УДК 519.62:539.215

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ СВЯЗНЫХ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

О. А. Фролова

Воронежский государственный университет,
ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж)

Поступила в редакцию 28.10.2018 г.

Аннотация. В статье рассматривается математическая модель кинематики осесимметричной задачи сыпучего материала с микроструктурой. Представлены численные методы позволяющие решать уравнения описывающие поле скоростей перемещений для сыпучих материалов с микроструктурой. Рассмотрены два случая напряженно-деформированного состояния цилиндрической области. В первом случае получено аналитическое решение для поля скоростей перемещений. Для второго случая предложены численные методы решения дифференциальных уравнений третьего порядка с граничными условиями для скоростей перемещений. Разработан алгоритм, реализующий численные методы нахождения поля скоростей перемещений сыпучих материалов в осесимметричной задаче.
Ключевые слова: численные методы, математическое моделирование, поле скоростей перемещений, сыпучие материалы, материал с микроструктурой.
Annotation. A mathematical model of the kinematics of the axisymmetric problem of loose material with a microstructure is considered. Numerical methods for solving the equations describing the velocity field for loose materials with microstructure are presented. Two cases of the stress-strain state of the cylindrical region are considered. In the first case, an analytical solution for the velocity field is obtained. For the second case, numerical methods for solving third-order differential equations with boundary conditions for the velocities of displacements are proposed. An algorithm that implements numerical methods for finding the velocity field of loose materials in an axisymmetric problem is developed.
Keywords: numerical methods, mathematical modeling, velocity field, loose materials, a material with microstructure.

ВВЕДЕНИЕ

При построении математических моделей описывающих напряженно-деформированное состояние связных сыпучих материалов необходимо учитывать множество различных параметров, которые присущи реальным материалам. Однако на практике построить модель, которая учитывала бы большинство параметров сыпучих материалов, не представляется возможным в виду сложности такой модели. В работах [1-7] представлены модели сыпучих материалов, учитывающие параметры материала с различными степенями допущений и различными подходами к описанию данных материалов. Для построения моделей сыпучих материалов используются подходы, основанные на моделях: сплошных сред, вязких жидкостей и многие другие, которые с разной степенью приближения позволяют описывать сыпучие материалы.

Решение уравнений описывающих кинематику моделей связного сыпучего материала с микроструктурой приводит к дифференциальным уравнениям третьего порядка, имеющими коэффициент при старшей производной, решить которые в явном виде не удается. Подбор численных методов решения таких уравнений является одной из важных задач. В данной статье рассмотрим осесимметричную задачу деформирования связной сыпучей среды с микроструктурой в предельном и общем случае. Для предельного случая рассмотрим алгоритм построения аналитического решения, а для общего случая – численного решения поставленной задачи.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ОПИСЫВАЮЩЕЙ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Рассмотрим математическую модель описывающую кинематику деформирования сыпучей среды в осесимметричной области. Математическую модель будем строить в цилиндрической системе координат в следующем предположении:

$$\sigma_{rr}=\sigma_{rr}(r,z),\ \sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\theta\theta}(r,z),\ \sigma_{zz}=\sigma_{zz}(r,z),$$
$$\sigma_{rz}=\sigma_{rz}(r,z),\quad \sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta z}=0.$$
$$U_r=U_r(r,z),\ U_\theta=0,\ U_z=U_z(r,z).$$
$$\varepsilon_{rr}^c=\frac{\partial U_r}{\partial r},\ \ \varepsilon_{\theta\theta}^c=\frac{U_r}{r},\ \ \varepsilon_{zz}^c=\frac{\partial U_z}{\partial z},$$
$$\varepsilon_{rz}^c=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_r}{\partial z}+\frac{\partial U_z}{\partial r}\right),\ \varepsilon_{r\theta}^c=\varepsilon_{\theta z}^c=0.$$

Для учета влияния микроструктуры на рассматриваемый материал, введем величину h – параметр микроструктуры. С учетом характерного размера микроструктуры h, тензор скорости деформации примет вид [8]:

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^c+\frac{h^2}{6}\Delta\varepsilon_{ij}^c,$$

где $\varepsilon_{ij}^c=\frac{1}{2}\left(\nabla_j U_i+\nabla_i U_j\right)$ – тензора скорости деформации Коши.

