УДК 621.397, 004.421

ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНОЙ ОЦЕНКИ ПОЛОЖЕНИЯ ФРАГМЕНТА ИЗОБРАЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА НЬЮТОНА – РАФСОНА

Ю. С. Радченко, О. А. Машарова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 16.10.2018 г.

Аннотация. В работе рассмотрена двумерная оценка положения фрагмента изображения в кадре с помощью алгоритмов типа Ньютона – Рафсона. Данные алгоритмы реализованы в виде некоторых типов дискриминаторов. Рассмотрена двумерная дискретная автокорреляционная функция тестового объекта и определены условия ее факторизации на одномерные составляющие. Для некоторых типов дискриминаторов исследовано поведение дискриминационной характеристики. Показано, что плотность вероятности процесса на выходе дискриминатора существенно негауссовская с «тяжелыми хвостами». Методами статистического моделирования подтверждены теоретические расчеты.

Ключевые слова: оценка положения фрагмента изображения, дискриминаторы, негауссовское распределение статистики, «тяжелые хвосты распределения», статистическое моделирование.

Annotation. This paper considers a two-dimensional estimation of fragment position of image in a frame by using Newton – Rafson type algorithms. These algorithms are implemented as some types of discriminators. Considered a two-dimensional discrete autocorrelation function of test object and the conditions of its factorization to one-dimensional components are defied. The behavior of discriminator characteristics were analyzed for some types of discriminators. It is shown that probability density of process on discriminator output is substantially non-Gaussian with «heavy tails». By using statistical modeling the theoretical calculations are confirmed.

Keywords: estimation of fragment position of image, discriminators, non-Gaussian distribution of statistics, «heavy tails of distribution», statistical modeling.

ВВЕДЕНИЕ

При видеокодировании, интеллектуальном видеонаблюдении, и в других приложениях возникает задача оценки местоположения фрагмента или блока изображения в кадре [1, 2, 3, 4, 5]. В современных системах точность, с которой необходимо оценить местоположение фрагмента, составляет ¼ пикселя [1, 2]. В случае, если необходимая точность составляет 1 пиксель, последовательность действий следующая: сначала по некоторому шаблону поиска локализуется область экстремума дискретной целевой функции, затем методом последовательного перебора находится точка экстремума с заданной точностью [1, 4, 6].

При необходимости оценки с субпиксельной точностью последовательность действий заметно усложняется: после локализации области экстремума необходимо провести передискретизацию дискретной целевой функции в локальной окрестности экстремума, затем провести интерполяцию новых отсчётов. В итоге уточнённое положение экстремума находится методом последовательного перебора [1, 6]. Очевидно, что реализация такого метода достаточно громоздка. В [7, 8, 9, 10] рассмотрена возможность субпиксельного восстановления изображений (сверхразрешения) на основе анализа и оптимального объединения последовательности кадров. Реализация такого алгоритма также весьма трудоемка. С вычислительной точки зрения, более экономичным является способ оценки положения сигнала с помощью дискриминатора, который реализует вычислительный алгоритм Ньютона – Рафсона [11, 12]. Такой подход требует небольшого числа отсчетов целевой функции и выдаёт вещественные значения, с точностью до долей пикселя. Расчету точности оценки непрерывного параметра одномерного сигнала с помощью дискриминатора посвящена работа [13]. Для ряда типичных дискриминационных алгоритмов было показано, что распределение одномерной оценки имеет «тяжелые хвосты».

Целью данной работы является обобщение полученных результатов на случай двумерной оценки по дискретной целевой функции – логарифму функционала отношения правдоподобия. Проведено исследование дискретного поля логарифма отношения правдоподобия, установлены условия факторизации двумерной целевой функции на одномерные. Найдены вероятностные характеристики оценки фрагмента изображения с помощью раздельных дискриминаторов при различных расстройках по параметрам сигнала и приемника, при конечных отношениях сигнал/шум.

