

УДК 551.582.2+519.676

МОДЕЛЬ АДВЕКТИВНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ВЛАЖНОСТИ ВОЗДУХА СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. Г. Задорожний^{*,}, М. Е. Семенов^{*,**}, И. И. Ульшин^{**}, В. С. Ножкин^{**}**

**Воронежский государственный университет*

***ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж)*

Поступила в редакцию 16.03.2019 г.

Аннотация. В работе приведено решение лежащего в основе модели переноса влаги дифференциального уравнения, коэффициентами которого являются случайные процессы. Распределение проекции мгновенного вектора скорости аппроксимировано законом Веге – Изинга, параметры которого идентифицированы на основе бионической модели адаптивного поискового поведения. Предложены явные формулы для математического ожидания и второй моментной функции решения соответствующего уравнения переноса влаги. Определена оценка степени влияния случайных факторов на систему, в случае замены случайного коэффициента уравнения его математическим ожиданием. Приведен пример, в случае гауссова распределения горизонтальной компоненты скорости ветра, позволяющий определить математическое ожидание и вторую моментную функцию в рамках модельных представлений.

Ключевые слова: перенос влаги, случайные процессы, стохастическая модель, распределение Веге – Изинга, математическое ожидание, вторая моментная функция, влияние случайных факторов.

ВВЕДЕНИЕ

Метеорологические условия способны оказать негативное влияние на эффективность решения самых разнообразных задач. Особенно сильно это проявляется при обеспечении функционирования авиационных подразделений. Туманы, густые дымки, интенсивные осадки, обледенение, низкая облачность могут существенно осложнить или сделать невозможными взлет и посадку воздушных судов, а также осложнить их пилотирование. Согласно данным Международной организации гражданской авиации более половины авиационных происшествий происходят по причине неблагоприятных погодных условий [1].

Для достижения высокого уровня безопасности авиационных сообщений требуется

точная и надежная информация об ожидаемых метеоусловиях. Стохастический характер атмосферных процессов делает невозможным достижение стопроцентной оправдываемости прогнозов, поэтому исследования, направленные на повышение достоверности прогностической информации, остаются весьма актуальными.

Возникновение большинства опасных для авиации явлений погоды обусловлено образованием продуктов конденсации (сублимации) водяного пара. На сегодняшний день существуют несколько подходов к прогнозированию подобных метеорологических явлений, один из которых связан с использованием гидродинамических моделей. В их основе лежат уравнения движения, притока тепла, неразрывности, переноса влаги и атмосферных примесей, являющиеся математически выражениями законов физики (законы сохранения импульса, энергии и массы), а

© Задорожний В. Г., Семенов М. Е., Ульшин И. И., Ножкин В. С., 2019

также уравнения состояния [2, 3]. Данный подход активно развивается и совершенствуется [4–15 и др.]. В этих работах показано, что лишь около нескольких стран в мире развивают собственные технологии моделирования глобальной атмосферы. Действительно, физика атмосферных процессов достаточно сложна и не до конца изучена (особенно процессы в облаках). Из-за ограниченности вычислительных ресурсов пространственное разрешение таких моделей недостаточно для прямого полного описания некоторых процессов (например, глубокой конвекции), поэтому такие процессы возможно описать только параметрически, зная лишь характеристики атмосферы на масштабе характерного размера ячейки сетки [5]. Поэтому чаще всего прибегают к региональным (мезомасштабным) моделям, но и они несовершенны. Например, используемая региональная гидродинамическая модель COSMO-Ru имеет разрешение до 7 км [6], но и с ее помощью невозможно спрогнозировать некоторые погодные явления. Это связано с тем, что многие они имеют локальный характер и сложную природу образования, которую в настоящее время затруднительно описать формально для полной автоматизации прогноза с приемлемым уровнем успешности.

Определенные погрешности в прогнозировании при помощи гидродинамических моделей вносят и начальные условия. Проблема предсказуемости стала явной уже после первых численных экспериментов по моделированию эволюции атмосферы на долгие сроки. Еще в 50-х годах XX века было установлено, что сколь угодно малые ошибки задания начальных данных для расчета прогноза с течением времени трансформируются в большие (классическим примером является знаменитая система Лоренца [16], появившаяся как результат моделирования конвективных движений в подогреваемом снизу слое жидкости). За пределами двухнедельного прогноза ошибки детализированного по дням модельного прогноза вырастают до уровня ошибок случайного прогноза. Так проявляются объективные (т. е. непреодолимые при любой квалификации прогнозистов) ограничения на

возможность точно прогнозировать конкретный ход эволюции атмосферных процессов на достаточно длительных интервалах времени. Ограничение связано с тем, что начальные условия для расчета всегда содержат погрешности, и начальные ошибки имеют тенденцию расти в течение всего периода прогноза из-за неустойчивости атмосферных процессов. Это связано во многом с тем, что с помощью глобальных гидродинамических моделей получают данные на «краях» сетки для локальных моделей. Можно повысить плотность сети и уменьшить погрешности измерений, но не бесконечно – возможности такой детализации ограничены, данные действия приведут к еще одной проблеме – технологической.

Всемирной метеорологической организацией отмечается, что повышение масштабируемости кодов моделей является одним из главных приоритетов в прогнозировании погоды и климата на ближайшие 10 лет и далее [6]. Вычислительная эффективность станет лимитирующим фактором номер один для моделирования системы Земли с высоким разрешением.