Продифференцировав компоненты тензора скорости деформации Коши в цилиндрической системе координат, получим [9]:

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial U_r}{\partial r}+\frac{h^2}{6}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2}+\frac{\partial^3 U_r}{\partial r^3}+\frac{\partial^3 U_r}{\partial z^2\partial r}\right),$$
$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{U_r}{r}+\frac{h^2}{6}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial U_r}{\partial r}+\frac{1}{r^3}U_r+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$
$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial U_z}{\partial z}+\frac{h^2}{6}\left(\frac{\partial^3 U_z}{\partial z^3}+\frac{\partial^3 U_z}{\partial r^2\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U_z}{\partial r\partial z}\right),$$
$$\varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_r}{\partial z}+\frac{\partial U_z}{\partial r}\right)+\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^3 U_r}{\partial r^2\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U_r}{\partial r\partial z}+\frac{\partial^3 U_r}{\partial z^3}+\frac{\partial^3 U_z}{\partial r^3}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2}+\frac{\partial^3 U_z}{\partial r\partial z^2}\right).$$

При $h\to 0$ внешнее разложение выражения (1) принимает вид тензора скорости деформации Коши, что соответствует классическим моделям теории пластичности.

Рассмотрим внутреннее разложение выражения (1), для чего растянем координату r таким образом, что новая координата $\rho=\frac{r}{h^2}$. При $h\to 0$ в первом приближении получим:

$$\varepsilon_{rr}^{(1)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U_r^{(1)}}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^3 U_r^{(1)}}{\partial\rho^3}\right),$$
$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U_r^{(1)}}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial U_r^{(1)}}{\partial\rho}+\frac{U_r^{(1)}}{\rho^3}\right), \tag{2}$$
$$\varepsilon_{zz}^{(1)}=0,$$
$$\varepsilon_{rz}^{(1)}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U_z^{(1)}}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^3 U_z^{(1)}}{\partial\rho^3}\right).$$

Разложим скорости перемещений в ряд Тейлора по h и ограничимся слагаемыми второго порядка малости [10]:

$$\begin{aligned}U_r&=U_r^{(0)}+h^2U_r^{(1)}+o(h^4),\\ U_z&=U_z^{(0)}+h^2U_z^{(1)}+o(h^4).\end{aligned} \tag{3}$$

Скорости перемещений в нулевом приближении известны [11]:

$$U_r^{(0)}=\frac{U_r(r_0(z),z)}{r_0(z)}r,$$

$$U_z^{(0)}=U_z(r,z_0(r))-2\frac{U_r(r_0(z),z)}{r_0(z)}\Bigg[z-z_0+\frac{(3\beta-1)\sigma_{z0}+3\alpha\mathrm{Y}}{\gamma}\ln\left|\frac{\gamma z-2\beta\sigma_{z0}-2\alpha\mathrm{Y}}{\gamma z_0-2\beta\sigma_{z0}-2\alpha\mathrm{Y}}\right|\Bigg],$$

где $U_r(r_0(z),z)$ – компонента скорости на границе $r=r_0(z)$, $U_z(r,z_0(r))$ – компонента скорости на границе $z=z_0(r)$, $\sigma_{z0}=\mathrm{const}$, $\beta=\frac{1}{3}+\alpha^2-f^2$.

Ассоциированный закон пластического течения связывает напряжения и скорости перемещения:

$$\varepsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}},$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа.

Подставив условие пластичности и продифференцировав, получим:

$$\begin{gathered}
12\lambda\left(\sigma_{rr}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U_r^{(1)}}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^3 U_r^{(1)}}{\partial \rho^3}, \\
12\lambda\left(\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U_r^{(1)}}{\partial \rho^2} - \\
-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial U_r^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{U_r^{(1)}}{\rho^3}, \\
48\lambda\sigma_{rz}^{(1)} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U_z^{(1)}}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^3 U_z^{(1)}}{\partial \rho^3},
\end{gathered} \tag{4}$$

При известном напряженном состоянии [9] уравнения (4) позволяют определить кинематику деформирования сыпучей среды с микроструктурой.

