathbb{R}_+}\int_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_1)ds_1ds_2,x\right)\\
\times\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int_\tau^t\int_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)ds_1ds_2,x\right)d\tau\\
*\left(-i\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\frac{\delta\varphi_f(z)}{\delta z(t,x)}\right)
\end{gathered}\tag{8}$$

$$+\int_0^t \varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}(v_2 - i\chi(\tau,t))\varphi_f(z)$$

$$\times D_1(\Phi_1\left(\int_\tau^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds, x\right))a_{\varepsilon_1}(t)$$

$$\times\Phi_1\left(i\int_{\mathbb{R}_+}\int_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_1)\,ds_1ds_2, x\right)$$

$$\times\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int_\tau^t\int_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2, x\right)*\left(-i\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\frac{\delta\varphi_f(z)}{\delta z(\tau,x)}\right)d\tau$$

$$+\int_0^t \varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}(v_2 - i\chi(\tau,t))\varphi_f(z)\Phi_1\left(\int_\tau^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds, x\right)$$

$$\times D_1(\Phi_1\left(i\int_{\mathbb{R}_+}\int_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_1)\,ds_1ds_2, x\right))$$

$$\times\left(i\int_{\mathbb{R}_+} b_{\varepsilon_1}(s_1,t)v_1(s_1)\,ds_1\right)$$

$$\times\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int_\tau^t\int_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2, x\right)$$

$$*\left(-i\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\frac{\delta\varphi_f(z)}{\delta z(\tau,x)}\right)d\tau$$

$$+\int_0^t \varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}(v_2 - i\chi(\tau,t))\varphi_f(z)\Phi_1\left(\int_\tau^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds, x\right)$$

$$\times\Phi_1\left(i\int_{\mathbb{R}_+}\int_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_1)\,ds_1ds_2, x\right)$$

$$\times D_1(\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int_\tau^t\int_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2, x\right))\int_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,t)\,ds_1$$

$$*\left(-i\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\frac{\delta\varphi_f(z)}{\delta z(\tau,x)}\right)d\tau.$$

Технику вариационного дифференцирования можно найти в [5]. Вычислим вариационную производную от $y$

$$\frac{\delta_p y}{\delta v_1(t)} = \varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}(v_2 - i\chi(0,t))\varphi_f(z)$$

$$\times\left(ia_{\varepsilon_1}(t) - \int_{\mathbb{R}_+} b_{\varepsilon_1}(s_1,t)v_1(s_1)\,ds_1\right)$$

$$\times\Phi_1\left(\int_0^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds, x\right)$$

$$\times\Phi_1\left(i\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_1)\,ds_1ds_2, x\right)$$

$$\times\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2, x\right)*\left(M(u_0(x))\delta(t)\right)$$

$$+\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}(v_2 - i\chi(0,t))\varphi_f(z)\Phi_1\left(\int_0^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds, x\right)$$

$$\times D_1(\Phi_1\left(i\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_2)\,ds_1ds_2, x\right))$$

$$\times\left(i\int_0^t b_{\varepsilon_1}(t,s_2)\,ds_2\right)$$

$$\times\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2, x\right)*\left(M(u_0(x))\delta(t)\right)$$

$$+\int_0^t \varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}(v_2 - i\chi(\tau,t))$$

$$\times\varphi_f(z)\left(ia_{\varepsilon_1}(t) - \int_{\mathbb{R}_+} b_{\varepsilon_1}(s_1,t)v_1(s_1)\,ds_1\right)$$

$$\times\Phi_1\left(\int_\tau^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds, x\right)\Phi_1\left(i\int_{\mathbb{R}_+}\int_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_1)\,ds_1ds_2, x\right)$$

$$\times\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int_\tau^t\int_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2, x\right)$$

$$*\left(-i\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\frac{\delta\varphi_f(z)}{\delta z(\tau,x)}\right)d\tau$$

$$+\int_0^t \varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}(v_2 - i\chi(\tau,t))\varphi_f(z)\Phi_1\left(\int_\tau^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds, x\right)$$

$$\times D_1\left(\Phi_1\left(i\int_{R_+}\int_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_2)\,ds_1ds_2, x\right)\right)$$

$$\times(i\int_0^t b_{\varepsilon_1}(t,s_2)\,ds_2\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int_\tau^t\int_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2, x\right)$$

$$*\left(-i\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\frac{\delta\varphi_f(z)}{\delta z(\tau,x)}\right)d\tau$$