Проведенный анализ существующих гидродинамических моделей показывает, что уравнения, их формализующие, включают в себя усредненные значения метеорологических величин. Однако их реальные значения (особенно характеристики ветра на небольших пространственно временных масштабах), как показывают наблюдения, подвержены неупорядоченным хаотическим возмущениям, учет которых затруднителен в рамках традиционных способов. Использование усредненных значений метеорологических величин в уравнениях переноса, безусловно, оправдано применительно к прогностическим моделям мезо- и макроуровня, но на микроуровне такое упрощение не всегда является корректным. В связи с этим предлагается учитывать турбулентные свойства атмосферы, приводящие к возникновению хаотических пульсаций воздуха, и использовать для этого стохастические методы [17–23]. В этом случае проекция вектора скорости будет трактоваться как случайный процесс, закон распределения которого подлежит определению. Таким

образом, целью настоящей работы является обоснование нового подхода к прогнозированию переноса влаги в атмосфере на основе аппарата стохастических дифференциальных уравнений, позволяющего на модельном уровне учитывать турбулентные свойства атмосферы в явном виде.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

При рассмотрении адиабатического переноса влаги изменение массовой доли водяного пара описывается уравнением:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Здесь u, v, w – проекции вектора скорости на оси локальной системы координат, s – массовая доля.

Как сказано выше, в качестве проекции вектора скорости при численном решении уравнения (1) используются их усредненные на относительно длительном временном интервале значения. В приземном слое атмосферы метеовеличины подвержены флуктуациям, поэтому результаты численного моделирования не всегда в должной степени соответствуют наблюдаемым значениям. Один из возможных подходов к учету турбулентных свойств связан с трактовкой компонент проекции вектора скорости как случайных процессов. В этом случае уравнение (1) следует рассматривать как стохастическое дифференциальное уравнение.

Для подтверждения сделанных предположений на метеорологической станции в г. Воронеже, имеющей географические координаты $51^{\circ}40'33,7''$ с.ш., $39^{\circ}15'00,6''$ в.д., была проведена серия экспериментов по идентификации компонент вектора скорости ветра в приземном слое в режиме непрерывного времени, заключающаяся в следующем. С помощью метеорологической станции «Davis Vantage Pro 2» проведены замеры направления и скорости ветра в течение 30 суток в декабре 2017 г. с различным временем усреднения. По полученным результатам рассчитаны и сведены в общую таблицу значения проекции вектора скорости на ось координат, совпадающую с преобладающим направлением

ветра. На рис. 1 приведены примеры графиков изменения значений проекции вектора скорости при интервалах усреднения 15, 60 и 180 с. (на рисунке представлены результаты измерений времени в течение 21 минуты).

Из полученных графиков видно, что происходят непрерывные изменения проекции вектора скорости. При увеличении интервала усреднения значений проекции вектора скорости график принимает более плавный вид. Также при этом изменяются максимальные и минимальные значения проекции вектора скорости, что позволяет сделать вывод о возможном внесении ошибок в прогностическое выражение (1).

В целях дальнейшего анализа требовалось идентифицировать теоретическое распределение с приемлемой точностью, аппроксимирующие экспериментальные данные. Для этого полученная общая таблица значений

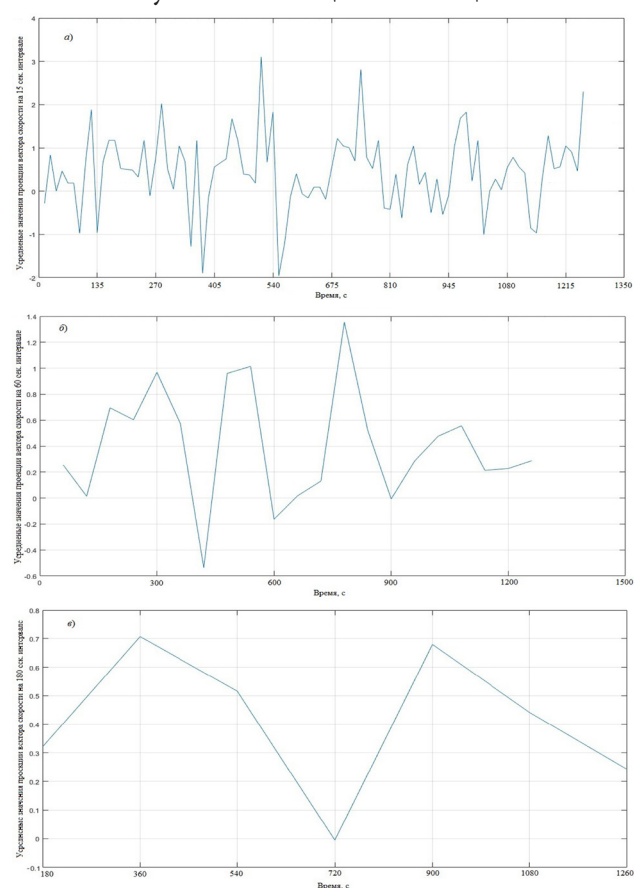


Рис. 1. а) усредненные значения проекции вектора скорости за 15 секунд; б) усредненные значения проекции вектора скорости за 60 секунд; в) усредненные значения проекции вектора скорости за 180 секунд