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Пусть задано двумерное поле $s(\vec{r},t)$, $\vec{r}=(x,y)$, представляющее собой фрагмент пространственного сигнала в момент t в области Ω_0. В момент $t+\Delta t$ в подобласти $\Omega \in \Omega_0$ наблюдается поле (анализируемый кадр) $\xi(\vec{r},t+\Delta t)=s(\vec{r},\vec{l}_0,t)+n(\vec{r})$, представляющее собой смесь полезного сигнала $s(\vec{r},\vec{l}_0)$, смещённого на неизвестный вектор $\vec{l}_0=(l_{0x},l_{0y})$, и некоррелированной помехи $n(\vec{r})$ со спектральной плотностью мощности $N_0/2$. В дальнейшем дискретная переменная времени t не фигурирует и может быть опущена.

Для решения задачи воспользуемся алгоритмом максимального правдоподобия, согласно которому в качестве целевой функции требуется сформировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ЛФОП)

$$M(\vec{l})=\frac{2}{N_0}\int_{\Omega}\xi(\vec{r})s(\vec{r},\vec{l})d\vec{r}-\\ -\frac{1}{N_0}\int_{\Omega}s(\vec{r},\vec{l})s(\vec{r},\vec{l})d\vec{r}. \quad (1)$$

Если пренебречь изменением формы сигнала при сдвиге, то второе слагаемое в (1) можно считать не зависящим от $\vec{l}=(l_x,l_y)$ и его не учитывать.

Выделим у ЛФОП $M(\vec{l})$ детерминированную и флуктуационную компоненты:

$$M(\vec{l})=q^2S(l_x-l_{0x},l_y-l_{0y})+qN(l_x,l_y). \quad (2)$$

Здесь $S(l_x-l_{0x},l_y-l_{0y})$ – нормированная автокорреляционная функция (АКФ), $\left|S(\vec{l}-\vec{l}_0)\right|\le 1$, $N(l_x,l_y)$ – нормированная шумовая функция с нулевым средним значением, единичной дисперсией и корреляционной функцией $<N(\vec{l}_1)N(\vec{l}_2)>=S(\vec{l}_1-\vec{l}_2)$, $q^2=2E_S/N_0$ – энергетическое отношение сигнал/шум. Если обозначить интервал корреляции $M(\vec{l})$ как (τ_{lx},τ_{ly}), то можно записать:

$$S(l_x-l_{0x},l_y-l_{0y})\equiv$$

$$\equiv S\left(\frac{l_x-l_{0x}}{\tau_{lx}},\frac{l_y-l_{0y}}{\tau_{ly}}\right)=S(\theta_x,\theta_y),$$

$$\left(\frac{l_x-l_{0x}}{\tau_{lx}},\frac{l_y-l_{0y}}{\tau_{ly}}\right)=(\theta_x,\theta_y),$$

$$\left(\frac{l_{fx}-l_{0x}}{\tau_{lx}},\frac{l_{fy}-l_{0y}}{\tau_{ly}}\right)=(\theta_{fx},\theta_{fy}),$$

$$\left(\frac{\Delta_x}{\tau_{lx}},\frac{\Delta_y}{\tau_{ly}}\right)=(\delta_x,\delta_y),$$

$$\left(\lambda_{m_x},\lambda_{m_y}\right)=\left(\frac{l_{m_x}-l_{f_x}}{\tau_{lx}},\frac{l_{m_y}-l_{f_y}}{\tau_{ly}}\right).$$

Здесь $(l_{mx},l_{my})\to(\lambda_{mx},\lambda_{my})$ – оценка максимального правдоподобия (ОМП), (l_{fx},l_{fy}) – параметр опорного сигнала приёмника, $(\theta_{fx},\theta_{fy})$ – нормированное рассогласование по параметру наблюдаемого сигнала и приемника, (Δ_x,Δ_y) – расстройка по параметру (l_x,l_y) каналов дискриминатора. Переобозначим $M(\vec{l})/q\to M(\vec{l})$. Соответственно ЛФОП (2) можно записать в виде: $M(\vec{\theta})=qS(\vec{\theta})+N(\vec{\theta})$.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЯ

Рассмотрим один из возможных видов изображений. На рис. 1а приведено тестовое изображение – городской пейзаж, на котором надо определить местоположение объекта (автомобиль – рис. 1б).