$$+\int_0^t \varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}(v_2 - i\chi(\tau,t))\varphi_f(z)\Phi_1\left(\int_\tau^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds, x\right)$$

$$\times\Phi_1\left(i\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_1)\,ds_1ds_2, x\right)$$

$$\times\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int\limits_\tau^t\int\limits_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2,x\right)$$

$$*\left(-i\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\left(ia_{\varepsilon_1}(t)-\int\limits_{\mathbb{R}_+}b_{\varepsilon_1}(s_1,t)v_1(s_1)\,ds_1\right)\frac{\delta\varphi_f(z)}{\delta z(\tau,x)}\right)d\tau.$$

Подобным образом находятся другие вариационные производные из (5).

Поскольку $\Phi_1$, $\Phi_2$ – фундаментальные решения, то выполняются условия

$$D_1\Phi_1\left(\int\limits_0^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds,x\right)$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_1\left(\int\limits_0^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds,x\right)+\delta\left(\int\limits_0^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds,x\right),$$

$$D_1\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2,x\right)$$

$$=\frac{\partial^4}{\partial x^4}\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2,x\right)$$

$$+\delta\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2,x\right),$$

$$\Phi_1(0,x)=\delta(x),\Phi_2(0,x)=\delta(x)$$

и оператор $\dfrac{\partial}{\partial x}$ коммутирует с $\Phi_1$, $\Phi_2$. Далее,

$$\delta\left(\int\limits_0^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds,x\right)*\left(M\left(u_0(x)\right)\delta(t)\right)=0,$$

$$M\left(u_0(x)\delta(t)\right)*\delta\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2,x\right)=0.$$

Подставляя найденные выражения в уравнение (5) и используя последние замечания, получаем тождество. Наконец,

$$y(0,x,v_1,v_2,z)=\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}\left(v_2-i\chi(0,t)\right)\varphi_f(z)$$

$$\times\Phi_1\left(\int\limits_0^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds,x\right)$$

$$\times\Phi_1\left(i\int\limits_{\mathbb{R}_+}\int\limits_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)v_1(s_1)\,ds_1ds_2,x\right)$$

$$\times\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2,x\right)*\left(M\left(u_0(x)\right)\delta(t)\right)\Big|_{t=0}$$

$$=\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}(v_2)\varphi_f(z)M\left(u_0(x)\right).$$

Следовательно, выполняется и начальное условие (6). Теорема доказана.

### *1.4. Математическое ожидание решения задачи (1), (2)*

**Теорема 3.** *Математическое ожидание решения задачи (1), (2) представимо в виде*

$$M\left(u(t,x)\right)=exp(\int\limits_0^t\varepsilon_2(\tau)\,d\tau \tag{10}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_{\varepsilon_2}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2)\frac{\theta\left(\int_0^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds\right)}{\sqrt{2\pi\int_0^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds}}$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}}M\left(u_0(\xi)\right)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\int_0^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds}\right)$$

$$\times\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2,x-\xi\right)d\xi$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\left(\int\limits_\tau^t\varepsilon_2(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_\tau^t\int\limits_\tau^t b_{\varepsilon_2}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2\right)$$

$$\times\frac{M\left(f(\tau,\xi)\right)}{\sqrt{2\pi\int_\tau^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\int_\tau^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds}\right)$$

$$\times\Phi_2\left(\frac{1}{2}\int\limits_\tau^t\int\limits_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2,x-\xi\right)d\xi d\tau.$$

**Доказательство.** Для нахождения математического ожидания $M\left(u(t,x)\right)$ нужно в выражении (7) положить $v_1=0,\ v_2=0,\ z=0.$ При этом

$$\varphi_{\varepsilon_1}(0)=1,\varphi_f(0)=1,$$

$$\Phi_1(0,x)=\delta(x),\Phi_2(0,x)=\delta(x),$$

$$\frac{\delta\varphi_f(z)}{\delta z(t,x)}\Big|_{z=0}=iMf(t,x),\varphi_{\varepsilon_2}\left(-i\chi(s,t)\right)$$

$$=\exp\left(\int\limits_s^t\varepsilon_2(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_s^t\int\limits_s^t b_{\varepsilon_2}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2\right).$$