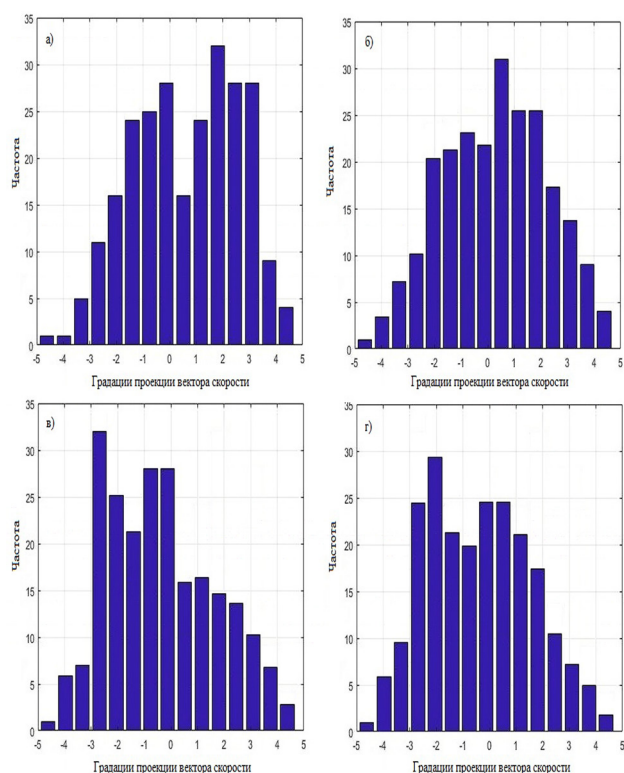


Рис. 2. Гистограмма распределения проекции вектора скорости

- а) в период 09 ч. 00 мин. – 10 ч. 00 мин.;
- б) в период 09 ч. 10 мин. – 10 ч. 10 мин.;
- в) в период 09 ч. 20 мин. – 10 ч. 20 мин.;
- г) в период 09 ч. 30 мин. – 10 ч. 30 мин.

проекции вектора скорости на ось координат была разбита по часам. Каждая последующая строка каждой таблицы соответствовала данным со смещением на 10 минут от начала часа. После обработки табличных значений были построены гистограммы распределения, примеры которых представлены на рис. 2.

Как видно из рисунка, гистограммы имеют достаточно сложную форму, что затрудняет идентификацию теоретического закона распределения, описывающего наблюдаемые значения с должной адекватностью.

На первом этапе анализа распределений были рассчитаны оценки коэффициентов асимметрии и эксцесса. Далее на основе полученных коэффициентов была выдвинута гипотеза о нормальности распределения проекции вектора скорости. Для проверки данного предположения использовались два метода проверки статистических гипотез (К. Пирсона и А. Колмогорова), при этом устанавлива-

лись два уровня значимости $\alpha = 0,05$ и $0,1$. Проведенная проверка показала, что выдвинутая гипотеза о нормальности распределения проекции вектора скорости в 60 % случаев не отвергалась. В остальных случаях данная гипотеза не была принята. Тем не менее, утверждать, что проекция вектора скорости имеет нормальное распределение, в подобных условиях нельзя. Поскольку для дальнейших построений необходимо аналитическое представление о законе распределения, была исследована возможность использования для аппроксимации распределений закона Веге – Изинга.

1.1. Аппроксимация эмпирических данных законом Веге – Изинга

Впервые закон был описан Т. Веге [24]. Он часто используется в качестве основы для создания статистических моделей фазовых переходов в различных областях физики. Т. Веге были использованы результаты исследований Э. Изинга, получившего модель систем, состояние которых определяется уровнем внутренней кластеризации и воздействием внешних сил [24]. В основу данного закона распределения положено решение одномерного уравнения Фоккера – Планка [25], которое имеет вид:

$$f(q) = \frac{c}{Q(q)} \exp \left[2 \int_{-1/2}^q \frac{K(q)}{Q(q)} dq \right], \quad (2)$$

где $K(q) = [\sinh(kq + l) - 2q \cosh(kq + l)]$;

$$Q(q) = \frac{1}{n} [\cosh(kq + l) - 2q \sinh(kq + l)];$$

$$c = \int_{-1/2}^{1/2} Q(q) \exp \left[2 \int_{-1/2}^q \frac{K(q)}{Q(q)} dq \right],$$

l – фундаментальное смещение (результат влияния внешних экономических условий);

k – показатель согласованности инвесторов;

q – переменная, отражает величину рыночной поляризации мнений участников рынка.

С учетом вышеизложенного было выдвинуто предположение о том, что распределение проекции вектора скорости может быть ап-

проксимировано законом Веге – Изинга. Для наглядной аппроксимации экспериментальных данных было необходимо идентифицировать параметры распределения Веге – Изинга. В этих целях был использован метод бионического моделирования адаптивного поискового поведения [26]. По построенным аппроксимирующим функциям был определен диапазон значений параметров l (от $-0,0526$ до $0,1452$) и k (от $0,7581$ до $1,9509$). Полученные результаты представлены на рис. 3.

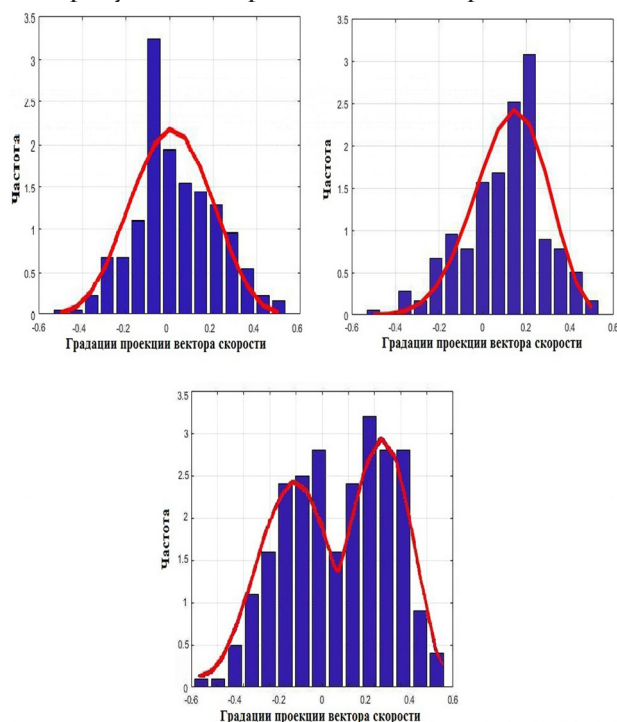


Рис. 3. Аппроксимация эмпирических данных проекции вектора скорости законом распределения Веге – Изинга

Для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения закону Веге – Изинга также использовались два указанных выше метода с прежними значениями уровня значимости. Проведенная проверка показала, что выдвинутая гипотеза о распределении проекции вектора скорости по закону Веге – Изинга не отвергается в 86 % случаев.