Из второго уравнения (4) выразим λ и подставим в первое и третье уравнения, в результате получим:

$$\begin{gathered}
\rho^3 \frac{\partial^3 U_r^{(1)}}{\partial \rho^3} + \rho^2 \frac{\partial^2 U_r^{(1)}}{\partial \rho^2}\left(1 - F(\rho, \mathrm{z})\right) + \\
+\rho \frac{\partial U_r^{(1)}}{\partial \rho} F(\rho, \mathrm{z}) - U_r^{(1)} F(\rho, \mathrm{z}) = 0,
\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}
\rho^3 \frac{\partial^3 U_z^{(1)}}{\partial \rho^3} + \rho^2 \frac{\partial^2 U_z^{(1)}}{\partial \rho^2} - \\
-P(\rho, \mathrm{z})\left(\rho^2 \frac{\partial^2 U_r^{(1)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial U_r^{(1)}}{\partial \rho} + U_r^{(1)}\right) = 0,
\end{gathered} \tag{6}$$

где $F(\rho, \mathrm{z}) = \dfrac{\sigma_{rr}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}}$, $P(\rho, z) = \dfrac{4\sigma_{rz}^{(1)}}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}}$.

Уравнения (5) и (6) являются дифференциальными уравнениями третьего порядка, описывают модель кинематики деформирования связных сыпучих материалов с микроструктурой для осесимметричной задачи в первом приближении и не могут быть проинтегрированы в явном виде. Для решения уравнений (5) и (6) воспользуемся численными методами.

Для нахождения решений уравнений (5) и (6), на границах рассматриваемой цилиндрической области зададим три граничных условия, причем для нулевого приближения достаточно задать одно граничное условие и получить решение в погранслое на другой границе, третье граничное условие надо задать таким образом, чтобы оно совпадало с внешним нулевым решением на другой границе рассматриваемой области при $\rho \to \infty$.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим случай когда $\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{\theta\theta}^{(1)}$, т. е. $F(\rho, z) = 1$. При принятом предположении уравнение (5) примет вид:

$$\rho^3 \frac{\partial^3 U_r^{(1)}}{\partial \rho^3} + \rho \frac{\partial U_r^{(1)}}{\partial \rho} - U_r^{(1)} = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) является уравнением Эйлера и может быть проинтегрировано, в результате получим:

$$U_r^{(1)} = C_1 \rho + C_2 \ln \rho + C_3 \ln^2 \rho, \tag{8}$$

где C_1, C_2, C_3 – константы определяемые из граничных условий.

Зададим граничные условия на внутренней и внешней границе рассматриваемой цилиндрической области:

при $\rho = \rho_1$ (внутренняя граница)

$$U_r^{(1)} = U_{r1}^{(1)}, \tag{9}$$

при $\rho = \rho_2$ (внешняя граница)

$$U_r^{(1)} = U_{r2}^{(1)}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial U_r^{(1)}}{\partial \rho} = \frac{\partial U_{r2}^{(1)}}{\partial \rho}. \tag{11}$$

Граничные условия (9)–(11) позволяют определить константы C_1, C_2, C_3:

$$\begin{gathered}
C_1 = \frac{U_{r1}^{(1)}}{\rho_1}\left(1 - \frac{\ln \rho_1 \ln \rho_2}{\ln \rho_2 - \ln \rho_1}\right) - \\
-\left(\frac{U_{r2}^{(1)}}{\rho_2} - \frac{U_{r1}^{(1)}}{\rho_1}\right)\left(\frac{\ln \rho_1 (1 + \ln \rho_2)}{\ln \rho_2 - \ln \rho_1} + \ln \rho_1 \ln \rho_2\right) + \\
+\frac{\partial U_{r2}^{(1)}}{\partial \rho} \frac{\ln \rho_1 \ln \rho_2}{\ln \rho_2 - \ln \rho_1},
\end{gathered}$$

$$C_2 = \frac{U_{r1}^{(1)}}{\rho_1}\frac{\ln\rho_2 + \ln\rho_1}{\ln\rho_2 - \ln\rho_1} +$$
$$+\left(\frac{U_{r2}^{(1)}}{\rho_2} - \frac{U_{r1}^{(1)}}{\rho_1}\right)\left(\frac{\ln\rho_1 + \ln\rho_2 + 1}{\ln\rho_2 - \ln\rho_1} + \ln\rho_1 + \ln\rho_2\right) -$$
$$-\frac{\partial U_{r2}^{(1)}}{\partial\rho}\frac{\ln\rho_1 + \ln\rho_2}{\ln\rho_2 - \ln\rho_1},$$

$$C_3 = -\frac{U_{r1}^{(1)}}{\rho_1}\frac{1}{\ln\rho_2 - \ln\rho_1} -$$
$$-\left(\frac{U_{r2}^{(1)}}{\rho_2} - \frac{U_{r1}^{(1)}}{\rho_1}\right)\left(1 + \frac{1}{\ln\rho_2 - \ln\rho_1}\right) +$$
$$+\frac{\partial U_{r2}^{(1)}}{\partial\rho}\frac{1}{\ln\rho_2 - \ln\rho_1}.$$