Рис. 1а

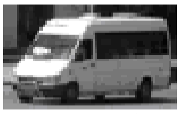

Рис. 1б

Анализ АКФ и сравнение ее с модельными объектами показал, что двумерная АКФ в районе максимума может быть факторизована на произведение одномерных АКФ $S(\theta_x,\theta_y) \approx S(\theta_x)S(\theta_y)$ по каждой координате (θ_x,θ_y). Однако, для объектов с произвольным ракурсом такая факторизация напрямую неприменима, поскольку в АКФ присутствуют перекрестные произведения $(\theta_x \cdot \theta_y)$. АКФ фрагмента тестового изображения представлена на рис. 2 в двух проекциях.

Для АКФ $S(\theta_x,\theta_y)$ имеет место пара преобразований

$$G(\omega_x,\omega_y) = \\ = \iint S(\theta_x,\theta_y)\exp\left[-j\left(\theta_x\omega_x+\theta_y\omega_y\right)\right]d\theta_x\, d\theta_y,$$
$$S(\theta_x,\theta_y) = \left(1/2\pi\right)^2 \iint G(\omega_x,\omega_y)\times \\ \times\exp\left[j\left(\theta_x\omega_x+\theta_y\omega_y\right)\right]d\omega_x d\omega_y, \quad (3)$$

В окрестности положения максимума $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$ спектральная плотность $G(\omega_x,\omega_y)$, как правило, имеет вид (условие полной линейной регулярности [14])

$$G(\omega_x,\omega_y) \approx \\ \approx G_{00} - 0.5\left(G_{11}\omega_x^2 + G_{22}\omega_y^2 + 2G_{12}\omega_x\omega_y\right), \quad (4)$$

где

$$G_{11} = -\partial^2 G(\omega_x,\omega_y)\Big/(\partial\omega_x)^2,$$
$$G_{22} = -\partial^2 G(\omega_x,\omega_y)\Big/(\partial\omega_y)^2,$$
$$G_{12} = -\partial^2 G(\omega_x,\omega_y)\Big/\partial\omega_x\partial\omega_y.$$

Как видно из (4) спектральная плотность в окрестности максимума представляет собой квадратичную форму (в сечении – эллипс). Поворот осей с помощью преобразования

$$\theta_x = u\cos\varphi - v\sin\varphi \quad \Omega_u = \omega_x\cos\varphi - \omega_y\sin\varphi$$
$$\theta_y = u\sin\varphi + v\cos\varphi \quad \Omega_v = \omega_x\sin\varphi + \omega_y\cos\varphi$$

приводит квадратичную форму (4) к каноническому виду [15, 16]

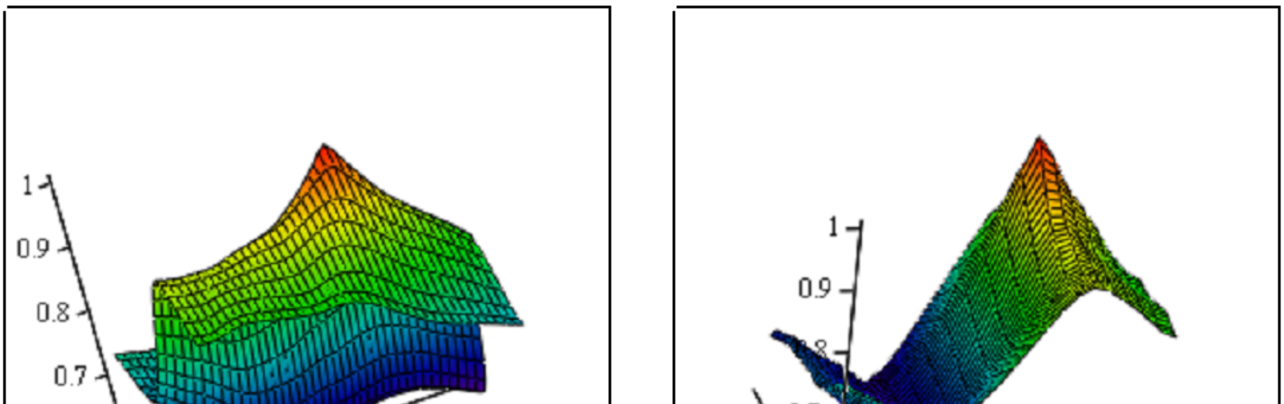

Рис. 2

$$G\left(\Omega_u, \Omega_v\right) = G_{00} - 0.5(\alpha^2 \Omega_u^2 + \beta^2 \Omega_v^2). \quad (5)$$