1.2. Переход к детерминированной задаче

Если испарение с водяных капель отсутствует, конденсация (сублимация) начинается сразу по достижению состояния насыщения,

выпадение осадков – сразу по наступлению конденсации, а вся сконденсированная влага выпадает в виде осадков. Прогноз опасных явлений погоды, связанных с повышенным содержанием влаги в атмосфере, в этом случае определяется прогнозом влажности [2, 3].

Водяной пар распространяется в атмосфере вследствие ее движения, которое складывается из упорядоченного переноса со средней скоростью $c(u, v, w)$ и турбулентных пульсаций. Как было отмечено выше, при движении индивидуальной частицы до начала конденсации массовая доля водяного пара остается практически неизменной. Все другие характеристики (абсолютная и относительная влажность, давление, точка росы) при движении частицы изменяются [3].

В настоящей работе предлагается рассмотреть математическую модель постоянства массовой доли до начала момента конденсации в виде дифференциального уравнения (3).

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \varepsilon_1(t) \frac{\partial s}{\partial x} + \varepsilon_2(t) \frac{\partial s}{\partial y} + \varepsilon_3(t) \frac{\partial s}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – случайные процессы, в которые входят проекции скорости ветра на соответствующие оси координат.

Для упрощения вычислений ось x была ориентирована по направлению преимущественного переноса воздушной массы, вертикальные движения воздуха не принимались во внимание. Таким образом, уравнение (3) было преобразовано к следующему виду:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\varepsilon(t) \frac{\partial s}{\partial x}, \quad (4)$$

с детерминированным начальным условием:

$$s(0, x) = s_0(x). \quad (5)$$

Случайный процесс $\varepsilon(t)$ будем считать заданным характеристическим функционалом [17–19]

$$\varphi(v) = M \left[\exp\left(i \int_T \varepsilon(\tau) v(\tau) d\tau\right) \right], \quad (6)$$

где функция v принадлежит пространству $L_1(T)$ суммируемых на отрезке T функций с нормой $\|v\| = \int_T |v(\tau)| d\tau$; M – математическое ожидание по функции распределения про-

цесса $\varepsilon(t)$; T – отрезок времени, на котором изучается процесс $[0; t_1]$.

Умножим уравнение (4) на $\exp(i \int_T \varepsilon(\tau) \nu(\tau) d\tau)$ и применим операцию математического ожидания по функции распределения случайного процесса $\varepsilon(t)$ к полученному равенству

$$M \left[\frac{\partial s}{\partial t} \exp(i \int_T \varepsilon(\tau) \nu(\tau) d\tau) \right] = M \left[-\varepsilon(t) \frac{\partial s}{\partial x} \exp(i \int_T \varepsilon(\tau) \nu(\tau) d\tau) \right]. \quad (7)$$

Для дальнейших построений введем вспомогательное отображение:

$$y(t, x, \nu) = M \left[s(t, x) \exp(i \int_T \varepsilon(\tau) \nu(\tau) d\tau) \right], \quad (8)$$

где $x \in R$; $\nu(t) \in L_1(T)$.

Тогда уравнение (7) можно записать в виде:

$$\frac{\partial y(t, x, \nu)}{\partial t} = i \frac{\delta}{\delta \nu(t)} \frac{\partial}{\partial x} y(t, x, \nu), \quad (9)$$

с начальным условием

$$y(0, x, \nu) = s_0(x) \varphi(\nu), \quad (10)$$

Непосредственно из определений следует, что математическое ожидание решения уравнения (4) с начальным условием (5) может быть получено из соотношения (8), в котором функцию ν следует положить равной нулю. Иными словами имеет место равенство

$$y(t, x, 0) = M [s(t, x)]. \quad (11)$$

Таким образом, для нахождения математического ожидания решения уравнения (4) с начальным условием (5) достаточно найти решение уравнения с вариационной и обычной производными (9) при условии (10) в некоторой окрестности точки $\nu = 0$.

1.3. Математическое ожидание решения уравнения переноса влаги

Применив к обеим частям выражений (9) и (10) преобразование Фурье [27, 28], получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_x [y(t, x, \nu)](\xi) &= \\ &= i \frac{\delta}{\delta \nu(t)} (-i\xi) F_x [y(t, x, \nu)](\xi), \end{aligned} \quad (12)$$

$$F_x [y(0, x, \nu)](\xi) = F_x [s_0(x)](\xi) \varphi(\nu), \quad (13)$$

где F_x – преобразование Фурье по переменной x , а ξ – двойственная к x переменная.