Подставляя выражение (8) в выражение для λ получим:

$$\lambda = \frac{C_3}{6\rho^2\left(\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}\right)}.$$

Используя выражение для λ в третьем уравнении (4) получим дифференциальное уравнение третьего порядка для определения осевой компоненты скорости перемещения $U_z^{(1)}$ в первом приближении:

$$\frac{\partial^3 U_z^{(1)}}{\partial\rho^3} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U_z^{(1)}}{\partial\rho^2} = \frac{8C_3\sigma_{rz}^{(1)}}{\rho^2\left(\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}\right)}. \quad (12)$$

Найдем общее решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^3 U_z^{(1)}}{\partial\rho^3} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U_z^{(1)}}{\partial\rho^2} = 0, \quad (13)$$

в результате получим:

$$U_{z\,o.o.}^{(1)} = C_1^z + C_2^z\rho + C_3^z\rho\ln\rho,$$

где C_1^z, C_2^z, C_3^z – константы интегрирования однородного уравнения.

Для нахождения решения неоднородного дифференциального уравнения (12) применим метод вариации произвольной постоянной. Пусть решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$U_z^{(1)} = C_1^z(\rho) + C_2^z(\rho)\rho + C_3^z(\rho)\rho\ln\rho, \quad (14)$$

где $C_1^z(\rho)$, $C_2^z(\rho)$, $C_3^z(\rho)$ – неизвестные функции.

Система уравнений для нахождения $C_1^z(\rho)$, $C_2^z(\rho)$, $C_3^z(\rho)$ имеет вид:

$$\left(C_1^z(\rho)\right)' + \rho\left(C_2^z(\rho)\right)' + \rho\ln\rho\left(C_3^z(\rho)\right)' = 0,$$
$$\left(C_2^z(\rho)\right)' + (\ln\rho + 1)\left(C_3^z(\rho)\right)' = 0,$$
$$\frac{1}{\rho}\left(C_3^z(\rho)\right)' = \frac{8C_3\sigma_{rz}^{(1)}}{\rho^2\left(\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}\right)}.$$

В результате решения системы, получим:

$$C_1^z(\rho) = \frac{8\rho C_3\sigma_{rz}^{(1)}}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}} + \tilde{C}_1^z,$$

$$C_2^z(\rho) = -\frac{8C_3\sigma_{rz}^{(1)}}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}}\left(\ln\rho + \frac{\ln^2\rho}{2}\right) + \tilde{C}_2^z,$$

$$C_3^z(\rho) = \frac{8C_3\sigma_{rz}^{(1)}}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}}\ln\rho + \tilde{C}_3^z,$$

где $\tilde{C}_1^z, \tilde{C}_2^z, \tilde{C}_3^z$ – константы интегрирования.

С учетом $C_1^z(\rho)$, $C_2^z(\rho)$, $C_3^z(\rho)$ выражение (14) примет вид:

$$U_z^{(1)} = \frac{8C_3\sigma_{rz}^{(1)}}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}}\left(\rho - \rho\ln\rho + \frac{1}{2}\rho\ln^2\rho\right) +$$
$$+\tilde{C}_1^z + \tilde{C}_2^z\rho + \tilde{C}_3^z\rho\ln\rho.$$

Для определения $\tilde{C}_1^z$, $\tilde{C}_2^z$, $\tilde{C}_3^z$ зададим граничные условия на границах рассматриваемой области:

при $\rho = \rho_1$ (внутренняя граница)

$$U_z^{(1)} = U_{z1}^{(1)}, \quad (15)$$

при $\rho = \rho_2$ (внешняя граница)

$$U_z^{(1)} = U_{z2}^{(1)}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial U_z^{(1)}}{\partial\rho} = \frac{\partial U_{z2}^{(1)}}{\partial\rho}. \quad (17)$$