Здесь φ – угол поворота, приводящий к канонической форме

$$tg(2\varphi) = \frac{G_{12}}{G_{11} - G_{22}}, \quad (6)$$

$\alpha^2 = \lambda_1$, $\beta^2 = \lambda_2$, где λ_1, λ_2 – корни уравнения

$$\begin{vmatrix} G_{11} - \lambda & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Причем $\lambda_1 + \lambda_2 = G_{11} + G_{22}, \lambda_1 \lambda_2 = G_{11} G_{22} - G_{12}^2$.

Из пары соотношений для $S(\theta_x, \theta_y) \leftrightarrow G(\omega_x, \omega_y)$ (3) следует, что

$$G_{11} = \int\int \theta_x{}^2 S(\theta_x, \theta_y) d\theta_x d\theta_y = \int \theta_x{}^2 S(\theta_x) d\theta_x,$$
$$G_{22} = \int\int \theta_y{}^2 S(\theta_x, \theta_y) d\theta_x d\theta_y = \int \theta_y{}^2 S(\theta_y) d\theta_y, \quad (8)$$
$$G_{12} = \int\int \theta_x \theta_y \cdot S(\theta_x, \theta_y) d\theta_x d\theta_y.$$

Таким образом, можно перейти от повернутого изображения объекта к виду, аналогичному на рис. 1б, используя (6), (7), (8), и привести АКФ к виду $S(\theta_x, \theta_y) \approx S(\theta_x) S(\theta_y)$.

Если в качестве эталонной оценки взять оценку максимального правдоподобия [16, 17], то используя численный алгоритм Ньютона – Рафсона, можно записать выражение для оценки в виде:

$$\theta_{mx} = \theta_{fx} - \left.\left(\frac{d_x\left(\vec{\theta}\right) \quad d_{yy}\left(\vec{\theta}\right) - d_y\left(\vec{\theta}\right) \quad d_{xy}\left(\vec{\theta}\right)}{d_{xx}\left(\vec{\theta}\right) \quad d_{yy}\left(\vec{\theta}\right) - \left(d_{xy}\left(\vec{\theta}\right)\right)^2} \right)\right|_{\theta=\theta_f},$$

$$\theta_{my} = \theta_{fy} - \left.\left(\frac{d_y\left(\vec{\theta}\right) \quad d_{xx}\left(\vec{\theta}\right) - d_x\left(\vec{\theta}\right) \quad d_{xy}\left(\vec{\theta}\right)}{d_{xx}\left(\vec{\theta}\right) \quad d_{yy}\left(\vec{\theta}\right) - \left(d_{xy}\left(\vec{\theta}\right)\right)^2} \right)\right|_{\theta=\theta_f}$$

где

$$d_x\left(\vec{\theta}\right) = \partial M\left(\vec{\theta}\right) \big/ \partial\theta_x,$$
$$d_y\left(\vec{\theta}\right) = \partial M\left(\vec{\theta}\right) \big/ \partial\theta_y,$$
$$d_{xx}\left(\vec{\theta}\right) = \partial^2 M\left(\vec{\theta}\right) \big/ \partial\theta_x^2,$$
$$d_{yy}\left(\vec{\theta}\right) = \partial^2 M\left(\vec{\theta}\right) \big/ \partial\theta_y^2,$$
$$d_{xy}\left(\vec{\theta}\right) = \partial^2 M\left(\vec{\theta}\right) \big/ \left(\partial\theta_x \partial\theta_y\right).$$

Для факторизуемых АКФ $S(\theta_x, \theta_y) \approx S(\theta_x) S(\theta_y)$ можно считать, что и ЛФОП $M(\vec{\theta}) = M(\theta_x) M(\theta_y)$. Тогда смешанные производные обращаются в нуль вблизи точки максимума и получаются две раздельные оценки. Если ЛФОП не факторизуется, то раздельные оценки будут квазиоптимальными. В дальнейшем будем считать, что производится раздельная оценка положения фрагмента θ_{mx}, θ_{my}.