В итоге получаем

$$M\left(u(t,x)\right)=\varphi_{\varepsilon_2}\left(-i\chi(0,t)\right)\Phi_1\left(\int\limits_0^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds,x\right)$$

$$\times\Phi_2\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2,x\right)\delta(x)$$

$$*M\left(u_0(x)\delta(t)\right)$$

$$+\int_0^t \varphi_{\varepsilon_2}\left(-i\chi(\tau,t)\right)\Phi_1\left(\int_\tau^t a_{\varepsilon_1}(s)\,ds, x\right)$$

$$\times\Phi_2\left(\int_\tau^t\int_\tau^t b_{\varepsilon_1}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2, x\right)\delta(x)*M\left(f(t,x)\right).$$

Подставив выражение для $\Phi_1$ и вычислив свертки, получаем (10). Теорема доказана.

## 2. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ В СРЕДНЕМ РЕШЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим частный случай уравнения (1), а именно уравнение теплопроводности вида

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\varepsilon(t)y+f(t,x), t\in\mathbb{R}_+,\ x\in\mathbb{R}, \quad (11)$$

при условии

$$y(0,x)=y_0(x),$$

где $\varepsilon(t)$ и $f(t,x)$ являются независимыми случайными процессами, заданными характеристическими функционалами $\varphi_\varepsilon(v)$ и $\varphi_f(z)$.

Приведем условия периодичности в среднем решения уравнения (11) при $t\in\mathbb{R}_+$ для гауссова случайного процесса $\varepsilon(t)$ с характеристическим функционалом вида

$$\varphi_\varepsilon(v)=\exp(i\int_{\mathbb{R}_+}M\left(\varepsilon(s)\right)v(s)\,ds \quad (12)$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+}b(s_1,s_2)v(s_1)v(s_2)\,ds_1ds_2),$$

где $M\left(\varepsilon(s)\right)$ – математическое ожидание, а $b(s_1,s_2)=M\left(\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)\right)-M\left(\varepsilon(s_1)\right)M\left(\varepsilon(s_2)\right)$ – ковариационная функция случайного процесса $\varepsilon(t)$.

Полугруппа, определяемая дифференциальным оператором второго порядка по переменной $x$, задается соотношениями

$$U_x(t)z(\nu,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right)z(\nu,x-\tau)\,d\tau,$$

$t\in\mathbb{R}_+$,

$$U_x(0)=I,$$

где $\nu\in\mathbb{R}$ – некоторый параметр, $I$, как обычно, означает тождественный оператор.

Введем оператор $W(t,s)$ следующим образом:

$$W(t,s)\left(z(\nu,x)\varphi(u)\right)$$

$$=U_x(t)U_x^{-1}(s)z(\nu,x)V(t,s)\varphi(u),$$

где оператор $V(t,s):C\left(L_1(\mathbb{R}_+)\right)\to C\left(L_1(\mathbb{R}_+)\right)$ определяется посредством соотношения

$$V(t,s)\varphi(u)=\varphi\left(u-i\chi(s,t)\right).$$

**Теорема 4.** *Если $\varepsilon(t)$ – гауссов случайный процесс, $M\left(\varepsilon(t)\right)$ – $\omega$-периодическая функция, $b(t,s)$ – $\omega$-периодическая функция по обеим переменным, $M\left(f(t,x)\right)$ – $\omega$-периодическая по $t\in\mathbb{R}_+$ непрерывная функция и оператор $I-W(\omega,0)$ обратим, тогда*

$$M\left(y(t,x)\right)=[W(t,0)\left(W(0,\omega)-I\right)^{-1}$$

$$\times\int_t^{t+\omega}W(0,s)\left(M\left(f(s,x)\right)\varphi_\varepsilon(v)\right)ds]\big|_{v=0}$$

*является $\omega$-периодическим по $t\in\mathbb{R}_+$ математическим ожиданием решения уравнения (11).*

**Следствие 1.** Если случайный процесс $\varepsilon(t)$ задается характеристическим функционалом (12) и предположения теоремы 4 выполняются, тогда

$$M\left(y(t,x)\right)=[\left(W(0,\omega)-I\right)^{-1}$$

$$\times\int_t^{t+\omega}U_x(t)U_x^{-1}(s)(M\left(f(s,x)\right)$$

$$\times\exp(i\int_{\mathbb{R}_+}M\left(\varepsilon(s)\right)v(s)\,ds-\int_t^s M\left(\varepsilon(s)\right)ds$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+}b(s_1,s_2)v(s_1)v(s_2)\,ds_1ds_2$$

$$-i\int_{\mathbb{R}_+}\int_t^s b(s_1,s_2)v(s_1)\,ds_2ds_1$$

$$+\frac{1}{2}\int_t^s\int_t^s b(s_1,s_2)\,ds_1ds_2)ds]\big|_{v=0}$$

является $\omega$-периодическим по $t\in\mathbb{R}_+$ математическим ожиданием решения уравнения (11).