С учетом условий (15)–(17) выражения для $\tilde{C}_1^z$, $\tilde{C}_2^z$, $\tilde{C}_3^z$ примут вид:

$$\tilde{C}_1^z = \frac{8C_3\sigma_{rz}^{(1)}\rho_2}{\left(\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}\right)\left(\rho_2 - \rho_1(1 + \ln\rho_2 - \ln\rho_1)\right)} \times$$
$$\times\Bigg(\rho_1(1 - \ln\rho_1) - \rho_2(1 - \ln\rho_2) +$$
$$+\frac{\rho_1}{2}\left(\ln^2\rho_1 - \ln^2\rho_2\right)\Bigg) + U_{z2}^{(1)} +$$
$$+\rho_2\frac{\frac{\partial U_{z2}^{(1)}}{\partial\rho}(\rho_2 - \rho_1) + U_{z1}^{(1)} - U_{z2}^{(1)}}{\rho_2 - \rho_1(1 + \ln\rho_2 - \ln\rho_1)} -$$
$$-\rho_2\frac{\partial U_{z2}^{(1)}}{\partial\rho} - \rho_2\frac{8C_3\sigma_{rz}^{(1)}}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}}(1 - \ln\rho_2),$$

$$\tilde{C}_2^z = \frac{-8C_3\sigma_{rz}^{(1)}\left(1+\ln\rho_2\right)}{\left(\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}\right)\left(\rho_2 - \rho_1(1+\ln\rho_2 - \ln\rho_1)\right)} \times$$

$$\times\Big(\rho_1\left(1-\ln\rho_1\right) - \rho_2\left(1-\ln\rho_2\right) +$$

$$+\frac{\rho_1}{2}\left(\ln^2\rho_1 - \ln^2\rho_2\right)\Big) + \frac{\partial U_{z2}^{(1)}}{\partial\rho} -$$

$$-\left(1+\ln\rho_2\right)\frac{\frac{\partial U_{z2}^{(1)}}{\partial\rho}\left(\rho_2-\rho_1\right) + U_{z1}^{(1)} - U_{z2}^{(1)}}{\rho_2 - \rho_1(1+\ln\rho_2 - \ln\rho_1)},$$

$$\tilde{C}_3^z = \frac{8C_3\sigma_{rz}^{(1)}}{\left(\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}\right)\left(\rho_2 - \rho_1(1+\ln\rho_2 - \ln\rho_1)\right)} \times$$

$$\times\Big(\rho_1\left(1-\ln\rho_1\right) - \rho_2\left(1-\ln\rho_2\right) +$$

$$+\frac{\rho_1}{2}\left(\ln^2\rho_1 - \ln^2\rho_2\right)\Big) +$$

$$+\frac{\frac{\partial U_{z2}^{(1)}}{\partial\rho}\left(\rho_2-\rho_1\right) + U_{z1}^{(1)} - U_{z2}^{(1)}}{\rho_2 - \rho_1(1+\ln\rho_2 - \ln\rho_1)},$$

Подставляя найденные значения для компонент скоростей перемещений в нулевом и первом приближении в выражения (3) получим выражения определяющие компоненты скоростей перемещений для рассматриваемой цилиндрической области:

$$U_r = \frac{U_r\left(r_0(z), z\right)}{r_0(z)} r + \qquad (18)$$

$$+h^2\left(C_1\rho + C_2\ln\rho + C_3\ln^2\rho\right),$$

$$U_z = U_z\left(r, z_0(r)\right) - 2\frac{U_r\left(r_0(z), z\right)}{r_0(z)}\Big[z - z_0 +$$

$$+\frac{(3\beta-1)\sigma_{z0} + 3\alpha\Upsilon}{\gamma}\ln\left|\frac{\gamma z - 2\beta\sigma_{z0} - 2\alpha\Upsilon}{\gamma z_0 - 2\beta\sigma_{z0} - 2\alpha\Upsilon}\right|\Big] +$$

$$+h^2\Bigg(\frac{8C_3\sigma_{rz}^{(1)}}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}}\left(\rho - \rho\ln\rho + \frac{1}{2}\rho\ln^2\rho\right)$$

$$+\tilde{C}_1^z + \tilde{C}_2^z\rho + \tilde{C}_3^z\rho\ln\rho\Bigg).$$

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим случай когда $\sigma_{rr}^{(1)} \neq \sigma_{\theta\theta}^{(1)}$. Так как аналитическое решение уравнения (5) не представляется возможным, то рассмотрим численный метод решения уравнения (5) с граничными условиями (9)–(11).