3.1. Алгоритмы дискриминаторов

Рассмотрим типичные дискриминационные алгоритмы, приближенно вычисляющие раздельные ОМП

I. Конечно-разностный дискриминатор

$$\lambda_m(\theta_f, \delta) = \frac{M(\theta_f + \delta) - M(\theta_f - \delta)}{M(\theta_f + \delta) - 2M(\theta_f) + M(\theta_f - \delta)} =$$
$$= \frac{q[\Psi^-(\theta_f, \delta)] + [N^-(\theta_f, \delta)]}{q[\Psi^+(\theta_f, \delta) - 2S(\theta_f)] + [N^+(\theta_f, \delta) - 2N(\theta_f)]}. \quad (9)$$

II. Суммарно-разностный дискриминатор

$$\lambda_m(\theta_f, \delta) = \frac{M(\theta_f + \delta) - M(\theta_f - \delta)}{M(\theta_f + \delta) + M(\theta_f - \delta)} =$$
$$= \frac{q[\Psi^-(\theta_f, \delta)] + [N^-(\theta_f, \delta)]}{q[\Psi^+(\theta_f, \delta)] + [N^+(\theta_f, \delta)]}. \quad (10)$$

III. Дискриминатор с АРУ

$$\lambda_m(\theta_f, \delta) = \frac{M(\theta_f + \delta) - M(\theta_f - \delta)}{M(\theta_f)} =$$
$$= \frac{q[\Psi^-(\theta_f, \delta)] + [N^-(\theta_f, \delta)]}{q[S(\theta_f)] + [N(\theta_f)]}, \quad (11)$$

где

$$\Psi^-(\theta_f, \delta) = S(\theta_f + \delta) - S(\theta_f - \delta),$$
$$\Psi^+(\theta_f, \delta) = S(\theta_f + \delta) + S(\theta_f - \delta),$$
$$N^-(\theta_f, \delta) = N(\theta_f + \delta) - N(\theta_f - \delta),$$
$$N^+(\theta_f, \delta) = N(\theta_f + \delta) + N(\theta_f - \delta).$$

Алгоритмы (9)–(11) не требуют дифференцируемости ЛФОП.

Предположим, что в алгоритмах (9)–(11) ОСШ $q \gg 1$. Тогда шумовой компонентой можно пренебречь, и можно провести анализ двумерной оценки θ_{mx}, θ_{my}.