Обозначим

$$Y(t, \xi, \nu) = F_x [y(t, x, \nu)](\xi);$$

$$y_0(\xi, \nu) = F_x [s_0(x)](\xi) \varphi(\nu).$$

Тогда соотношения (12) и (13) переписутся в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} Y(t, \xi, \nu) = \xi \frac{\delta}{\delta \nu(t)} Y(t, \xi, \nu). \quad (14)$$

$$F_x [y(0, x, \nu)](\xi) = y_0(\xi, \nu). \quad (15)$$

Введем вспомогательную функцию, зависящую от трех переменных $\chi(\tau, t, w)$ следующим образом $\chi(\tau, t, w) = \text{sign}(w - \tau)$ при w принадлежащем отрезку с концами τ, t и $\chi(\tau, t, w) = 0$ в противном случае. Нам потребуется лемма [17–19].

Лемма 1. Пусть $a(t)$ – непрерывная функция на отрезке T и функционал $y: L_1(T) \rightarrow \mathbb{C}$ имеет вариационную производную $\frac{\delta y(\nu + a\chi(\tau, t))}{\delta \nu(t)}$. Тогда почти при всех $t \in T$ существует производная $\frac{\partial y(\nu + a\chi(\tau, t))}{\partial t}$ и выполняется равенство

$$\frac{\partial y(\nu + a\chi(\tau, t))}{\partial t} = a(t) \frac{\delta y(\nu + a\chi(\tau, t))}{\delta \nu(t)}.$$

Теорема 2. Если существует вариационная производная $\frac{\delta \varphi(\nu + \xi\chi(\tau, t))}{\delta \nu(t)}$, то

$$Y(t, \xi, \nu) = y_0(0, \xi, \nu + \xi\chi(0, t)) \quad (16)$$

является решением задачи (14) и (15).

Доказательство. Получается подстановкой (16) в (14) и (15) с использованием леммы 1.

Теорема 3. В условиях теоремы 2

$$\begin{aligned} y(t, x, \nu) &= F_\xi^{-1} [Y(t, \xi, \nu)] = \\ &= F_\xi^{-1} (F_x [s_0(x)](\xi) \varphi(\nu + \xi\chi(0, t))) = \\ &= F_\xi^{-1} [F_x [s_0(x)](\xi)]^* \\ &= F_\xi^{-1} [\varphi(\nu + \xi\chi(0, t))]^*(x) = \\ &= s_0(x) F_\xi^{-1} [\varphi(\nu + \xi\chi(0, t))]^*(x), \end{aligned} \quad (17)$$

где $*$ – знак свертки функций по x ; F_ξ^{-1} – обратное преобразование Фурье по ξ , является решением задачи (12), (13).

Доказательство. Применим обратное преобразование Фурье [27, 28] к (16), получим (17). Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть выполняются условия предыдущей теоремы, тогда

$$M[s(t, x)] = s_0(x) * F_\xi^{-1}[\varphi(\xi\chi(0, t))](x), \quad (18)$$

является математическим ожиданием решения уравнения (4), при начальном условии (5).

Доказательство. Поскольку $y(t, x, 0) = M[s(t, x)]$, то из (17) при $v = 0$ получаем (18). Теорема доказана.

1.4. Вторая моментная функция решения уравнения переноса влаги

Для определения второй моментной функции решения задачи (4) введем в рассмотрение отображение:

$$z(t, x, \gamma, x_1, v) = M \left[s(t, x) s(\gamma, x_1) \exp(i \int_T \varepsilon(\tau) v(\tau) d\tau) \right]. \quad (19)$$

Отметим, что отображение $z(t, x, \gamma, x_1, v)$ симметрично по парам переменных t, x и γ, x_1 .

Умножим уравнения (4) на $s(\gamma, x_1) \exp(i \int_T \varepsilon(\tau) v(\tau) d\tau)$ и применим операцию математического ожидания по функции распределения случайного процесса $\varepsilon(t)$, получим

$$M \left[\frac{\partial s}{\partial t} s(\gamma, x_1) \exp(i \int_T \varepsilon(\tau) v(\tau) d\tau) \right] = M \left[-\varepsilon(t) \frac{\partial s}{\partial x} s(\gamma, x_1) \exp(i \int_T \varepsilon(\tau) v(\tau) d\tau) \right]. \quad (20)$$

Используя вспомогательное отображение $z(t, x, \gamma, x_1, v)$, соотношение (20) запишем в виде:

$$\frac{\partial z(t, x, \gamma, x_1, v)}{\partial t} = i \frac{\delta}{\delta v(t)} \frac{\partial}{\partial x} z(t, x, \gamma, x_1, v). \quad (21)$$

Определим начальное условие для выражения (21) для этого положим $\gamma = t_0$ и $x_1 = x$.

$$\left. \frac{\partial z(t, x, \gamma, x_1, v)}{\partial t} \right|_{\substack{\gamma=t_0, \\ x_1=x}} = i \frac{\delta}{\delta v(t)} \frac{\partial}{\partial x} z(t, x, \gamma, x_1, v) \Big|_{\substack{\gamma=t_0, \\ x_1=x}}. \quad (22)$$

Применив преобразование Фурье к (22), получим:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} F_x [z(t, x, \gamma, x_1, v)](\xi) \right|_{\substack{\gamma=t_0, \\ x_1=x}} = \xi \frac{\delta}{\delta v(t)} F_x [z(t, x, \gamma, x_1, v)](\xi) \Big|_{\substack{\gamma=t_0, \\ x_1=x}}. \quad (23)$$

На основании леммы 1, получим:

$$F_x [z(t, x, \gamma, x_1, v)](\xi) \Big|_{\substack{\gamma=t_0, \\ x_1=x}} = F_x [s_0^2(x)(\xi)\phi(v + \xi\chi(0, t))]. \quad (24)$$

Применив обратное преобразование Фурье к (24), запишем:

$$z(t, x, \gamma, x_1, v) \Big|_{\substack{\gamma=t_0, \\ x_1=x}} = s_0^2(x) * F_\xi^{-1} [\phi(v + \xi\chi(0, t))](x). \quad (25)$$

$$z(0, x, \gamma, x_1, v) = s_0^2(x_1) * F_\xi^{-1} [\phi(v + \xi\chi(0, t))](x). \quad (26)$$

Равенство (26) является начальным условием выражения (21).