**Замечание 1.** Из обратимости оператора $I-W(\omega,0)$ следует, что однородное уравнение, соответствующее (11), не имеет отличных от нуля $\omega$-периодических в среднем решений.

**Замечание 2.** Аналогичным образом периодические в среднем решения уравнения (11) могут быть получены для равномерно распределенного случайного процесса $\varepsilon(t)$ с характеристическим функционалом, заданным формулой

$$\varphi_\varepsilon(v) = \frac{\sin\int_{\mathbb{R}_+} a(s)v(s)ds}{\int_{\mathbb{R}_+} a(s)v(s)ds} \exp\left(i\int_{\mathbb{R}_+} \xi(s)v(s)ds\right),$$

где $a(s) \geq 0$ и $\xi(s) = M(\varepsilon(s))$ – заданные непрерывные функции.

Если $a(s) \equiv 0$, тогда мы предполагаем, что

$$\varphi_\varepsilon(v) = \exp\left(i\int_{\mathbb{R}_+} \xi(s)v(s)ds\right).$$

Основной результат этого раздела был представлен на симпозиуме «Partial differential equations and applications» (Болонья, 2017) [8].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Если рассматривать неоднородность в уравнении в качестве управляющей функции, то полученные результаты можно трактовать как нахождение управления, обеспечивающего периодичность математического ожидания решения.

Представляет интерес получение формулы для второй моментной функции решений неоднородного линейного дифференциального уравнения диффузии, коэффициенты которого являются статистически независимыми случайными гауссовыми процессами.

*Работа второго автора была поддержана Российским научным фондом (проект 17-11-01220).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Задорожний, В. Г.* О периодических в среднем решениях линейных неоднородных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами / В. Г. Задорожний, Г. А. Курина // Материалы конференции «Информационные технологии в управлении» (ИТУ-2018): электронный ресурс. – Санкт-Петербург : АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2018. – С. 425–434.

2. *Якубович, В. А.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. – Москва : Изд-во Наука, 1972. – 720 с.

3. *Задорожний, В. Г.* Периодические в среднем решения линейного дифференциального уравнения первого порядка / В. Г. Задорожний, Г. А. Курина // Доклады академии наук. – 2013. – Т. 450, № 5. – С. 505–510.

4. *Задорожний, В. Г.* Периодические в среднем решения линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка со случайными коэффициентами / В. Г. Задорожний, Г. А. Курина // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 6. – С. 726–744.

5. *Задорожний, В. Г.* Методы вариационного анализа / В. Г. Задорожний. – Ижевск : РХД, 2006. – 316 с.

6. *Бутковский А. Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – Москва : Наука, 1979. – 224 с.

7. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров – Москва : Наука, 1976. – 280 с.

8. *Kurina, G.* Mean periodic solutions of a inhomogeneous heat equation with random coefficients / G. Kurina // Booklet of abstracts, Partial Differential Equations and Applications, Bologna, May 22th-26th, 2017. – P. 15. – www.mathematics.unibo.it/.../workshop-partial-differential-e...

**Задорожний Владимир Григорьевич** – д-р физ.-мат. наук, профессор, Воронежский государственный университет.
Тел.: +7-908-143-2616
E-mail: zadorozhny@amm.vsu.ru

**Курина Галина Алексеевна** – д-р физ.-мат. наук, профессор, Воронежский государственный университет, Воронежский экономико-правовой институт, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН).
Тел.: +7-4732-208690, +7-906-584-1966
E-mail: kurina@math.vsu.ru

**Zadorozhniy Vladimir Grigor'evich** – doctor of physical and mathematical sciences, professor, Voronezh State University.
Tel.: +7-908-143-2616
E-mail: zadorozhny@amm.vsu.ru

**Kurina Galina Alekseevna** – doctor of physical and mathematical sciences, professor, Voronezh State University, Institute of Law and Economics, Federal Research Center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences.
Tel.: +7-4732-208690, +7-906-584-1966
E-mail: kurina@math.vsu.ru