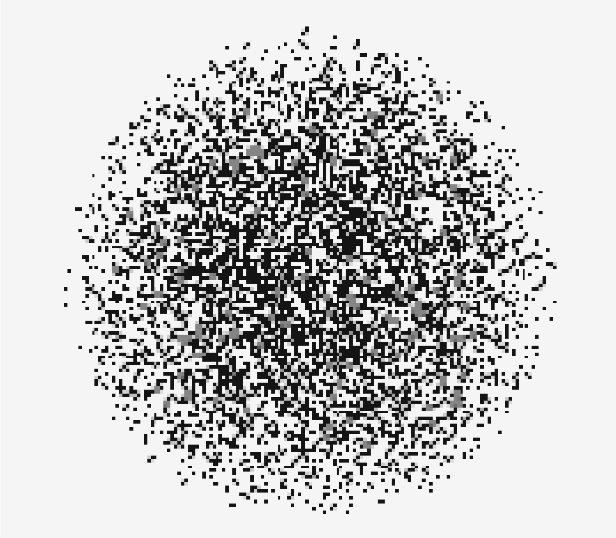

Рис. 3а

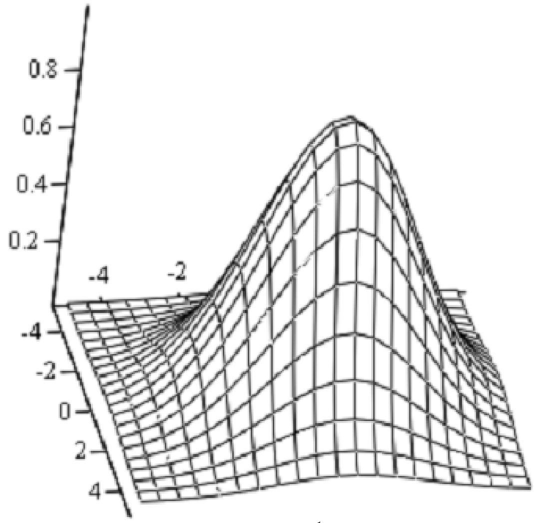

Рис. 3б

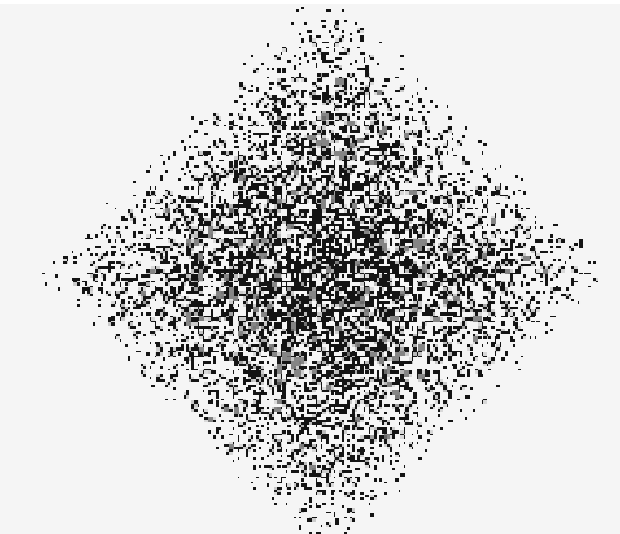

Рис. 4а

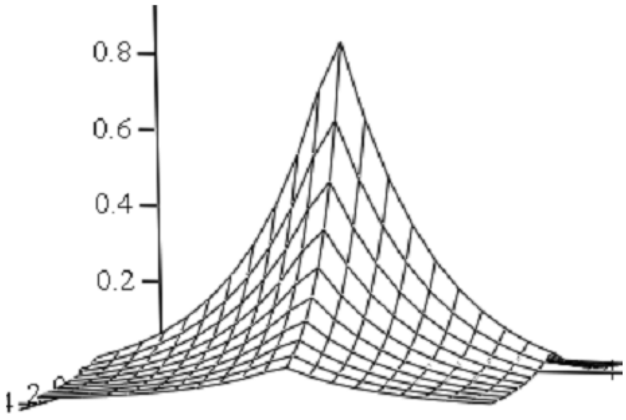

Рис. 4б

На рис. 3а и рис. 4а представлены модельные фрагменты изображений, а на рис. 3б и на рис. 4б – их АКФ.

Фрагмент 3а и АКФ 3б соответствуют дифференцируемой модели поля, 4а и 4б –недифференцируемой.

Применение алгоритма (10) по дискретному изображению позволило при отсутствии шумов получить отличие оценки от истинного значения порядка $10^{-2}-10^{-3}$. В то время как поиск максимума по дискретной сетке дает точность оценки в 1 пиксель. Установлено, что для недифференцируемой модели АКФ (рис. 4б) межпиксельная интерполяция не повышает точности оценки.

3.2. Анализ распределения

Как следует из формул (9)–(11) дискриминационная статистика представляется в виде

$$\lambda_m = \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{qM_1 + U_1}{qM_2 + U_2}. \qquad (12)$$

Здесь $U_1 \sim N(0, D_1)$, $U_2 \sim N(0, D_2)$, а M_2 – детерминированные компоненты числителя и знаменателя формул (9)–(11), зависящие от значений АКФ. D_1, D_2 – дисперсии случайных компонент U_1, U_2. Для алгоритмов (9)–(11) гауссовские случайные величины U_1, U_2 независимы между собой.