Определение 1. Второй моментной функцией решения задачи (4) с детерминированным начальным условием (5) называется $z(t, x, \gamma, x_1, 0)$, где $z(t, x, \gamma, x_1, v)$ – симметричное по переменным t, x и γ, x_1 решение задачи (21), (26) и обозначается через $M[s(t, x)s(\gamma, x_1)]$.

Теорема 5. Если существует вариационная производная $\frac{\delta\phi(v + \xi\chi(\tau, t))}{\delta v(t)}$, то решение задачи (21), (26) имеет вид

$$z(t, x, \gamma, x_1, v) = s_0^2(x_1) * F_\xi^{-1} [\phi(v + \xi\chi(0, t) + \xi\chi(0, \gamma))](x). \quad (27)$$

Доказательство. Задача (21), (26) имеет вид задачи (9), (10). Используя формулу (16) получаем (27). Теорема доказана.

Теорема 6. В условиях предыдущей теоремы вторая моментная функция решения уравнения (4) имеет вид

$$M[s(t, x)s(\gamma, x_1)] = s_0^2(x_1) * F_{\xi}^{-1}[\phi(\xi\chi(0, t) + \xi\chi(0, \gamma))](x). \quad (28)$$

Доказательство. Поскольку $z(t, x, \gamma, x_1, 0) = M[s(t, x)s(\gamma, x_1)]$, то из (27) при $\nu = 0$, получаем (28). Теорема доказана.

Важной статистической характеристикой случайного процесса является дисперсионная функция $D[s(t, x)] = M[s^2(t, x)] - (M[s(t, x)])^2$.

Теорема 7. Пусть выполняются условия теоремы 5, тогда дисперсионная функция решения задачи (4), (5) имеет вид

$$D[s(t, x)] = s_0^2(x) * F_{\xi}^{-1}[\phi(2\xi\chi(0, t))](x) - \left(s_0(x) * F_{\xi}^{-1}[\phi(\xi\chi(0, t))](x) \right)^2. \quad (29)$$

Доказательство. Подставив в формулу определения дисперсионной функции равенства (21) и (28), положив при этом в последнем выражении $\gamma = t$, $x_1 = x$, получим (30). Теорема доказана.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

2.1. Уравнение переноса влаги с гауссовым случайным процессом

Рассмотрим частный случай, возникающий при значениях l и k , равных 0 и около 1,9 соответственно. В этом случае функция распределения по закону Вега – Изинга значительно упрощена, и плотность вероятностей проекции вектора скорости принимает вид нормального закона распределения. Характеристический функционал которого имеет вид [17–19]:

$$\varphi(\nu) = \exp \left(i \int_0^{t_1} M[\varepsilon(\tau)]\nu(\tau)d\tau - \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} b(\tau_1, \tau_2)\nu(\tau_1)\nu(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \right), \quad (30)$$

где $b(\tau_1, \tau_2) = M[\varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)] - M[\varepsilon(\tau_1)]M[\varepsilon(\tau_2)]$ – ковариационная функция процесса $\varepsilon(t)$.

Для упрощения дальнейших громоздких выкладок введем обозначения

$$A = \int_0^{\gamma} M[\varepsilon(\tau)]d\tau; \quad A_1 = \int_0^{\gamma} \int_0^{\gamma} b(\tau_1, \tau_2)d\tau_1d\tau_2;$$

$$B = \int_0^t M[\varepsilon(\tau)]d\tau; \quad B_1 = \int_0^t \int_0^t b(\tau_1, \tau_2)d\tau_1d\tau_2.$$

Теорема 8. Пусть $\varepsilon(t)$ – гауссов случайный процесс, тогда математическое ожидание $M[s(t, x)]$ решения уравнения (4) с начальным условием (5), имеет вид

$$M[s(t, x)] = s_0(x) * \frac{1}{\sqrt{\pi B_1}} \exp\left(-\frac{(x-B)^2}{2B_1}\right)(x). \quad (31)$$

Доказательство. Подставив характеристический функционал (30) в соотношение (21), воспользовавшись определением функции $\chi(\tau, t)$ и взяв обратное преобразование Фурье по ξ , получим (31). Теорема доказана.

Теорема 9. Пусть выполняются условия предыдущей теоремы, тогда вторая моментная функция имеет вид

$$M[s(t, x)s(\gamma, x_1)] = s_0^2(x_1) * \frac{1}{\sqrt{\pi A_2}} \exp\left(-\frac{(x-A_1)^2}{2A_2}\right). \quad (32)$$

Доказательство. Подставив характеристический функционал (30) в равенство (28), используя свойства функции $\chi(\tau, t)$ и взяв обратное преобразование Фурье по ξ , получим (32). Теорема доказана.

Теорема 10. Пусть выполняются условия теорем 8 и 9, тогда дисперсионная функция имеет вид

$$D[s(t, x)] = s_0^2(x) * \frac{1}{\sqrt{2\pi B_1}} \exp\left(-\frac{(x-2B)^2}{4B_1}\right)(x) - \left(s_0(x) * \frac{1}{\sqrt{\pi B_1}} \exp\left(-\frac{(x-B)^2}{2B_1}\right)(x) \right)^2. \quad (33)$$

Доказательство. Подставив характеристический функционал (30) в равенство (29), используя свойства функции $\chi(\tau, t)$, получим (33). Теорема доказана.