Численное решение поставленной краевой задачи будем выполнять методом стрельбы [12], для чего сведем краевую задачу к задаче Коши. Уравнение (5) представим в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial U_r^{(1)}}{\partial\rho} = W,$$

$$\frac{\partial W}{\partial\rho} = X, \qquad (19)$$

$$\frac{\partial X}{\partial\rho} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{X}\left(1 - F(\rho,z)\right) - \frac{1}{\rho^2}WF(\rho,z) +$$

$$+\frac{1}{\rho^3}U_r^{(1)}F(\rho,z).$$

Граничные условия перепишем в виде:

$$U_r^{(1)}\left(\rho_1\right) = U_{r1}^{(1)},$$

$$U_r^{(1)}\left(\rho_2\right) = U_{r2}^{(1)}, \qquad (20)$$

$$W\left(\rho_2\right) = \frac{\partial U_{r2}^{(1)}}{\partial\rho}.$$

Для рассматриваемой цилиндрической области $\rho_1 < \rho_2$, и так как ρ_1 может принимать значения около нуля, то коэффициент при старшей производной третьего уравнения (19) будет стремиться к бесконечности, что может привести при решении к большой погрешности. Чтобы избежать обозначенной проблемы поставим начальное условие при $\rho = \rho_2$, т. е. на правой границе области, и решим задачу Коши справа налево.

Произвольно зададим величину X для системы (19). Пусть $X(\rho_2) = \eta$, дважды проинтегрируем поставленную задачу по методу Рунге – Кутта. Используя схему четвертого порядка точности, получим:

$$KX1_i = -\frac{X_i}{\rho_i}\left(1 - F_i(\rho,z)\right) -$$

$$-\frac{W_i}{\rho_i^2}F_i(\rho,z) + \frac{U_{ri}^{(1)}}{\rho_i^3}F_i(\rho,z),$$

$$KW1_i = X_i,$$

$$KU1_i = W_i;$$

$$KX2_i = -\frac{X_i - \frac{KX1_i}{2}}{\rho_i - \frac{\Delta\rho}{2}}\left(1 - F_i(\rho,z)\right) -$$

$$-\frac{W_i - \frac{KW1_i}{2}}{\left(\rho_i - \frac{\Delta\rho}{2}\right)^2} F_i(\rho,z) + \frac{U_{ri}^{(1)} - \frac{KU1_i}{2}}{\left(\rho_i - \frac{\Delta\rho}{2}\right)^3} F_i(\rho,z),$$

$$KW2_i = X_i - \frac{KX1_i}{2},$$

$$KU2_i = W_i - \frac{KW1_i}{2};$$

$$KX3_i = -\frac{X_i - \frac{KX2_i}{2}}{\rho_i - \frac{\Delta\rho}{2}}\left(1 - F_i(\rho,z)\right) -$$

$$-\frac{W_i - \frac{KW2_i}{2}}{\left(\rho_i - \frac{\Delta\rho}{2}\right)^2} F_i(\rho,z) + \frac{U_{ri}^{(1)} - \frac{KU2_i}{2}}{\left(\rho_i - \frac{\Delta\rho}{2}\right)^3} F_i(\rho,z),$$

$$KW3_i = X_i - \frac{KX2_i}{2},$$

$$KU3_i = W_i - \frac{KW2_i}{2};$$

$$KX4_i = -\frac{X_i - KX3_i}{\rho_i - \Delta\rho}\left(1 - F_i(\rho,z)\right) -$$

$$-\frac{W_i - KW3_i}{\left(\rho_i - \Delta\rho\right)^2} F_i(\rho,z) + \frac{U_{ri}^{(1)} - KU3_i}{\left(\rho_i - \Delta\rho\right)^3} F_i(\rho,z),$$

$$KW4_i = X_i - KX3_i,$$

$$KU4_i = W_i - KW3_i;$$

$$X_{i-1} = X_i - \frac{\Delta\rho}{6}\left(KX1_i + 2\cdot KX2_i + \right.$$
$$\left. +2\cdot KX3_i + KX4_i\right),$$

$$W_{i-1} = W_i - \frac{\Delta\rho}{6}\left(KW1_i + 2\cdot KW2_i + \right.$$
$$\left. +2\cdot KW3_i + KW4_i\right),$$

$$U_{ri-1}^{(1)} = U_{ri}^{(1)} - \frac{\Delta\rho}{6}\left(KU1_i + 2\cdot KU2_i + \right.$$
$$\left. +2\cdot KU3_i + KU4_i\right),$$

где $\Delta\rho$ – шаг по ρ.