Вводя обозначения $t = \dfrac{\xi_2}{\sqrt{D_2}}$, $\mu = \dfrac{D_2}{D_1}$,

$\chi = \dfrac{M_2}{\sqrt{D_2}}$, $\dfrac{M_1}{\sqrt{D_2}} = \dfrac{M_1}{M_2}\dfrac{M_2}{\sqrt{D_2}} = \chi\lambda_0$, $\dfrac{M_1}{M_2} = \lambda_0$, можно записать плотность вероятности λ_m (12) как

$$W(\lambda,q)=\frac{\sqrt{\mu}}{2\pi}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}|t|\exp\left\{-\frac{\left[(t-q\chi)^2+\mu(\lambda t-q\chi\lambda_0)^2\right]}{2}\right\}dt. \qquad (13)$$

Для анализа влияния рассогласования по параметрам сигнала и приёмника и величины ОСШ на характеристики распределение λ_m были построены соответствующие зависимости. На рис. 5 представлена зависимость распределения от параметра рассогласования различных ОСШ $q=2,3,5,$ и параметре рассогласования $\theta_f=1$. Здесь же приведена точками экспериментальная оценка плотности вероятности $Y(\lambda)$. Экспериментальная плотность вероятности $Y(\lambda)$ получена ядерным сглаживанием с гауссовской весовой функцией выборки статистики λ_m (оценка Парзена), объемом $n=3000$ [16,17]. Соответствие распределений показано не только графически, но и по критерию Колмогорова при $\alpha\le 0.1$.

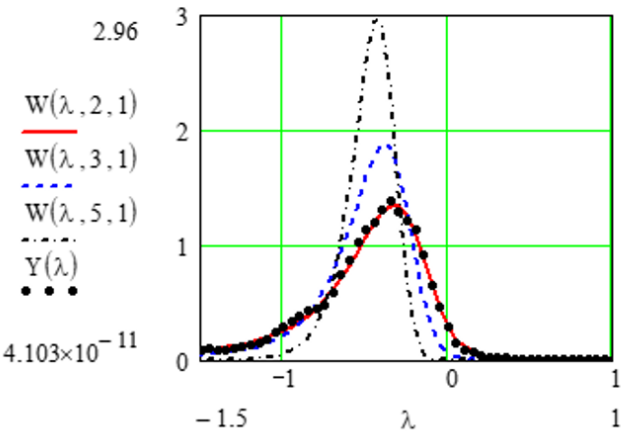

Рис. 5

Для распределения (13) можно получить явный аналитический вид в двух случаях: ОСШ $q=0$ и $q\gg 1$. В первом случае $W(\lambda,q=0)=\frac{\sqrt{\mu}}{\pi}\frac{1}{1+\mu\lambda^2}$. Это распределение Коши.

Во втором случае после асимптотического интегрирования по методу Лапласа [18] получаем

$$W(\lambda,q)=\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2\pi}}\frac{q\chi}{}\cdot\frac{|1+\mu\lambda\lambda_0|}{(1+\mu\lambda^2)^{3/2}}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}q^2\chi^2\frac{\mu(\lambda-\lambda_0)^2}{1+\mu\lambda^2}\right). \qquad (14)$$

Из анализа формул (13), (14) и статистического моделирования следует, что при конечных ОСШ оценка является несостоятельной из-за наличия «тяжёлых хвостов» распределения, которые приводят к бесконечной дисперсии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована возможность оценки местоположения фрагмента изображения в кадре с помощью дискриминаторов. Для изображений объектов с факторизуемыми автокорреляционными функциями рассмотрены типовые одномерные дискриминационные алгоритмы. Показано, что распределение процесса на выходе некоторых типов дискриминаторов является существенно негауссовским, оно имеет «тяжелые хвосты». Исследовано поведение этого распределения в зависимости от отношения сигнал/шум, величины рассогласования по оцениваемому параметру принятого и опорного сигналов. Применение дискриминаторов к дискретному изображению позволяет уменьшить число операций в десятки раз по сравнению с известными сеточными методами оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дворкович, В. П.* Цифровые видеоинформационные системы (теория и практика) / В. П. Дворкович, А. В. Дворкович – Москва: Техносфера, 2012. – 1008 с.