2.2. Степень влияния случайных факторов

Оценим степень влияния случайных факторов на поведение системы, описываемой уравнением (4) с начальным условием (5). Для

этого рассмотрим одномерный случай уравнения вида (1) с тем же начальным условием.

Легко проверить, что

$$s_d(t, x) = s_0 \left(x - \int_0^t u(s) ds \right)$$

является решением соответствующего уравнения (1) с начальным условием (5). Тогда функция

$$I_s(t, x) = \left| s_d(t, x) - M[s(t, x)] \right| = \left| s_0 \left(x - \int_0^t u(s) ds \right) - s_0(x) * \frac{1}{\sqrt{\pi B_1}} \exp \left(-\frac{(x-B)^2}{2B_1} \right) (x) \right|;$$

дает оценку погрешности решений при отказе от учета случайных факторов.

Отметим, что при $B_1(t) \rightarrow 0$ выражение $\frac{1}{\sqrt{\pi B_1}} \exp \left(-\frac{(x-B)^2}{2B_1} \right)$ стремится к δ -функции Дирака и соответствующая функция $I(t, x) \rightarrow 0$. Таким образом, при $B_1(t) \rightarrow 0$ формулы (31) и (33) переходят в формулы решения детерминированной задачи, тем самым доказано, что если случайный процесс, отвечающий горизонтальной компоненты скорости ветра, обладает «быстро» убывающей функцией автокорреляции, то приближенное решение может быть получено посредством замены скорости ветра ее средним значением.

Возможные приложения предложенного в статье подхода применительно к задачам метеорологии сосредоточены, прежде всего, в области прогнозирования погодных явлений малого пространственно-временного масштаба (на расстояниях до нескольких километров и временных интервалах порядка нескольких часов). Именно на таких интервалах учет случайных составляющих в моделях переноса представляется вполне оправданным, поскольку неконтролируемые отклонения скорости ветра могут вносить существенные изменения в распределения метеорологических величин. Отметим также, что возможные приложения метода не ограничиваются метеорологией, поскольку явления переноса широко распространены в различных технологических процессах и производствах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей статье описан альтернативный подход к моделированию процессов переноса влаги, связанный с учетом турбулентных свойств в рамках стохастических методов. Предложен способ решения дифференциального уравнения, описывающего перенос влаги в атмосфере, коэффициентами которого являются случайные процессы. Определен и обоснован закон распределения проекции мгновенного вектора скорости. С помощью бионической модели адаптивного поискового поведения аппроксимирована функция, описывающая распределение случайного процесса. Получены математическое ожидание и вторая моментная функция для массовой доли водяного пара. Рассмотрен частный случай, в случае гауссова распределения проекции скорости ветра. На основании существующего способа и предложенного подхода к прогнозированию влагопереноса определена оценка, позволяющая произвести учет погрешности, получающейся при замене случайного коэффициента уравнения его усредненным значением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богаткин, О. Г. Основы авиационной метеорологии : книга / О. Г. Богаткин. – СПб. : Гидрометеиздат, 2009. – 339 с.
2. Белов, Я. Н. Численные методы прогноза погоды : книга / Я. Н. Белов, Е. П. Борисенков, Б. Д. Панин. – Л. : Гидрометеиздат, 1989. – 376 с.
3. Матвеев, Л. Т. Физика атмосферы : книга / Л. Т. Матвеев. – Л. : Гидрометеиздат, 2000. – 376 с.
4. Дмитриева-Арраго, Л. Р. Методы краткосрочного прогноза неконвективной облачности и осадков на основе модели преобразования влаги с учетом параметризации микрофизических процессов. 1. Модель преобразования влаги в атмосфере и прогноз неконвективной облачности / Л. Р. Дмитриева-Арраго // Метеорология и гидрология. – 2004. – № 2. – С. 5–26.