В результате вычислений по полученной схеме найдем значения $U_r^{(1)}\left(\rho_1,\eta_1\right)$ и $U_r^{(1)}\left(\rho_1,\eta_2\right)$, которые не соответствуют граничному условию на левой границе рассматриваемой области. Точное решение будем находить по методу секущих. Найдем η_* удовлетворяющее уравнению $\varphi(\eta) = U_r^{(1)}\left(\rho_1,\eta_1\right) - U_{r1}^{(1)} = 0$ и условиям (9)–(11).

$$\eta_* = \eta_2 - \frac{\varphi(\eta_2)(\eta_2 - \eta_1)}{\varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1)}.$$

Интегрируя справа налево по полученной схеме с граничными условиями при $\rho = \rho_2$: $U_r^{(1)} = U_{r2}^{(1)}$, $W = \frac{\partial U_{r2}^{(1)}}{\partial\rho}$ и $X = \eta_*$, получим искомое значение радиальной компоненты скорости перемещения $U_r^{(1)}$ в первом приближении.

Из второго уравнения (4) при известном значении $U_r^{(1)}$ определим λ:

$$\lambda_i = \frac{1}{\sigma_{\theta\theta i}^{(1)} - \beta I_{1\sigma i}^{(1)}}\left(\frac{X_i}{\rho_i} - \frac{W_i}{\rho_i^2} + \frac{U_{ri}^{(1)}}{\rho_i^3}\right).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение (6) с граничными условиями (15)–(17). Для численного решения аналогично предыдущему решению воспользуемся методом стрельбы.

Перепишем уравнение (6) в виде системы трех уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial U_z^{(1)}}{\partial\rho} = W^z,\\ \frac{\partial W^z}{\partial\rho} = X^z,\\ \frac{\partial X^z}{\partial\rho} = -\frac{1}{\rho}X^z + 48\lambda\sigma_{rz}^{(1)}.\end{gathered} \tag{21}$$

Граничные условия (15)–(17) перепишем в виде:

$$\begin{gathered}U_z^{(1)}\left(\rho_1\right) = U_{z1}^{(1)},\\ U_z^{(1)}\left(\rho_2\right) = U_{z2}^{(1)},\\ W^z\left(\rho_2\right) = \frac{\partial U_{z2}^{(1)}}{\partial\rho}.\end{gathered} \tag{22}$$

Так как на правой границе рассматриваемой области заданы два условия, то интегрирование будем производить справа налево. Произвольно зададим величину $X^z = \xi$. Проинтегрируем задачу (21)–(22) дважды методом Рунге – Кутта, для $X^z = \xi_1$ и $X^z = \xi_2$.

$$KXz1_i = -\frac{X_i^z}{\rho_i} + 48\lambda_i\sigma_{rzi}^{(1)},$$

$$KWz1_i = X_i^z,$$

$$KUz1_i = W_i^z;$$

$$KXz2_i = -\frac{X_i^z - \dfrac{KXz1_i}{2}}{\rho_i - \dfrac{\Delta\rho}{2}} + 48\lambda_i\sigma_{rzi}^{(1)},$$

$$KWz2_i = X_i^z - \frac{KXz1_i}{2},$$

$$KUz2_i = W_i^z - \frac{KWz1_i}{2};$$

$$KXz3_i = -\frac{X_i^z - \dfrac{KXz2_i}{2}}{\rho_i - \dfrac{\Delta\rho}{2}} + 48\lambda_i\sigma_{rzi}^{(1)},$$

$$KWz3_i = X_i^z - \frac{KXz2_i}{2},$$

$$KUz3_i = W_i^z - \frac{KWz2_i}{2};$$

$$KXz4_i = -\frac{X_i^z - KXz3_i}{\rho_i - \Delta\rho} + 48\lambda_i\sigma_{rzi}^{(1)},$$

$$KWz4_i = X_i^z - KXz3_i,$$

$$KUz4_i = W_i^z - KWz3_i;$$

$$X_{i-1}^z = X_i^z - \frac{\Delta\rho}{6}\left(KXz1_i + 2\cdot KXz2_i + \right.$$
$$\left. +2\cdot KXz3_i + KXz4_i\right),$$

$$W_{i-1}^z = W_i^z - \frac{\Delta\rho}{6}\left(KWz1_i + 2\cdot KWz2_i + \right.$$
$$\left. +2\cdot KWz3_i + KWz4_i\right),$$

$$U_{zi-1}^{(1)} = U_{zi}^{(1)} - \frac{\Delta\rho}{6}\left(KUz1_i + 2\cdot KUz2_i + \right.$$
$$\left. +2\cdot KUz3_i + KUz4_i\right).$$