2. *Дворкович, В. П.* Измерения в видеоинформационных системах (теория и практика) / В. П. Дворкович, А. В. Дворкович – Москва: Техносфера, 2015. – 783 с.

3. Системы автоматического обнаружения и сопровождения объектов. Обработка изображений и управление / Б. А. Алпатов [и др.]. – Москва: Радиотехника, 2008. – 176 с.

4. *Васильев, К. К.* Статистический анализ последовательностей изображений/ К. К. Васильев, В. Р. Крашенинников. – Москва: Радиотехника, 2017. – 248 с.

5. *Radchenko, Yu. S.* Methods for Detecting of Structural Changes in Computer Vision Systems / Yu. S. Radchenko, A. V. Bulygin// Computer Vision in Control Systems-1: International Publishing – Switzerland: 2015. – Chapter 3. – P. 59–90.

6. *de Queiroz, R. L.* Motion-Compensated Compression of Dynamic Voxelized Point Clouds / R. L. de Queiroz, P. A. Chou //IEEE Transactions on Image Processing, 2017. – V. 26, № 8 . – P. 3886–3895.

7. *Ouzir, N.* Motion Estimation in Echocardiography Using Sparse Representation and Dictionary Learning / N. Ouzir [and etc] //IEEE Transactions on Image Processing, 2018. – V. 27, №1. – P. 64–77.

8. *Сирота, А. А.* Адаптивные алгоритмы построения сверхразрешения на основе обработки последовательности изображений / А. А. Сирота, А. Ю. Иванников // Оптический журнал. – 2017. – Т. 84, № 5. – С. 38–45.

9. *Chao, R.* Single Image Super-Resolution via Adaptive High-Dimensional Non-Local Total Variation and Adaptive Geometric Feature / R. Chao, He Xiaohai, N. Truong // IEEE Transactions on Image Processing, 2017. –V. 26, № 1. – P. 90–106.

10. *Антонова, Г. М.* Сеточные методы равномерного зондирования для исследования и оптимизации динамических стохастических систем / Г. М. Антонова. – Москва : Физматлит, 2007. – 224 с.

11. Оценивание дальности и скорости в радиолокационных системах. / под ред. А. И. Канащенкова и В. И. Меркулова. – Москва: Радиотехника, 2004. – Ч. 1. – 312 с.

12. Радиоавтоматика: учебное пособие / В. А. Бессекерский, [и др.]; под ред. В. А. Бессекерского. – Москва: Высш. Школа, 1985. – 271 с.

13. *Машарова, О. А.* О законе распределения сигналов рассогласования некоторых типов дискриминаторов / О. А. Машарова, Ю. С. Радченко// Физические основы приборостроения. – 2017. – Т. 6, № 2 (24). – С. 90–97.

14. *Прохоров, Ю. В.* Теория вероятностей (Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы) / Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. – Москва: Физматлит, 1973. – 494 с.

15. *Тыртышников, Е. Е.* Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. – Москва: Физматлит, 2007. – 480 с.

16. *Сирота, А. А.* Методы и алгоритмы анализа данных и их моделирование в MATLAB / А. А. Сирота. – СПб. : БХВ-Петербург, 2016. – 384 с.

17. *Лагутин, М. Б.* Наглядная математическая статистика / М. Б. Лагутин. – Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 472 с

18. *Олвер, Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции / Ф. Олвер; [пер. с англ. Ю. А. Брычкова, под ред. А. П. Прудникова]. – Москва: Физматлит, 1990. – 528 с.

Радченко Ю. С. – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры радиофизики, физический факультет, Воронежский государственный университет.
E-mail: ysradchenko@yandex.ru

Машарова О. А. – аспирант кафедры радиофизики, физический факультет, Воронежский государственный университет.
E-mail: masharova.ol@yandex.ru

Radchenko Y. S. – Dr. Sci. (Phys. –Math.), professor of radio physics department of the Voronezh State University.
E-mail: ysradchenko@yandex.ru

Masharova O. A. – graduate student of radio physics department of the Voronezh State University.
E-mail: masharova.ol@yandex.ru