5. Толстых, М. А. Глобальные модели атмосферы: современное состояние и перспективы развития / М. А. Толстых // Труды гидрометеорологического научно-исследовательского центра Российской Федерации. – 2016. – № 359. – С. 5–32.
6. Гидрометцентр России. Режим доступа: <http://old.meteoinfo.ru/faq>. – (Дата обращения: 13.03.2019).
7. Багров, А. Н. Оперативная численная схема прогноза конвективных явлений (кучвообразной облачности, ливней, гроз и шквалов) и обложных осадков / А. Н. Багров // Труды ГМЦ. – 1972. – вып. 91. – С. 29–38.
8. Успенский, Б. Д. Количественный прогноз обложных и ливневых осадков / Б. Д. Успенский // Метеорология и гидрология. – 1970. – № 1. – С. 11–18.
9. Qaddouri, A. The Canadian Global Environmental Multiscale model on the Yin-Yang grid system / A. Qaddouri, V. Lee // Q. J. Roy Meteorol. soc. – 2011. – Vol. 137. – P. 1913–1926.
10. Troch, R. Multiscale Performance of the ALARO-0 Model for Simulating Extreme Summer Precipitation Climatology in Belgium / R. Troch, R. Hamdi, H. Vyver, et al // J. Climate. – 2013. – Vol. 26. – P. 8895–8915.
11. The ICON-1.2 hydrostatic atmospheric dynamical core on triangular grids. Part 1: Formulation and performance of the baseline version / H. Wan [et al] // Geosci. Model Dev. – 2013. – Vol. 6. – P. 735–763.
12. The ICON (ICOsahedral Non-hydrostatic) modelling framework of DWD and MPI-M: Description of the non-hydrostatic dynamical core / G. Zangl [et al] // Q. J. Roy. Meteorol. soc. – 2015. – Vol. 141. – P. 563–579.
13. Adams-Selin, R. D. Forecasting Hail Using a One-Dimensional Hail Growth Model within WRF / R. D. Adams-Selin, C. L. Ziegler // Monthly Weather Review. – 2016. – Vol. 144, No. 12. – P. 4919–4939.
14. The Pan-Canadian High Resolution (2.5 km) Deterministic Prediction System / J. A. Milbrandt [et al.] // Weather and Forecasting. – 2016. – Vol. 31. – No. 6. – P. 1791–1816.
15. Barszcz, A. Improving the Explicit Prediction of Freezing Rain in a Kilometer-Scale Numerical Weather Prediction Model / A. Barszcz, J. A. Milbrandt, J. M. Theriault // Weather and Forecasting. – 2018. – Vol. 33. – No. 3. – P. 767–782.
16. Lorenz, E. N. Deterministic nonperiodic flow / E. N. Lorenz // Journal of the atmospheric sciences. – 1963. – Vol. 20. – P. 130–141.
17. Zadorozhniy, V. G. Stabilization of Linear Systems by a Multiplicative Random Noise / V. G. Zadorozhniy // Differential Equations. – 2018. – Vol. 54(6). – P. 728–747.
18. Задорожний, В. Г. Методы вариационного анализа: книга / В. Г. Задорожний. – М.-Ижевск : РХД, 2006. – 316 с.
19. Zadorozhniy, V. G. Linear chaotic resonance in vortex motion / V.G. Zadorozhniy // Computational mathematics and mathematical physics. – 2013. – Vol. 53(4). – P. 486–502.
20. Фрик, П. Г. Турбулентность: Подходы и модели: книга / П. Г. Фрик. – М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований. – 2003. – 291 с.
21. Oksendal B. Stochastic differential equations. / B. Oksendal. – Berlin : Springer, 2003. – 379 p.
22. A stochastic cloud model for cloud and ozone retrievals from UV measurements / D. S. Efremenko [et al] // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. – 2016. – Vol. 184. – P. 167–179.
23. Kunstmann, H. Effective SVAT-model parameters through inverse stochastic modeling and second-order first moment propagation / H. Kunstmann // Journal of Hydrology. – 2008. – Vol. 348. – P. 13–26.
24. Vaga, T. The Coherent Market Hypothesis / T. Vaga // Financial Analysts Journal. – 1990. – Vol. 46. – No. 6. P. 36–49.
25. Коваленко, В. В. Динамические и стохастические модели гидрологического цикла : учебное пособие / В. В. Коваленко. – Л. : Ленинградский политехнический институт, 1988, 180 с.
26. Nepomnyashchikh, V. A bionic model of adaptive searching behavior / V. Nepomnyashchikh, E. E. Popov, V. Red'ko // International Journal of Computer and Systems Sciences, 2008. – Vol. 47. – No. 1. – P. 78–85.

27. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – 6-е изд., исправл. – Москва : «Наука», 1989. – 624 с.

Задорожний Владимир Григорьевич – профессор, заведующий кафедрой нелинейных колебаний, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия.
E-mail: zador@amm.vsu.ru

Семенов Михаил Евгеньевич – профессор, профессор кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия.
E-mail: mkl150@mail.ru

28. Шилов, Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. – Москва : «Наука», 1965. – 328 с.

Ульшин Игорь Иванович – доцент, начальник кафедры теоретической гидрометеорологии, ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (Воронеж), Воронеж, Россия.
E-mail: ulshin@rambler.ru

Ножкин Владимир Сергеевич – адъюнкт кафедры теоретической гидрометеорологии, ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (Воронеж), Воронеж, Россия.
E-mail: nozhkin-v@list.ru

A MODEL ADVECTIVE CHANGE OF AIR HUMIDITY WITH STOCHASTIC PARAMETERS

V. G. Zadorozhniy^{*,**}, M. E. Semenov^{*,**}, I. I. Ulshin^{**}, V. S. Nozhkin^{**}

**Voronezh State University*

***MESC AF «N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)*

Annotation. The paper presents a solution to the underlying moisture transfer model of a differential equation whose coefficients are random processes. The distribution of the projection of the instantaneous velocity vector is approximated by the Vaga-Ising law, the parameters of which are identified on the basis of a bionic model of adaptive search behavior. Explicit formulas for the mathematical expectation and the second moment function of the solution of the corresponding moisture transfer equation are proposed. The estimation of the degree of influence of random factors on the system, in the case of replacing the random coefficient of the equation by its mathematical expectation, is determined. An example is given in the case of the Gaussian distribution of the horizontal component of the wind speed, which makes it possible to determine the expectation and the second moment function within the framework of model representations.

Keywords: moisture transfer, random processes, stochastic model, Vaga – Ising distribution, mathematical expectation, second moment function, influence of random factors.

Zadorozhniy Vladimir – professor, head of department of nonlinear oscillations, Voronezh State University, Voronezh, Russia.
E-mail: zador@amm.vsu.ru

Semenov Mikhail – professor, professor, professor of digital technology, Voronezh State University, Voronezh, Russia.
E-mail: mkl150@mail.ru

Ulshin Igor – assistant professor, head of the department of theoretical hydrometeorology, MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh), Voronezh, Russia.
E-mail: ulshin@rambler.ru

Nozhkin Vladimir – postgraduate officer of theoretical hydrometeorology, MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh), Voronezh, Russia.
E-mail: nozhkin-v@list.ru