В результате по полученной схеме найдем значения $U_z^{(1)}(\rho_1,\xi_1)$ и $U_z^{(1)}(\rho_1,\xi_2)$, отличные от $U_{z1}^{(1)}$. Используя метод секущих, найдем ξ_*, которое будет задавать третье условие на правой границе рассматриваемой области.

Используя три условия на правой границе рассматриваемой области решим задачу Коши по полученной схеме для определения осевой компоненты скорости перемещения $U_z^{(1)}$ в первом приближении.

Таким образом, мы построили схему, позволяющую решать дифференциальные уравнения третьего порядка, описывающие поле скоростей перемещений для осесимметричной задачи в цилиндрической области, с заданными граничными условиями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрен приближенно-аналитический аппарат нахождения поля скоростей перемещений многопараметрической связной сыпучей среды в цилиндрической области. В предельном случае напряженно-деформированного состояния цилиндрической области получены аналитические выражения для скоростей перемещений. В общем случае разработан численный метод расчета скоростей перемещений сыпучей среды в первом приближении, учитывающий микроструктуру сыпучего материала. Разработана схема, позволяющая численно реализовать поставленную задачу на ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Drescher, A.* Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material / A. Drescher, G. de Josselin de Jong // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1972. – № 20. – P. 337–351.

2. *Эринген, А. К.* Теория микрополярной упругости / А. К. Эринген // Разрушение. Математические основы теории разрушения — Москва : Мир. – 1975. – Т.2. – С. 646–751.

3. *Ehlers, W.* A Single Surface Yield Function for Geomaterials / W. Ehlers // Arch. Appl. Mech. – 1995. – P. 63–76.

4. *Cambou, B.* State internal variables at different scales for the modeling of the behavior of granular materials / B. Cambou, H. Magoariec, E. Vincens // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2015. – № 1–2. – P. 223–241.

5. *Alain, R.* Depth and minimal slope for surface flows of cohesive granular materials on inclined channels / R. Alain, O. Louisnard // Journal of Fluid Mechanics. – 2013. – V. 727. – P. 191–235.

6. *Fan, Y.* Kinematics of monodisperse and bidisperse granular flows in quasi-two-dimensional bounded heaps / Y. Fan, P. B. Umbanhowar, J. M. Ottino, R. M. Lueptow // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. – 1998. – 34–35. –V. 35. – P. 4597–4617.

7. *Peijun, G.* Arch in granular materials as a free surface problem / G. Peijum, Z. Shunhua // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2013. –V. 37. – № 9. – P. 1048–1065.

8. *Быкова, М. И.* Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры: монография / М. И. Быкова, Н. Д. Вервейко, П. П. Сумец, С. А. Шашкина // Воронежский государственный университет. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского университета, 2009. – 194 с.

9. *Фролов, А. Л.* Осесимметричное напряженное состояние связного сыпучего материала с учетом микроструктуры материала / А. Л. Фролов, О. А. Фролова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1 (15). – С. 214–221.

10. *Коул, Дж.* Методы возмущений в прикладной математике / Дж. Коул. – Москва : Мир, 1972. – 274 с.

11. *Вервейко, Н. Д.* Кинематика предельного осесимметричного состояния сыпучих материалов со сцеплением / Н. Д. Вервейко, А. Л. Фролов // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сборник статей 75-летию Е. И. Шемякина. – Москва : ФИЗМАТЛИТ. – 2006. – С. 107–114.

12. *Калиткин, Н. Н.* Численные методы. Учебное пособие – 2-е издание, исправленное / Н. Н. Калиткин. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.

Фролова Оксана Александровна – преподаватель, ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж), Воронежский государственный университет.
Тел.: +7-910-244-68-12
E-mail: OksanaFrola@yandex.ru

Frolova Oksana Aleksandrovna – teacher, MESC AF «N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh), Voronezh State University.
Tel.: +7-910-244-68-12
E-mail: OksanaFrola@yandex.ru